

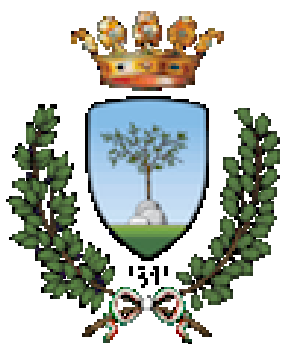


## “RIFRATTOMETRO A SFERA DIELETRICA”

Antonio Parretta\* e Linda Polastri\*\*

\*parretta@fe.infn.it

\*\*linda.polastri@student.unife.it



Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra  
Università di Ferrara

# RIASSUNTO

- Una sfera dielettrica omogenea può essere assimilata, entro certe condizioni operative, ad una lente spessa.
- In questo lavoro sono analizzate le proprietà di focalizzazione di una sfera dielettrica solida o liquida contenuta in una sfera trasparente a parete sottile.
- Lo scopo è realizzare un semplice rifrattometro (“Rifrattometro a sfera dielettrica”).
- Sono stati applicati due metodi analitici (il metodo trigonometrico e il metodo delle lenti spesse) e un programma di simulazione a tracciamento di raggi, sotto l’ipotesi di ottica parassiale.

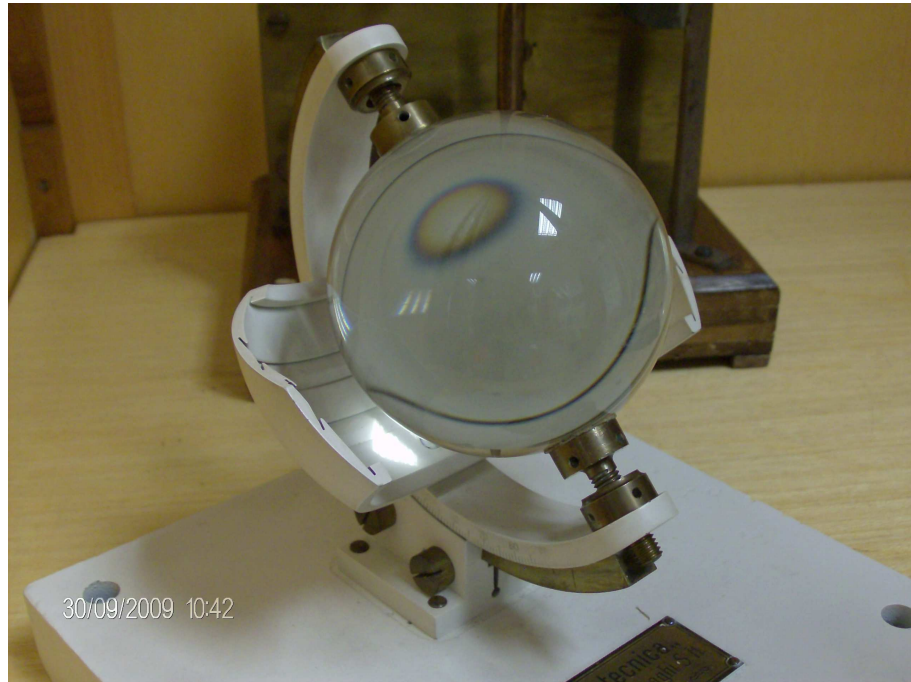


# SOMMARIO

- Proprietà ottiche della sfera dielettrica
- Geometria del fascio trasmesso
- Analisi di sfere dielettriche solide
- Analisi di sfere dielettriche liquide
- Strumentazione e metodi di misura
- Risultati
- Conclusioni



# Eliofanografo

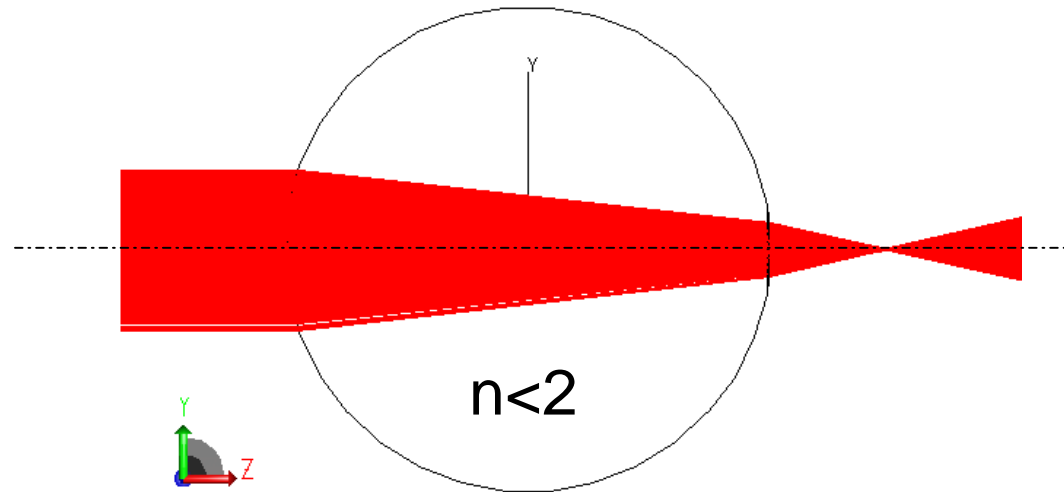


Eliofanografo di Campbell (1853) e Stokes (1880):

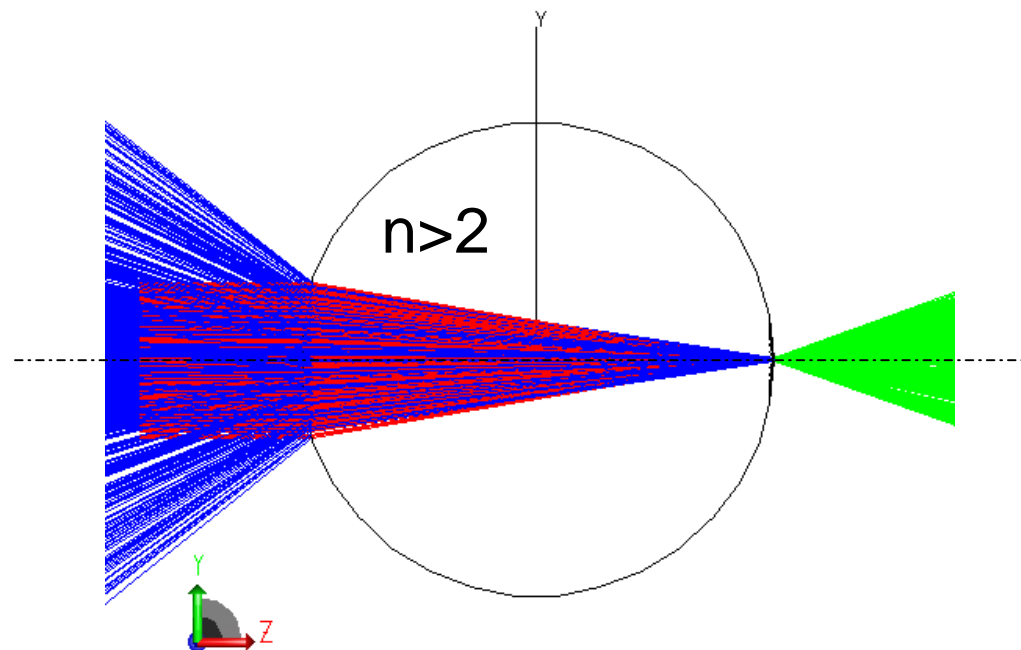
Apparecchio per la misurazione delle ore di luce e dell'intensità della radiazione solare (insolazione). E' costituito da una sfera di vetro ottico sostenuta ai poli da due supporti situati all'estremità di un arco meridiano graduato, il quale consente di disporre l'asse della sfera con una inclinazione in gradi rispetto all'orizzontale, uguale ai gradi di latitudine del luogo. I raggi solari, attraversando la sfera di cristallo pieno, lasciano tracce di bruciato su una striscia di carta posta sulla semisfera sottostante.



# Proprietà ottiche della sfera dielettrica



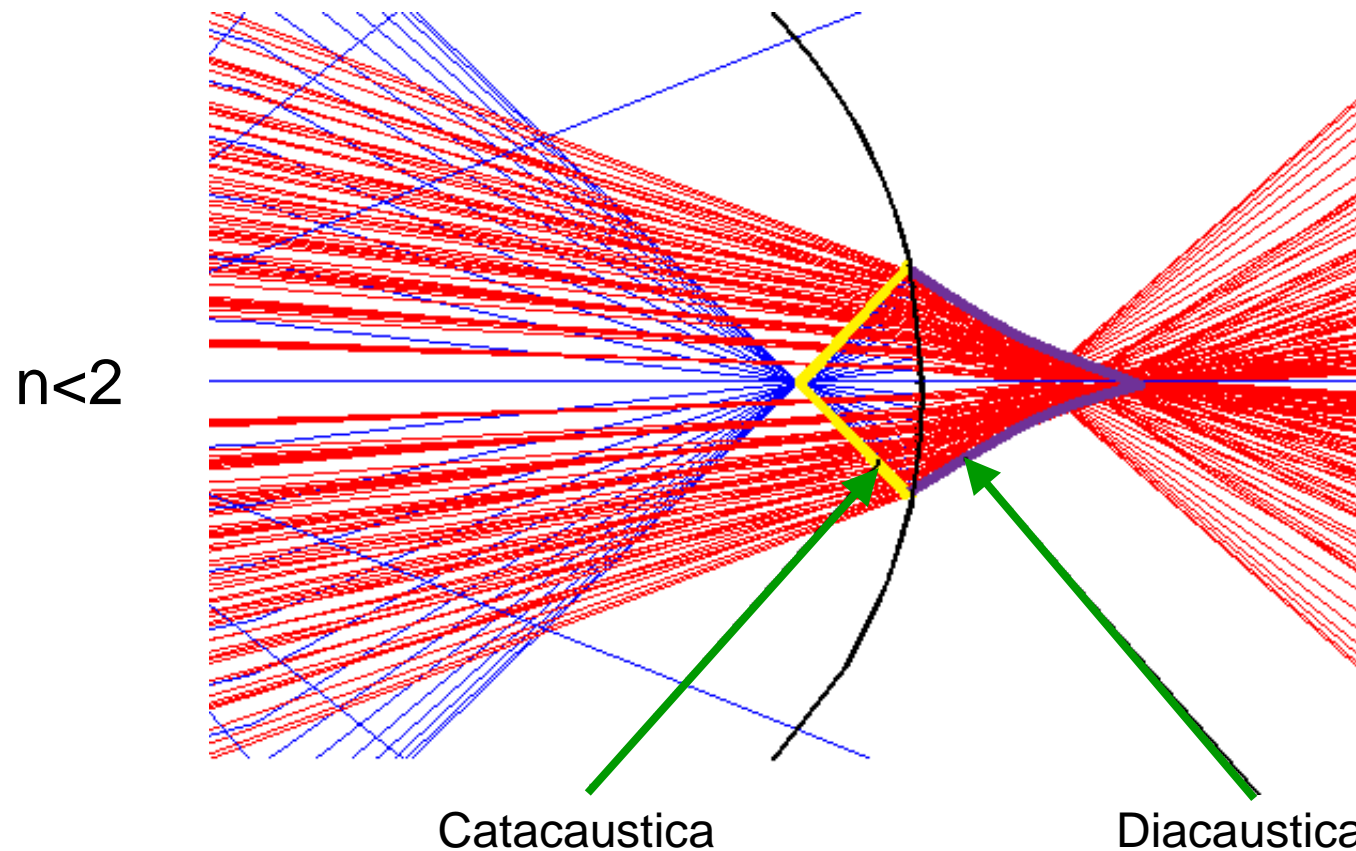
Il fascio incidente sulla sfera è rifratto due volte e focalizzato all'esterno.



Il fascio incidente sulla sfera è rifratto due volte e focalizzato all'interno.



# Proprietà ottiche della sfera dielettrica

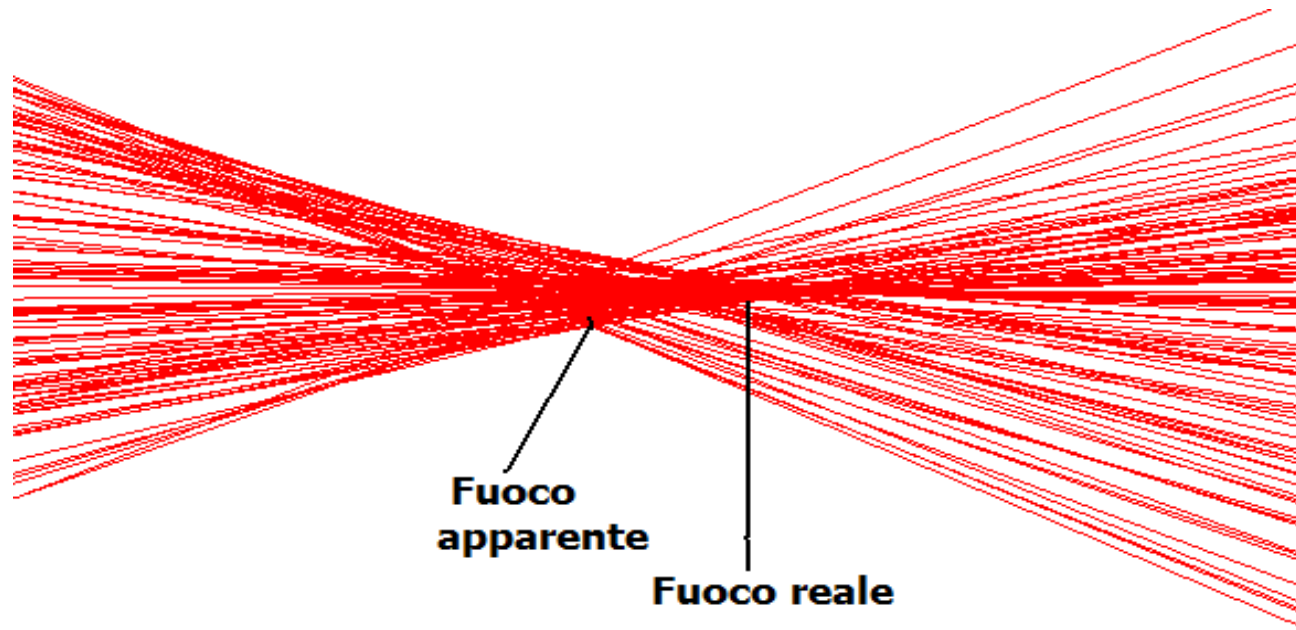


La catacaustica risulta dall'involuppo dei raggi riflessi all'interno della sfera

La diacaustica risulta dall'involuppo dei raggi trasmessi all'esterno della sfera



# Geometria del fascio vicino al fuoco

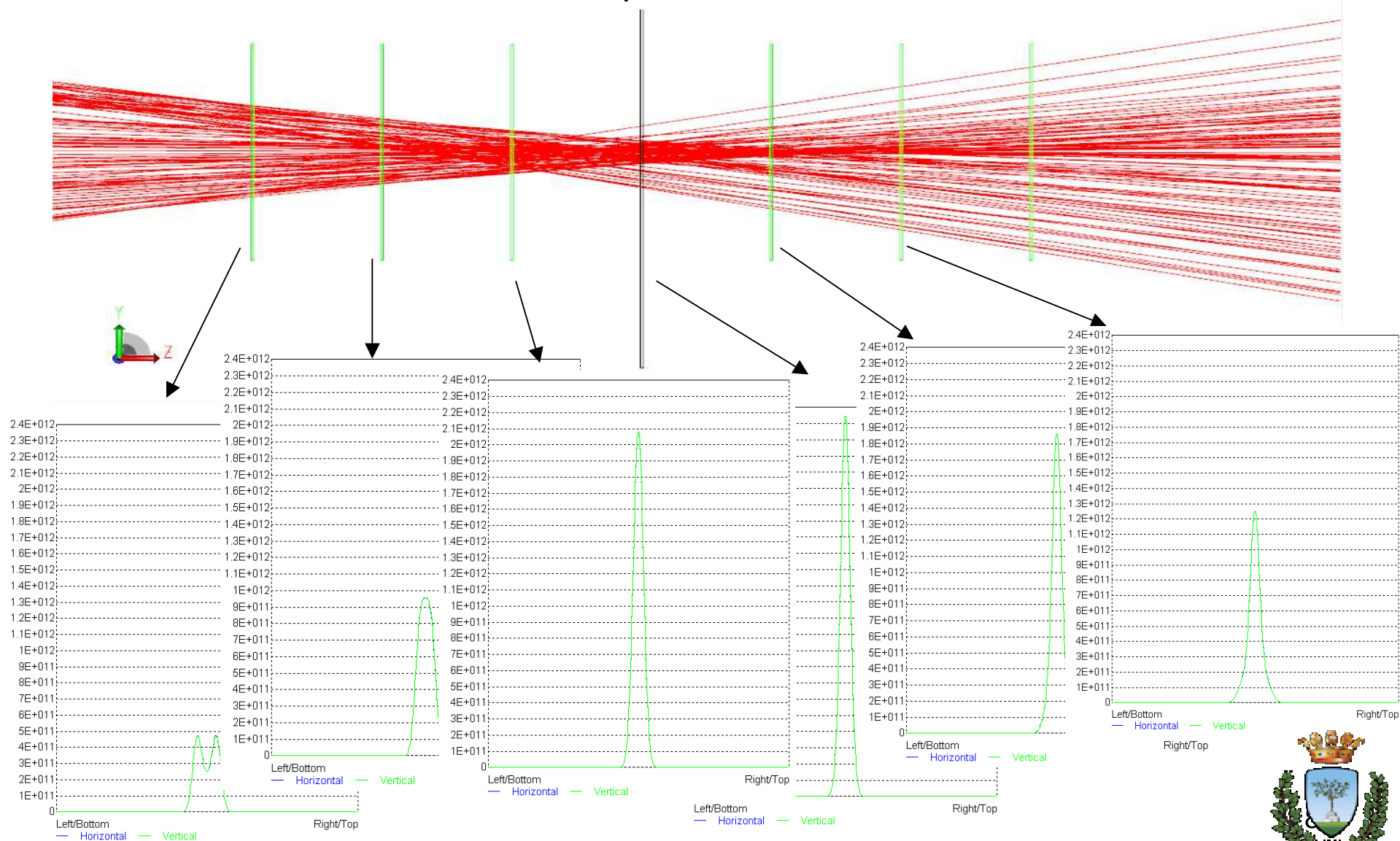


Fuoco apparente: risulta dall'involuppo di tutti i raggi trasmessi. E' il punto nel quale il fascio mostra una strozzatura. Vi concorre l'aberrazione sferica.

Fuoco reale: è formato dai raggi parassiali. In figura appare dopo la strozzatura e quindi è il fuoco più lontano dalla sfera.



Attraverso simulazioni con il programma TracePro<sup>®</sup>, il fascio viene caratterizzato interponendo uno schermo assorbente perpendicolare all'asse ottico e analizzando il picco d'irradianza.



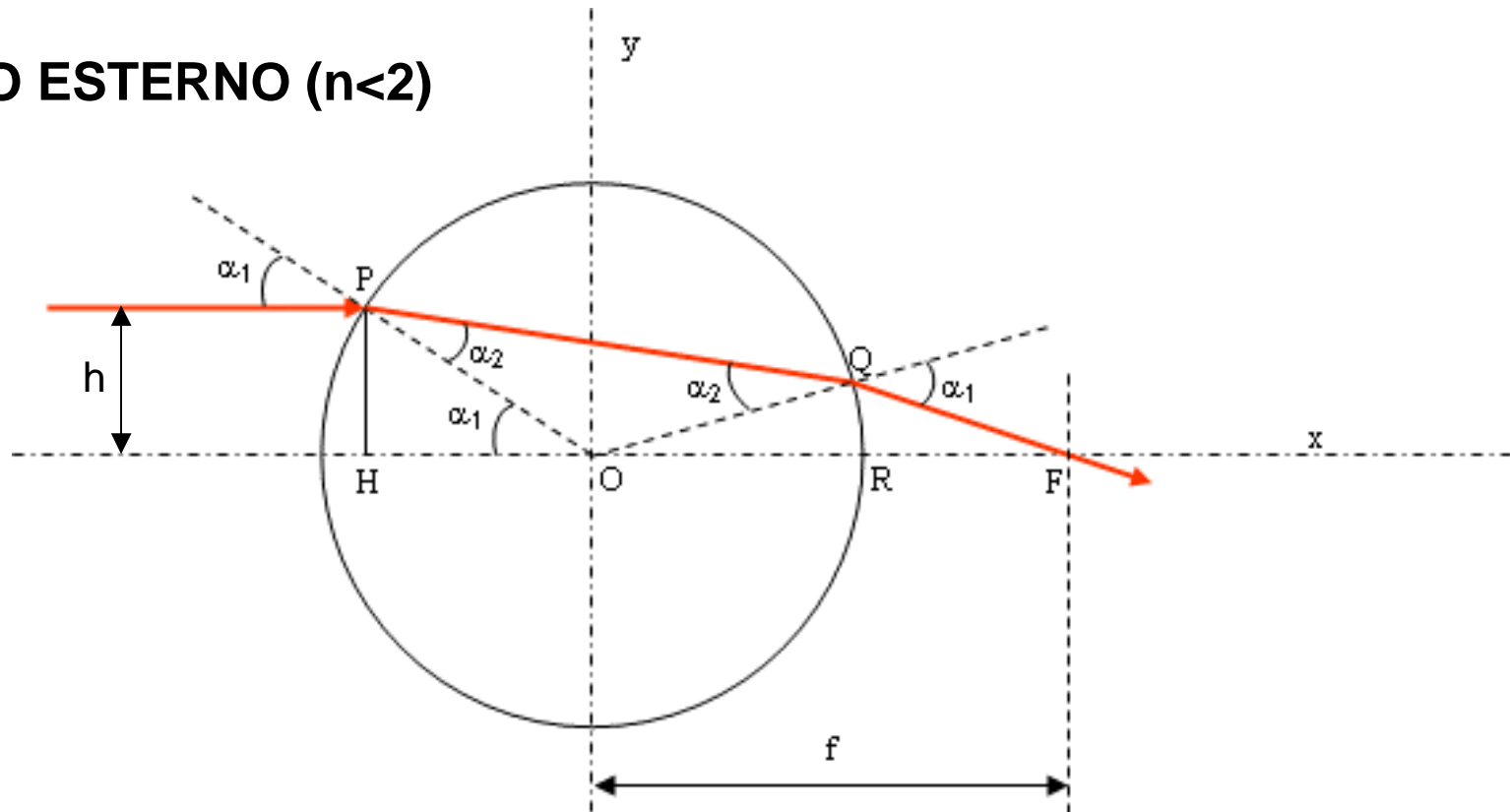


# Metodo trigonometrico



# Sfere dielettriche solide

**FUOCO ESTERNO ( $n < 2$ )**

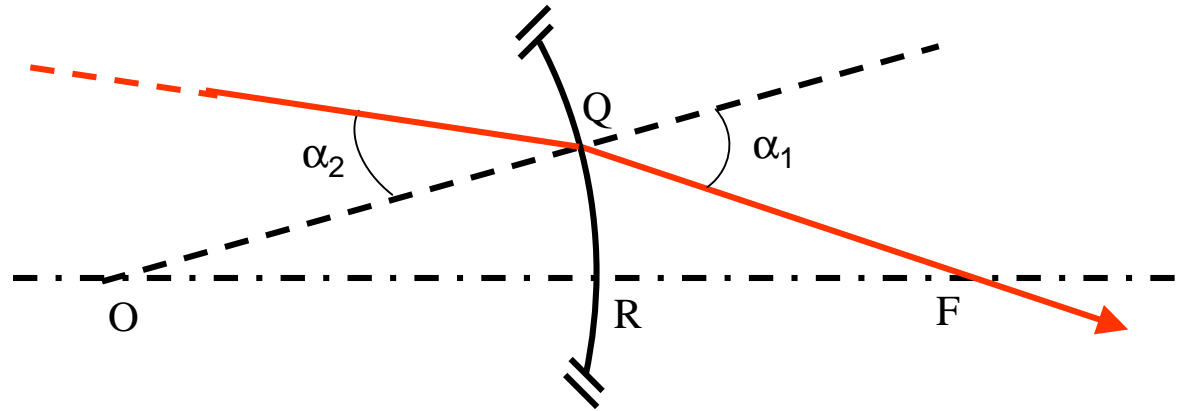


Applicando la trigonometria e la legge di Snell, si ricava un'equazione generale per la lunghezza focale normalizzata:

$$\frac{f}{R} = f\left(\frac{h}{R}, n\right)$$



Risolvendo il triangolo OQF si trova:



$$\frac{f}{R} \left( \frac{h}{R}, n \right) = \frac{\cos(2\alpha_2 - \alpha_1) - \cos \alpha_1 \cdot \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2)}{\sin^2(2\alpha_1 - 2\alpha_2)}$$

Dove:

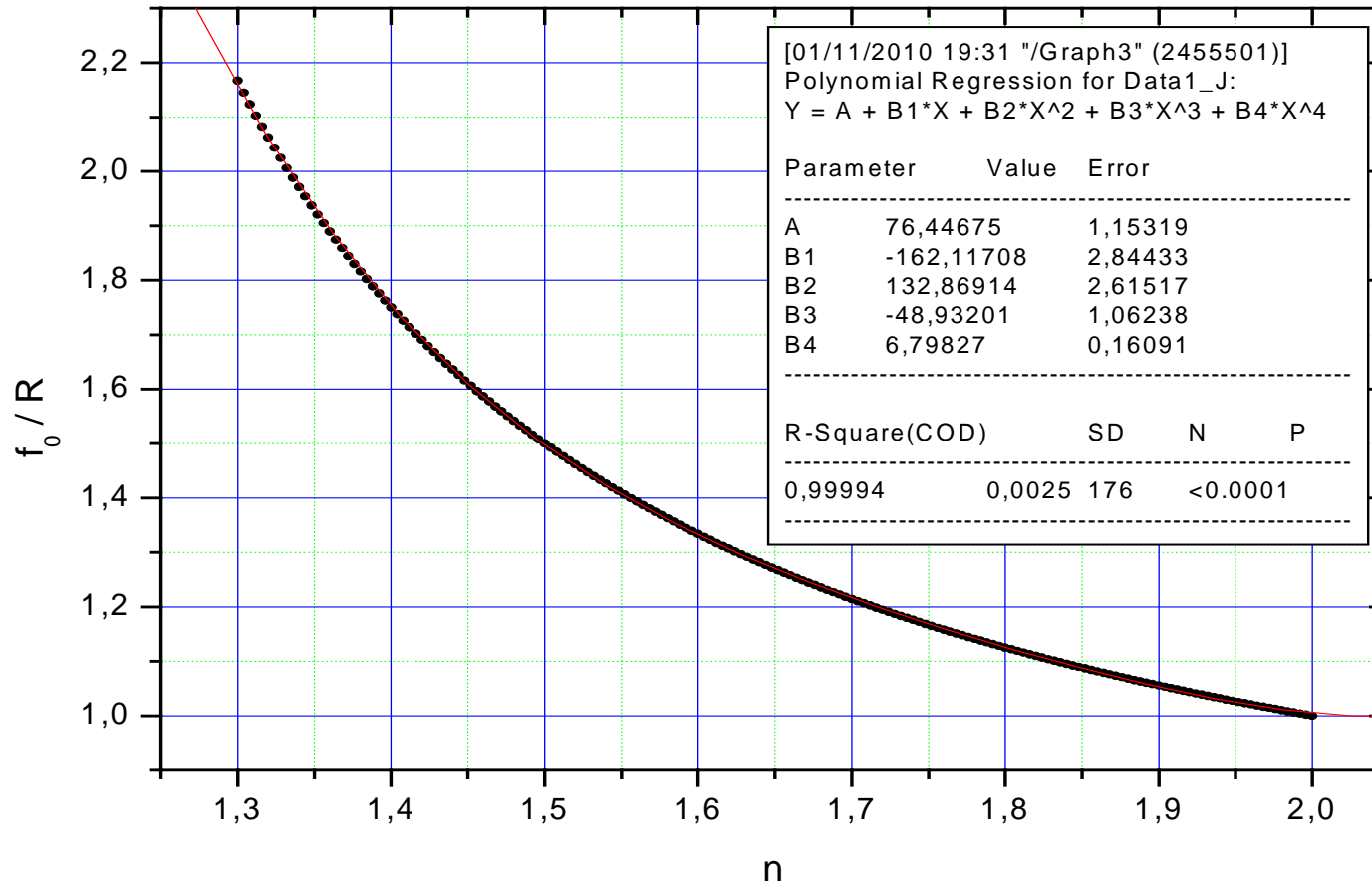
$$\alpha_1 = \text{sen}^{-1} \left( \frac{h}{R} \right) \quad \alpha_2 = \text{sen}^{-1} \left( \frac{h}{nR} \right)$$

Graficando tale equazione con il programma Origin si ottiene un grafico generale valido per ogni materiale solido ed omogeneo ...



## Focale parassiale in funzione dell'indice di rifrazione per fuoco esterno ( $n < 2$ )

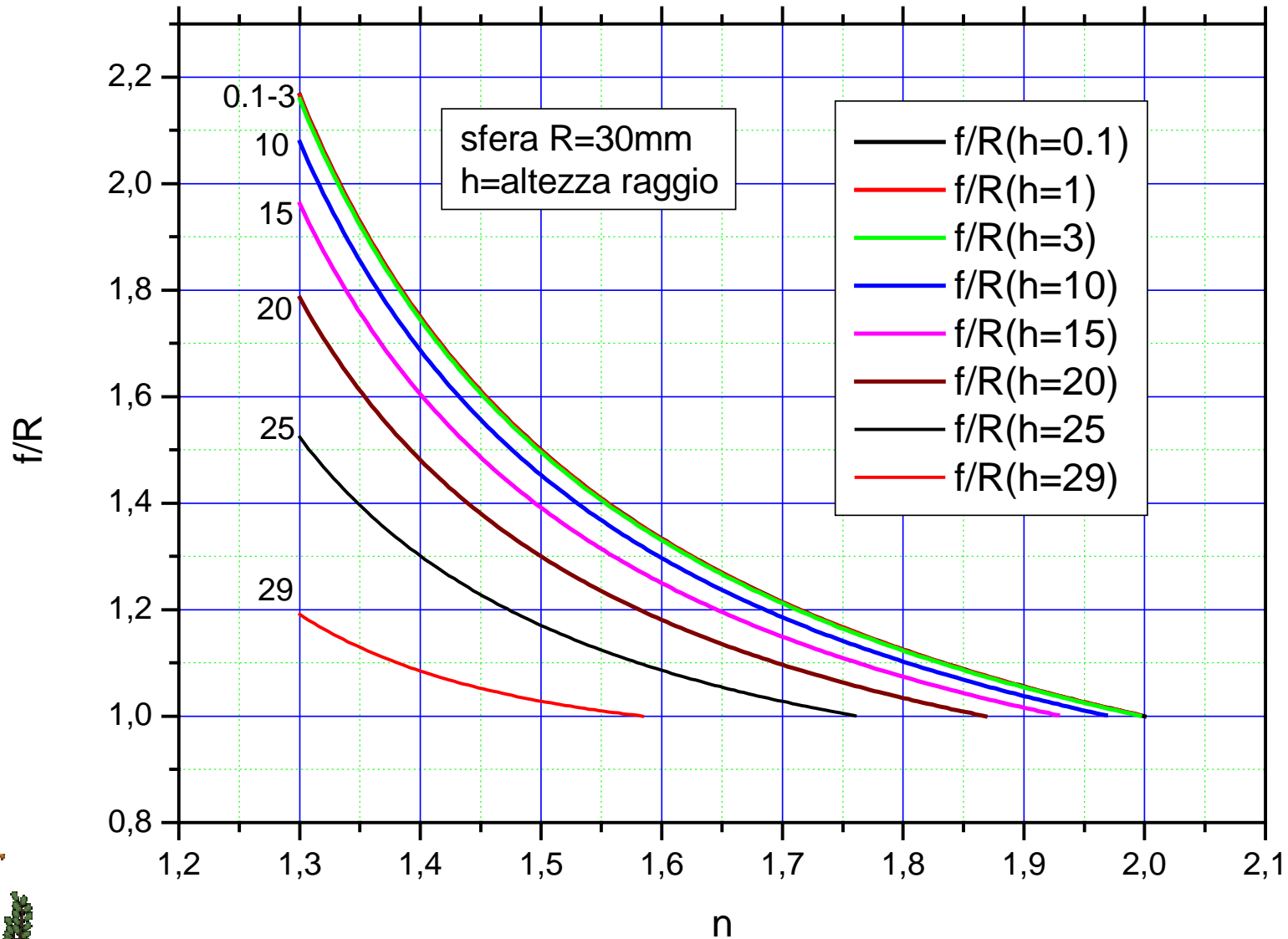
Per  $h/R \rightarrow 0$  si ottiene:



Fit dei dati con un polinomio del 4° grado:

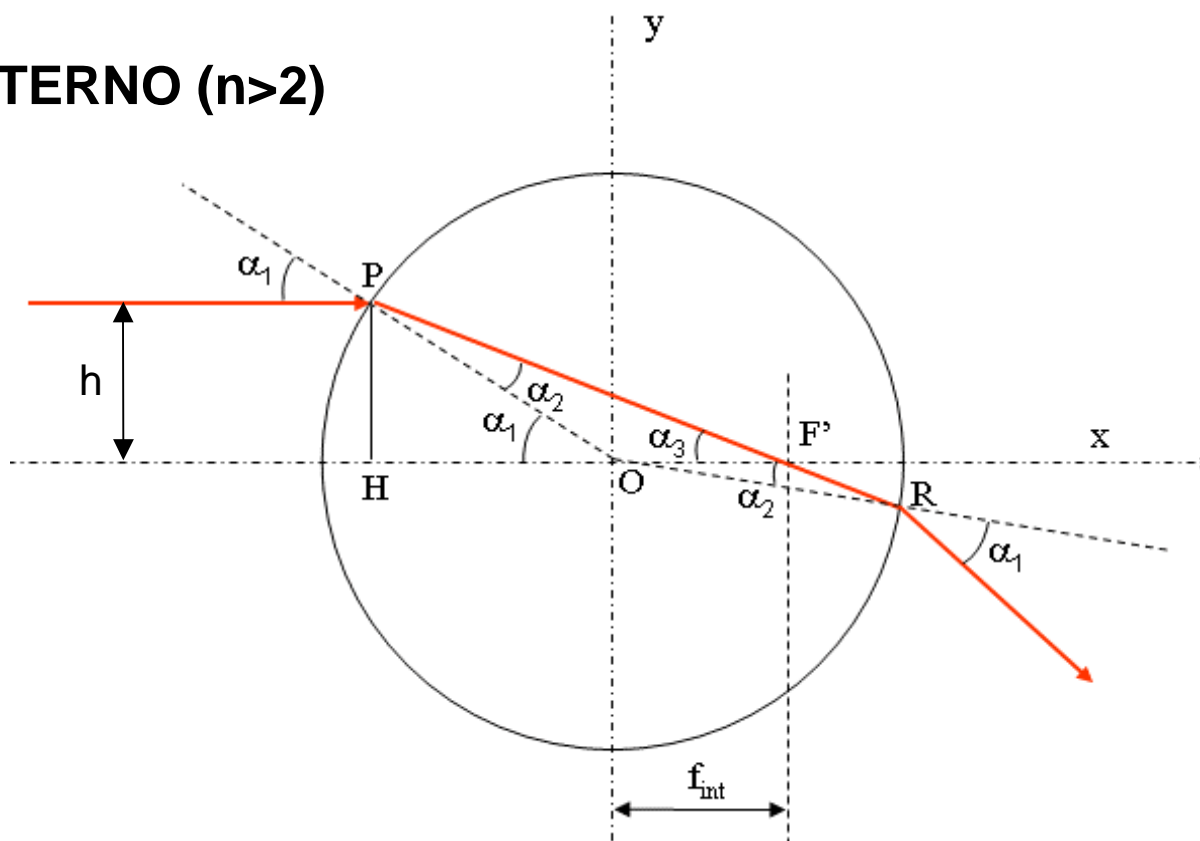
$$\frac{f_0}{R}(n) = 76.44675 - 162.11708 * n + 132.86914 * n^2 - 48.93201 * n^3 + 6.79827 * n^4$$

# Differenti aperture del diaframma, h



# Sfere dielettriche solide

## FUOCO INTERNO ( $n > 2$ )



Applicando la trigonometria e la legge di Snell, si ricava un'equazione generale per la lunghezza focale normalizzata:

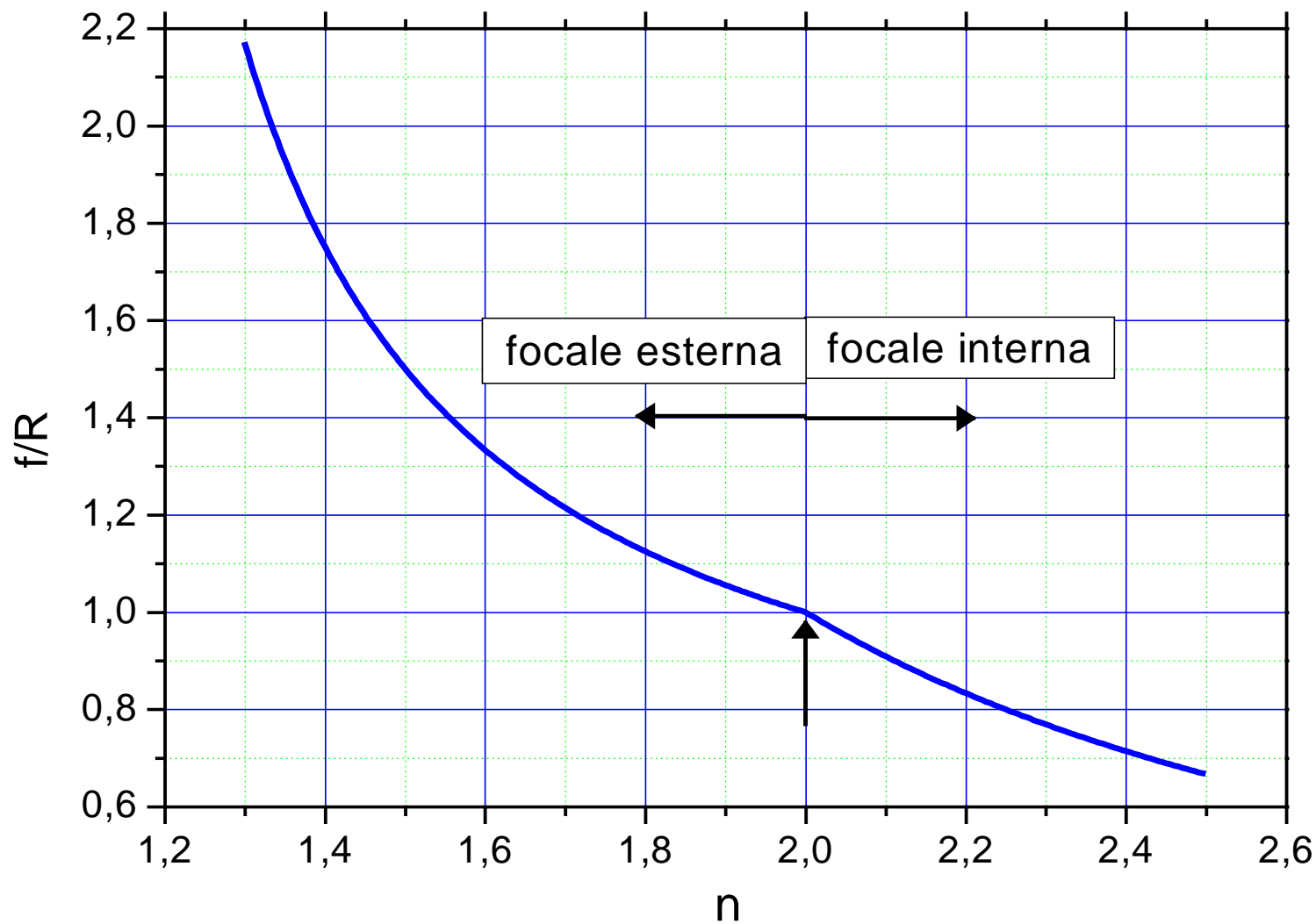
$$\frac{f_{\text{int}}}{R} = f_{\text{int}} \left( \frac{h}{R}, n \right) = \frac{\sin \alpha_1}{\tan \alpha_3} - \cos \alpha_1$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$$

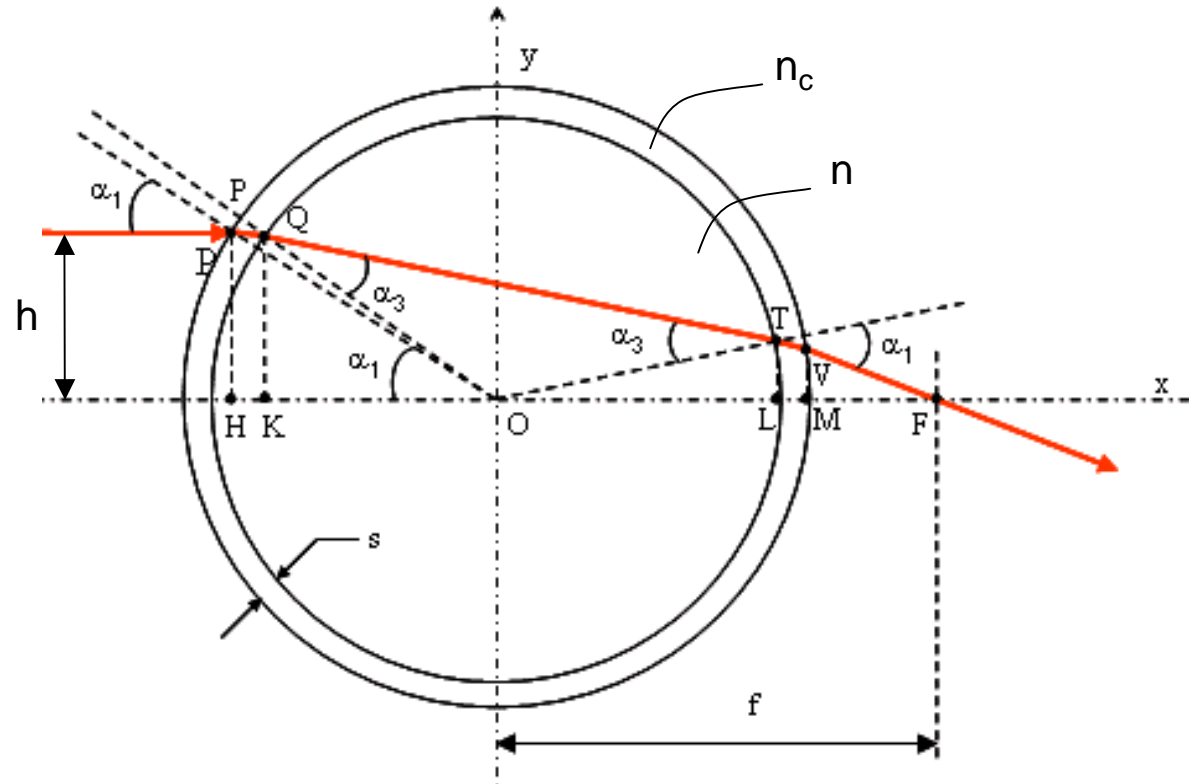
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(h/R); \quad \alpha_2 = \sin^{-1}(h/nR)$$



# Confronto tra focale parassiale interna ed esterna



# Sfere dielettriche liquide



Applicando la trigonometria e la legge di Snell, si ricava un'equazione generale per la lunghezza focale normalizzata:

$$\frac{f}{R} = f(R, h, s, n_c, n)$$





Si considerino i triangoli OHP e OHQ:

$$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{h}{R+s}\right) \quad \alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \alpha_1}{n_c}\right)$$

$$\alpha_3 = \sin^{-1}\left(\sin \alpha_2 \frac{n_c}{n}\right) \quad \Delta\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{OK}{R}\right) - \alpha_1$$

Si considerino i triangoli OVM e MVF:

$$MF = \frac{VM}{\text{tg}(\widehat{MV\hat{F}})}$$

$$OM = OV \cdot \cos(\beta - \Delta\beta) = (R+s) \cdot \cos(\beta - \Delta\beta)$$

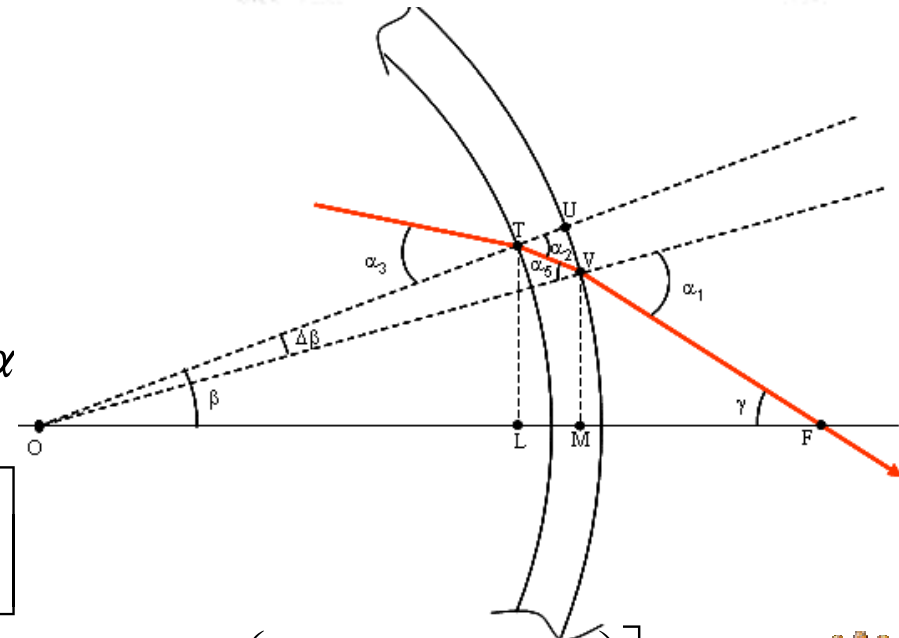
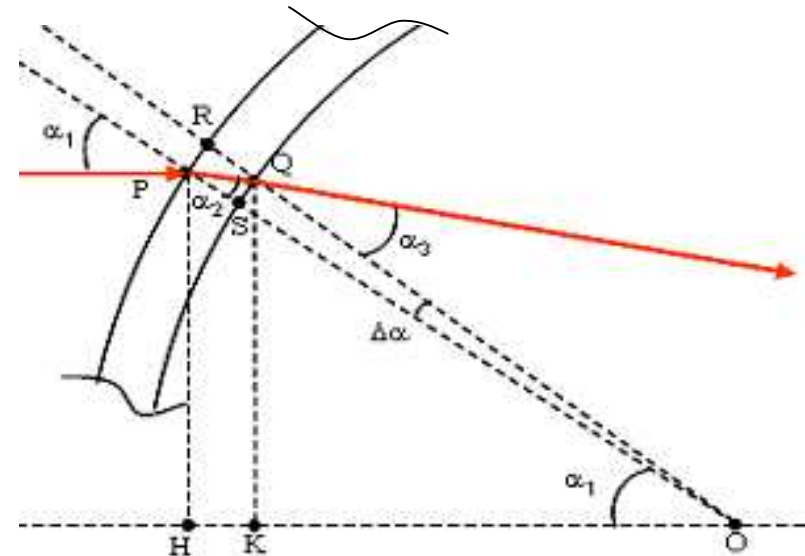
$$\widehat{MV\hat{F}} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta + \Delta\beta - \alpha_1\right) = \frac{\pi}{2} + \beta - \Delta\beta + \alpha_1$$

$$VM = (R+s) \cdot \sin(\beta - \Delta\beta)$$

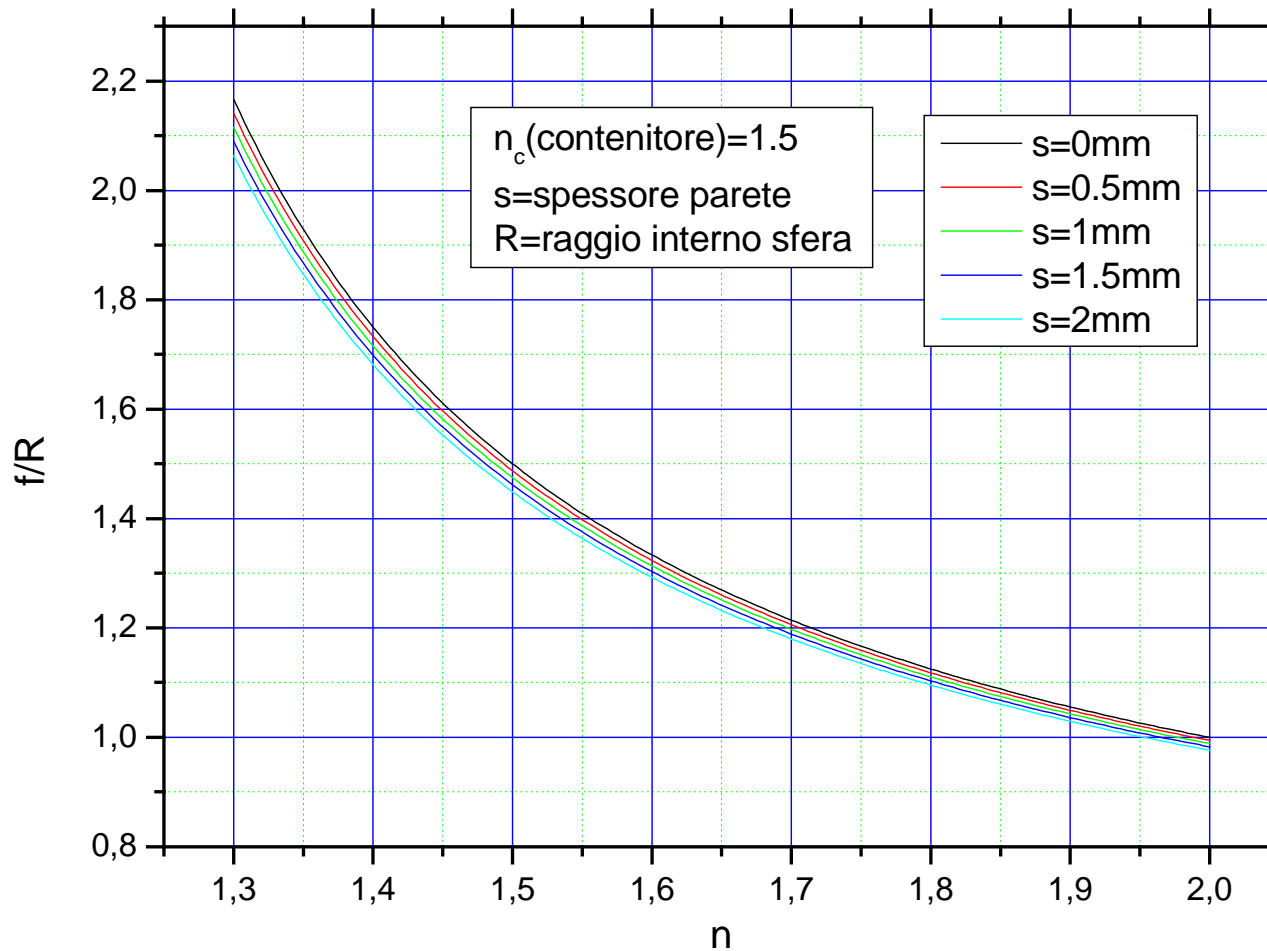
$$\beta = \pi - \alpha_1 - \Delta\alpha - (\pi - 2\alpha_3) = 2\alpha_3 - \alpha_1 - \Delta\alpha$$

$$\Delta\beta = \cos^{-1}\left[\frac{2(R^2 + Rs) \cdot \cos^2 \alpha_2 - s^2 \cdot \sin^2 \alpha_2}{2R(R+s) \cdot \cos^2 \alpha_2}\right]$$

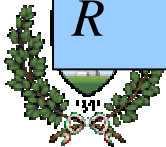
$$f = OM + MF = (R+s) \cdot \left[ \cos(\beta - \Delta\beta) + \text{sen}(\beta - \Delta\beta) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \beta - \Delta\beta\right) \right]$$



## Focale parassiale relativa in funzione dell'indice di rifrazione per diversi spessori di parete ( $n_c=1.5$ )

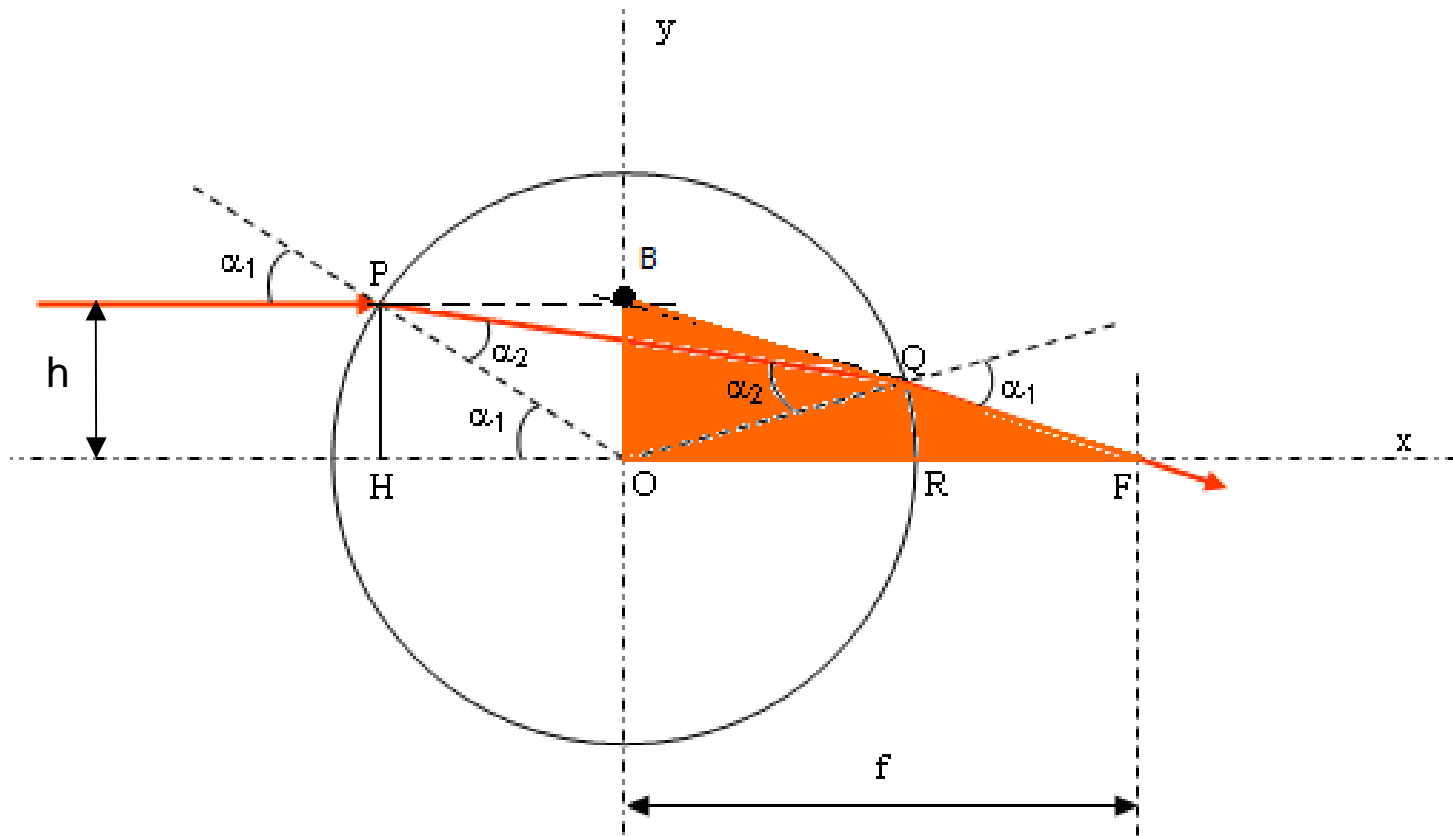


$$\frac{f}{R} = f(R, h, s, n_c, n) = \frac{(R+s)}{R} \cdot \left[ \cos(\beta - \Delta\beta) + \text{sen}(\beta - \Delta\beta) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \beta - \Delta\beta\right) \right]$$



# Metodo delle lenti spesse





$$\frac{f}{R} = f\left(\frac{h}{R}, n\right) = \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\tan[2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)]}$$

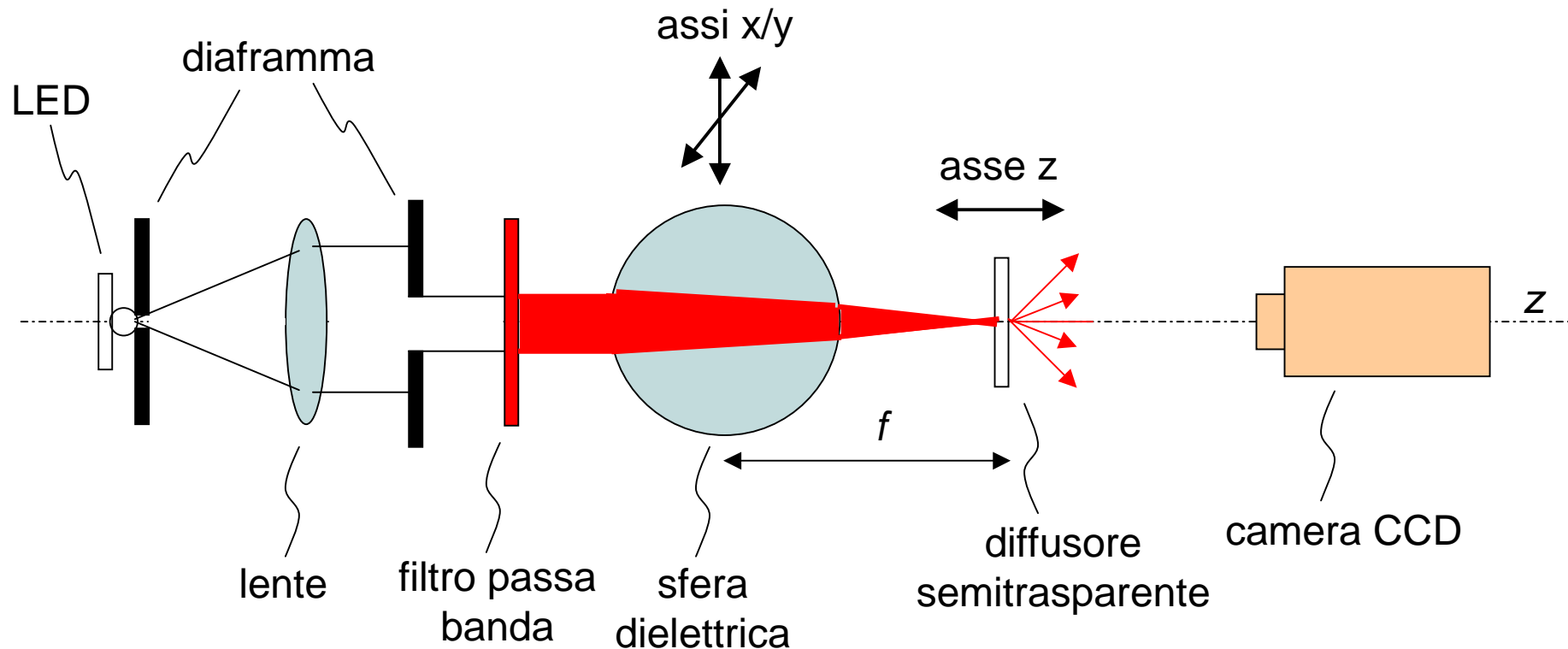
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(h/R)$$

$$\alpha_2 = \sin^{-1}(h/nR)$$

Il metodo trigonometrico e quello delle lenti spesse danno gli stessi risultati per raggi parassiali



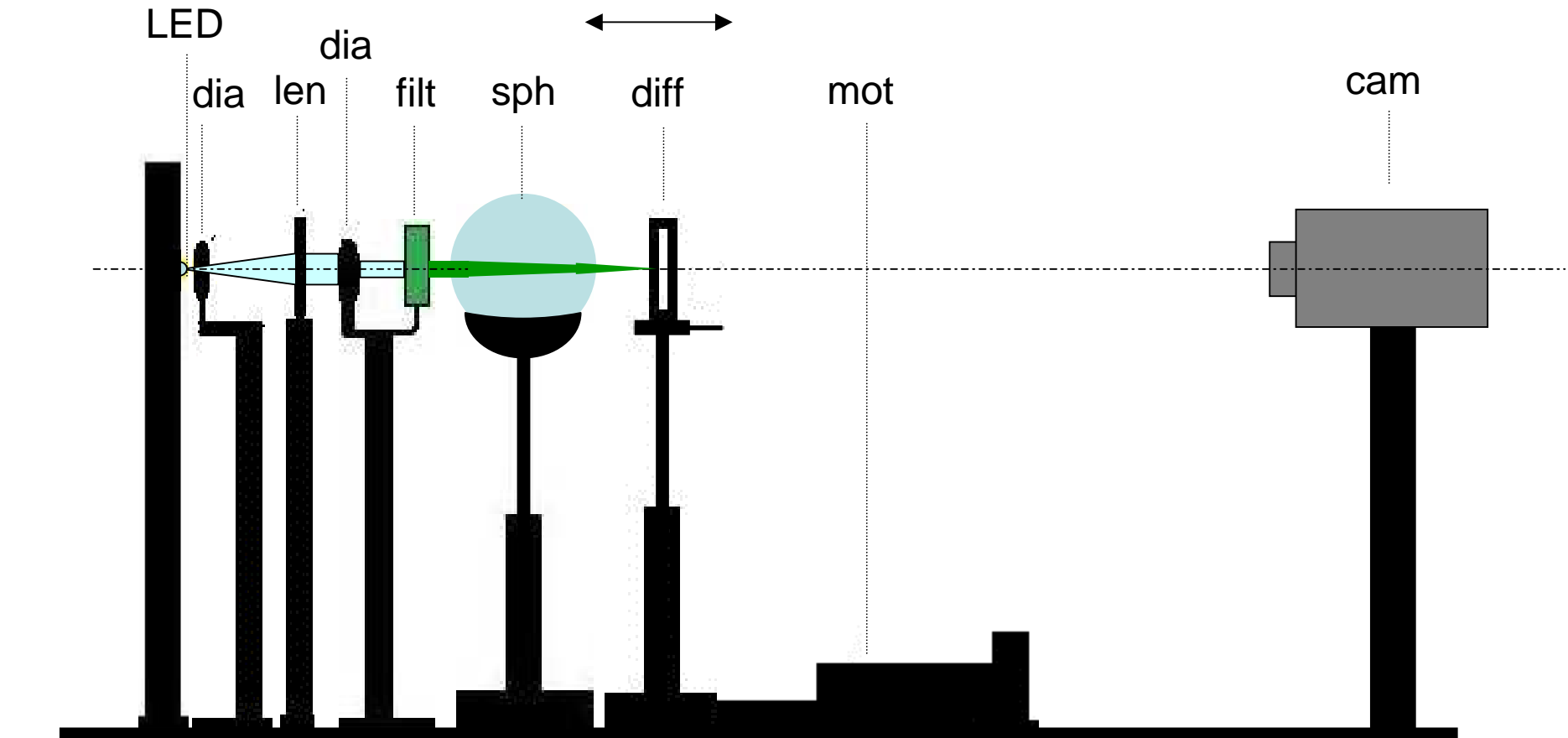
# Schema di principio del rifrattometro



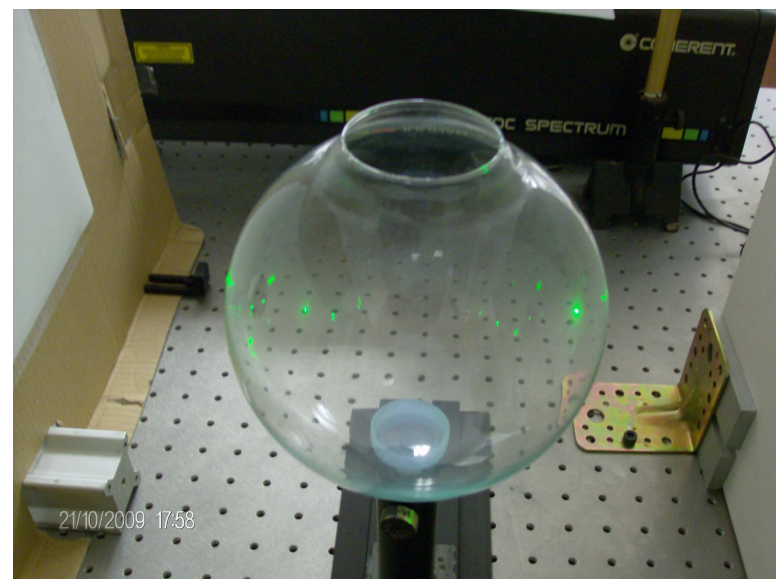
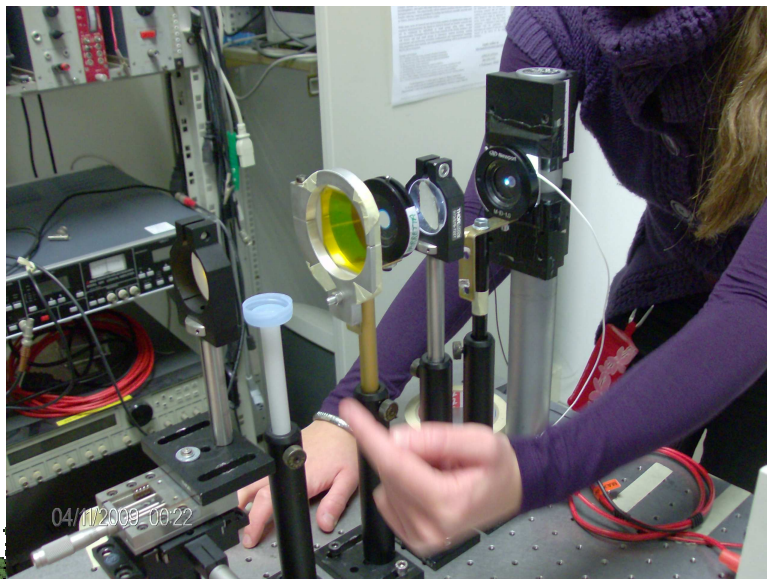
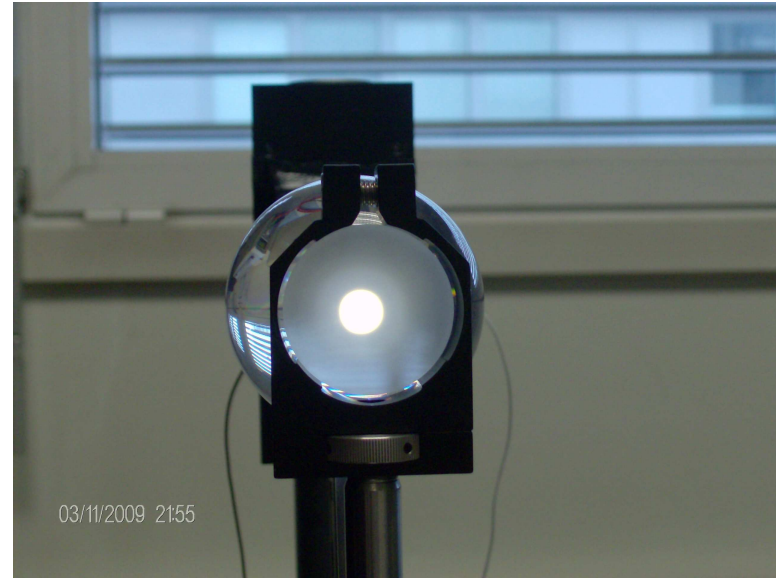
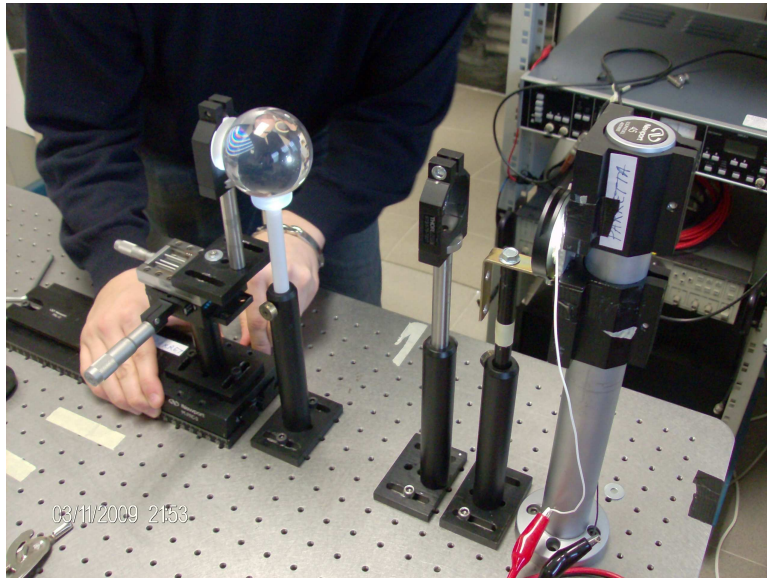
La lunghezza focale  $f$  si misura movimentando il diffusore con un motorino passo-passo, registrando con la CCD l'immagine prodotta e analizzandola al PC.



# Schema dell'apparato sperimentale



# Foto dell'apparato sperimentale



# Metodo di misura del fuoco

## Strumenti:

- Schermo diffusore semitrasparente;
- Motorino per lo spostamento fine dello schermo e micrometro;
- Camera CCD;
- Programma per PC.

## Procedura:

- \* Scattate 10 fotografie dell'immagine sullo schermo per ogni sua posizione.
- Analisi delle foto con un programma che conta i pixel illuminati (“**dead pixel text**”): minore è il numero di pixel illuminati e più l'immagine analizzata si trova vicino al fuoco.
- L'immagine con il minor numero di pixel illuminati corrisponde al fuoco.
- Per evitare il conteggio di dead pixels della CCD, ogni 10 misurazioni si fa una foto con la CCD oscurata.





# Sfere analizzate

## Sfere solide:

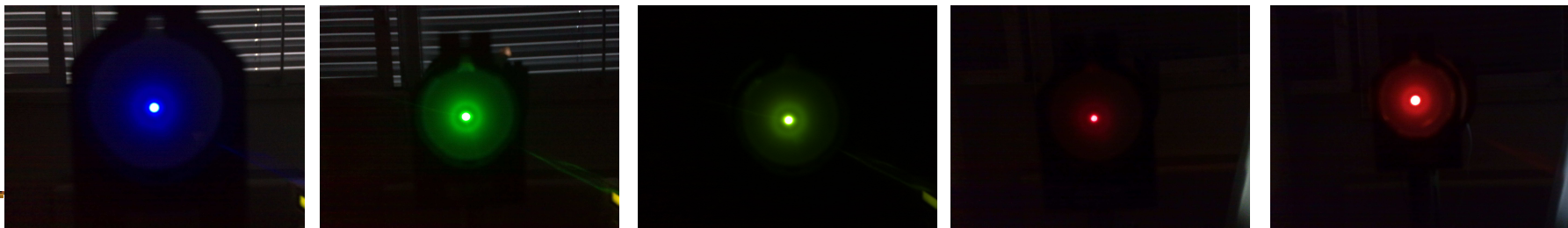
- Acrilico
- Policarbonato

## Sfere in vetro riempite con:

- Acqua distillata
- Glicerina

# Lunghezze d'onda

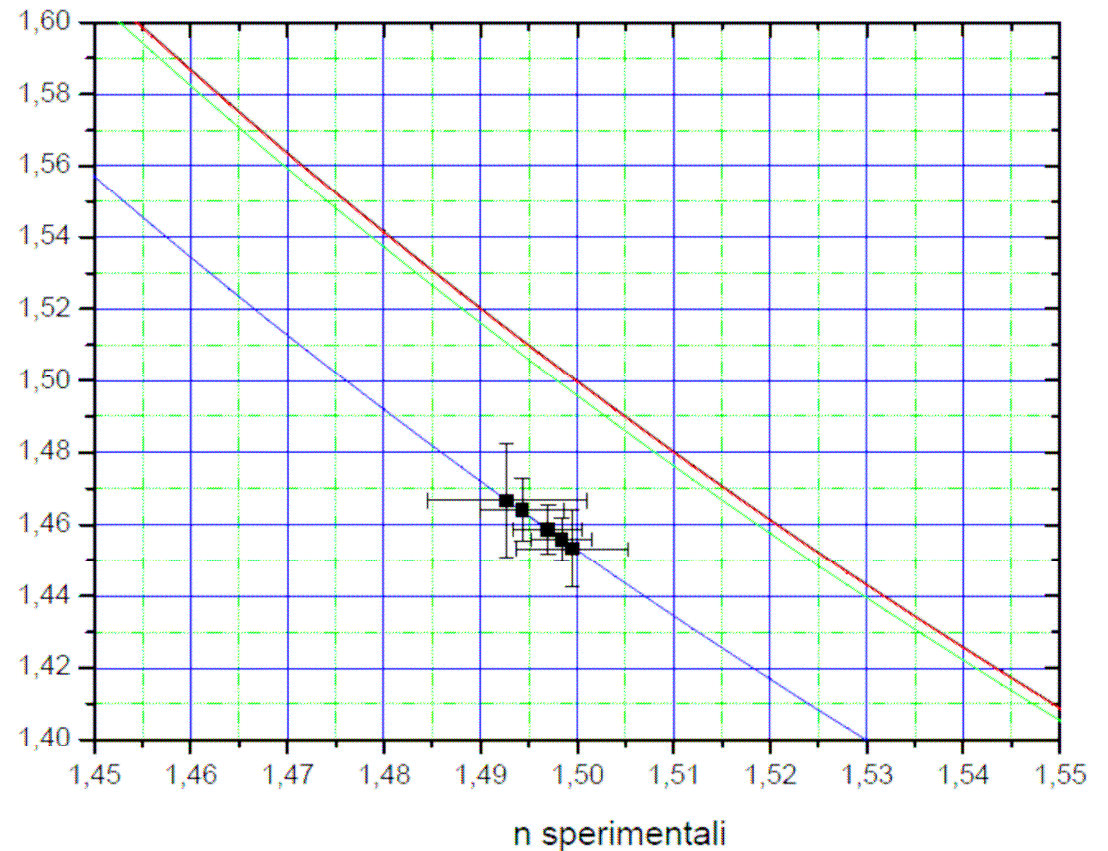
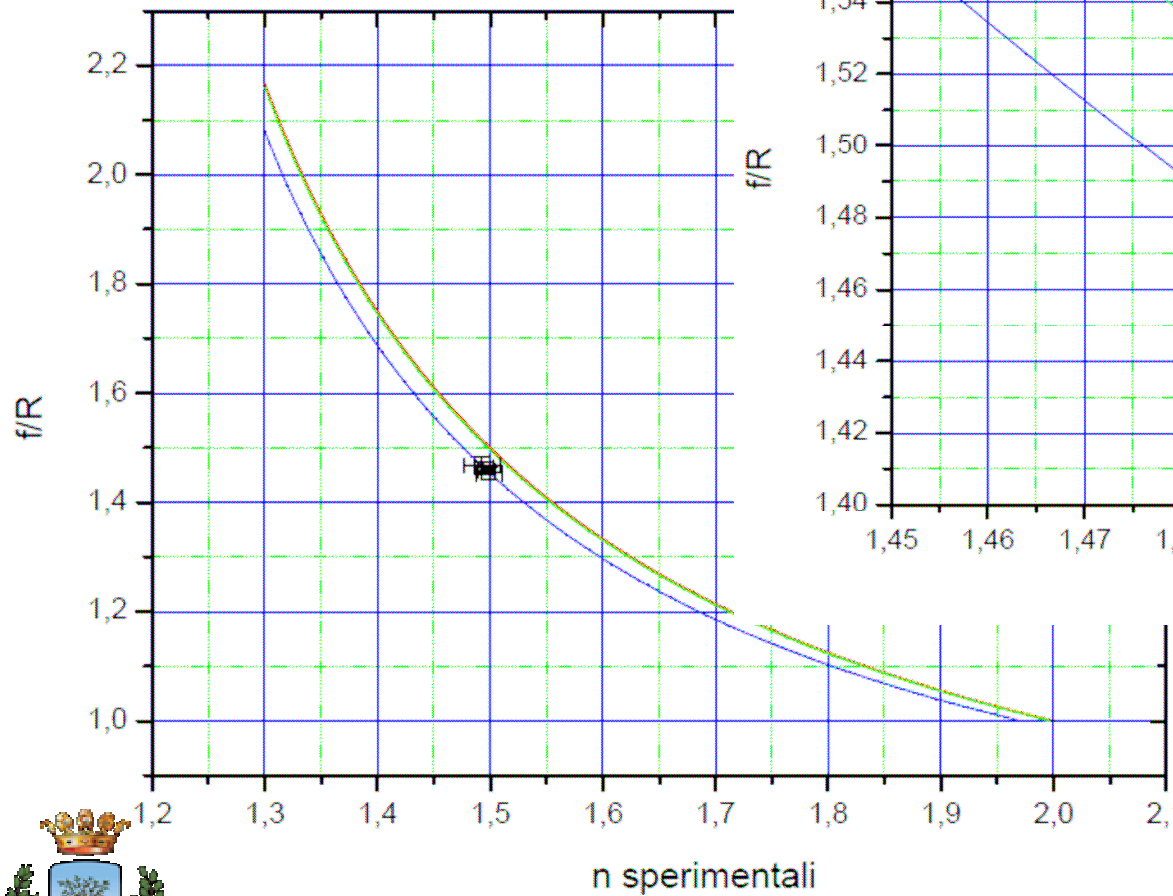
$\lambda = 450 / 500 / 550 / 600 / 650 \text{ nm};$



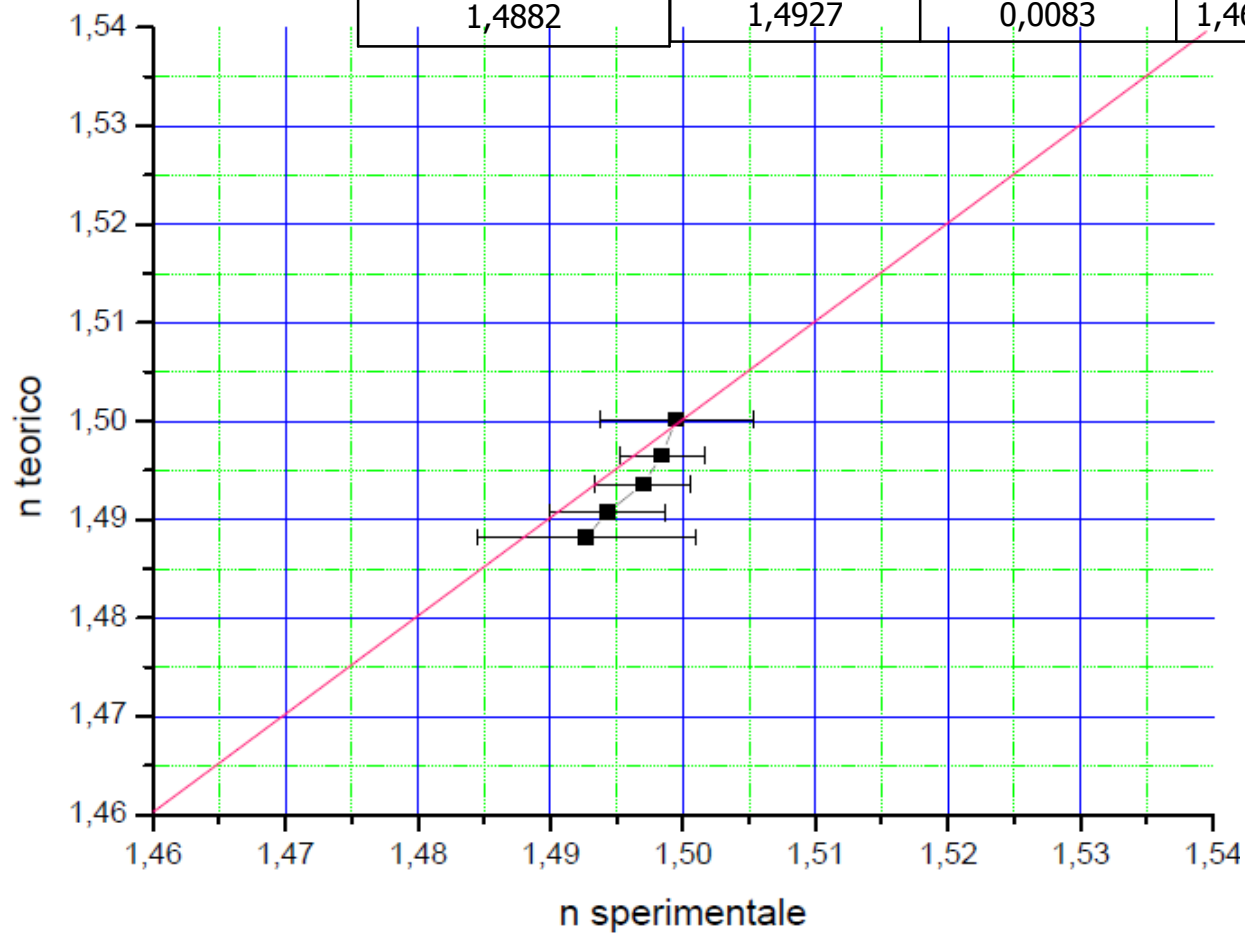
# Dati sperimentali

## SFERE SOLIDE:

- Acrilico



<b>n teorico acrilico</b>	<b>n sperimentale acrilico</b>	<b><math>\Delta n</math> sperimentale</b>	<b><math>\frac{f}{R}</math></b>	<b><math>\Delta\left(\frac{f}{R}\right)</math></b>	<b>Lunghezza d'onda (nm)</b>
1,5002	1,4995	0,0058	1,4533	0,0108	450
1,4965	1,4984	0,0032	1,4560	0,0060	500
1,4936	1,4970	0,0036	1,4587	0,0067	550
1,4907	1,4943	0,0044	1,4640	0,0086	600
1,4882	1,4927	0,0083	1,4667	0,0158	650

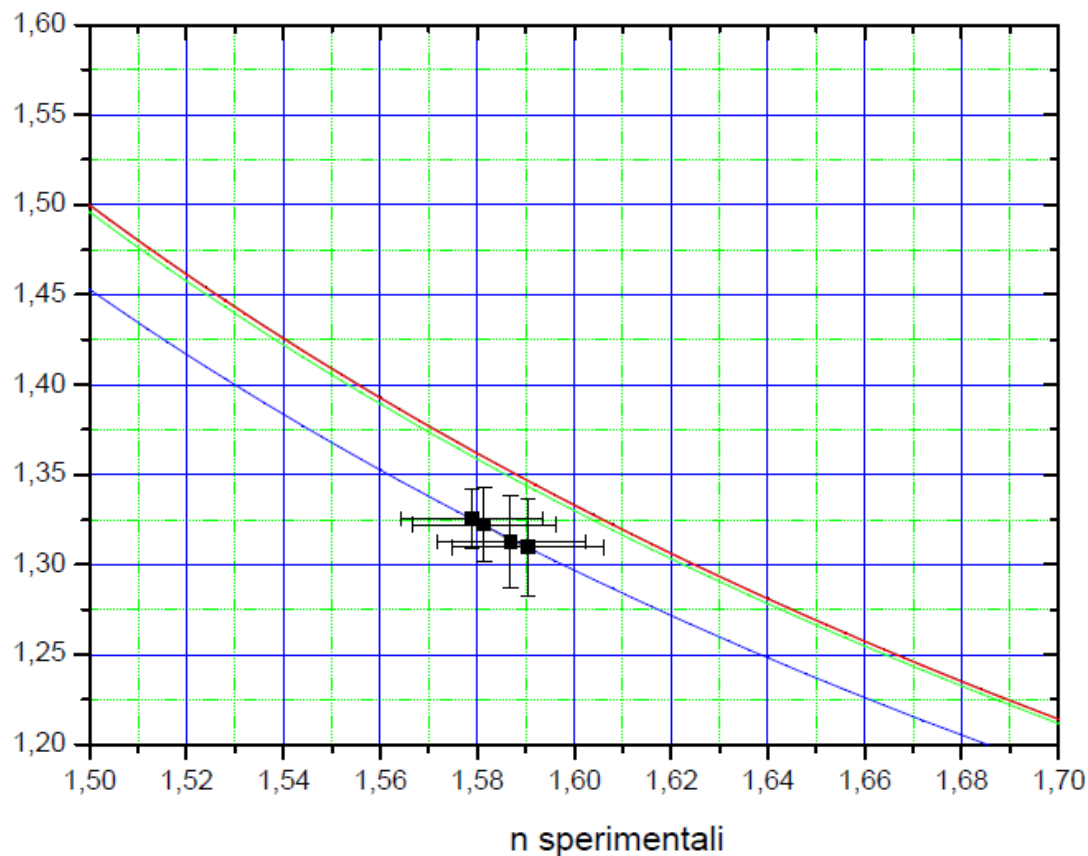
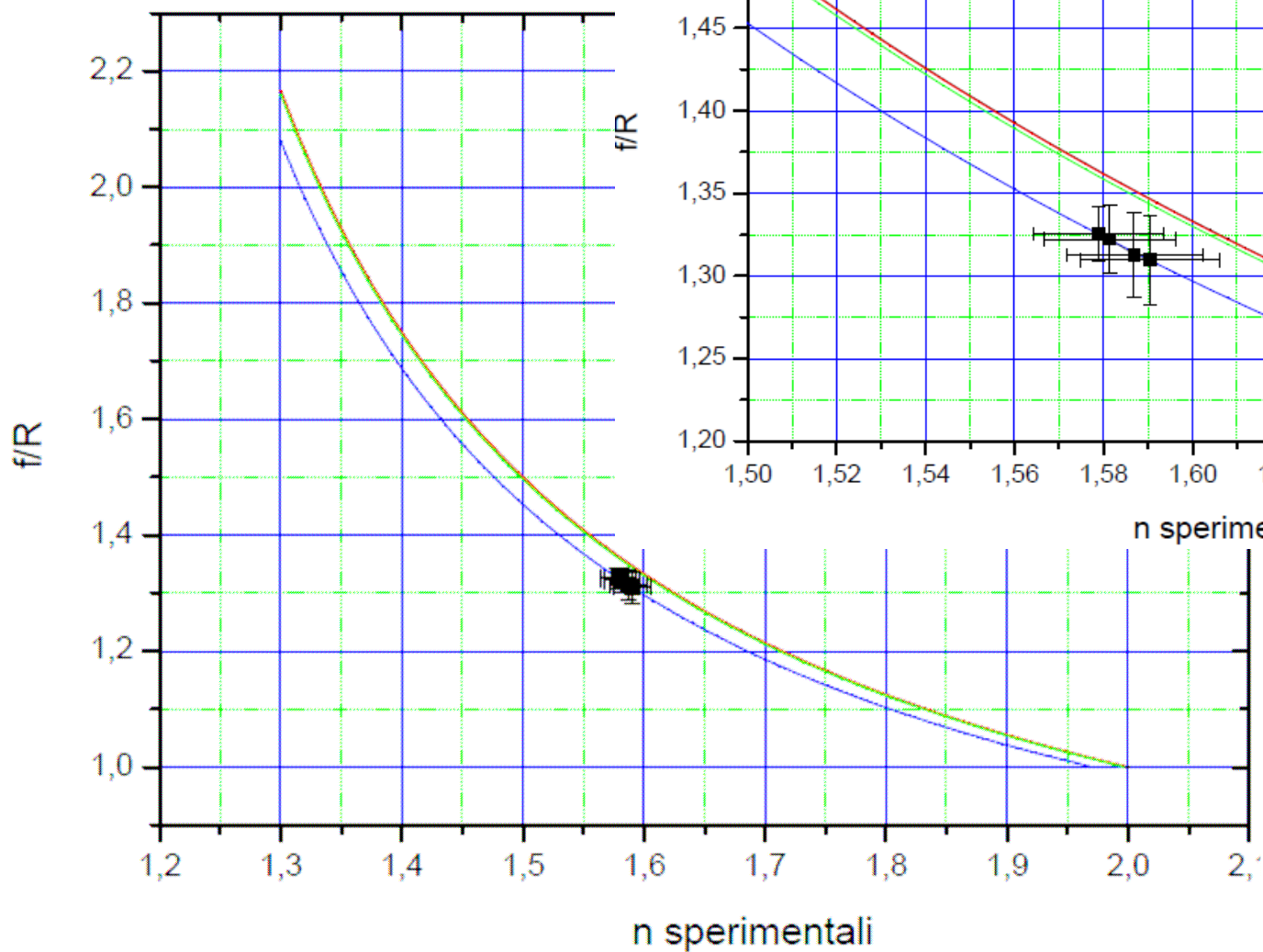


- Acrilico

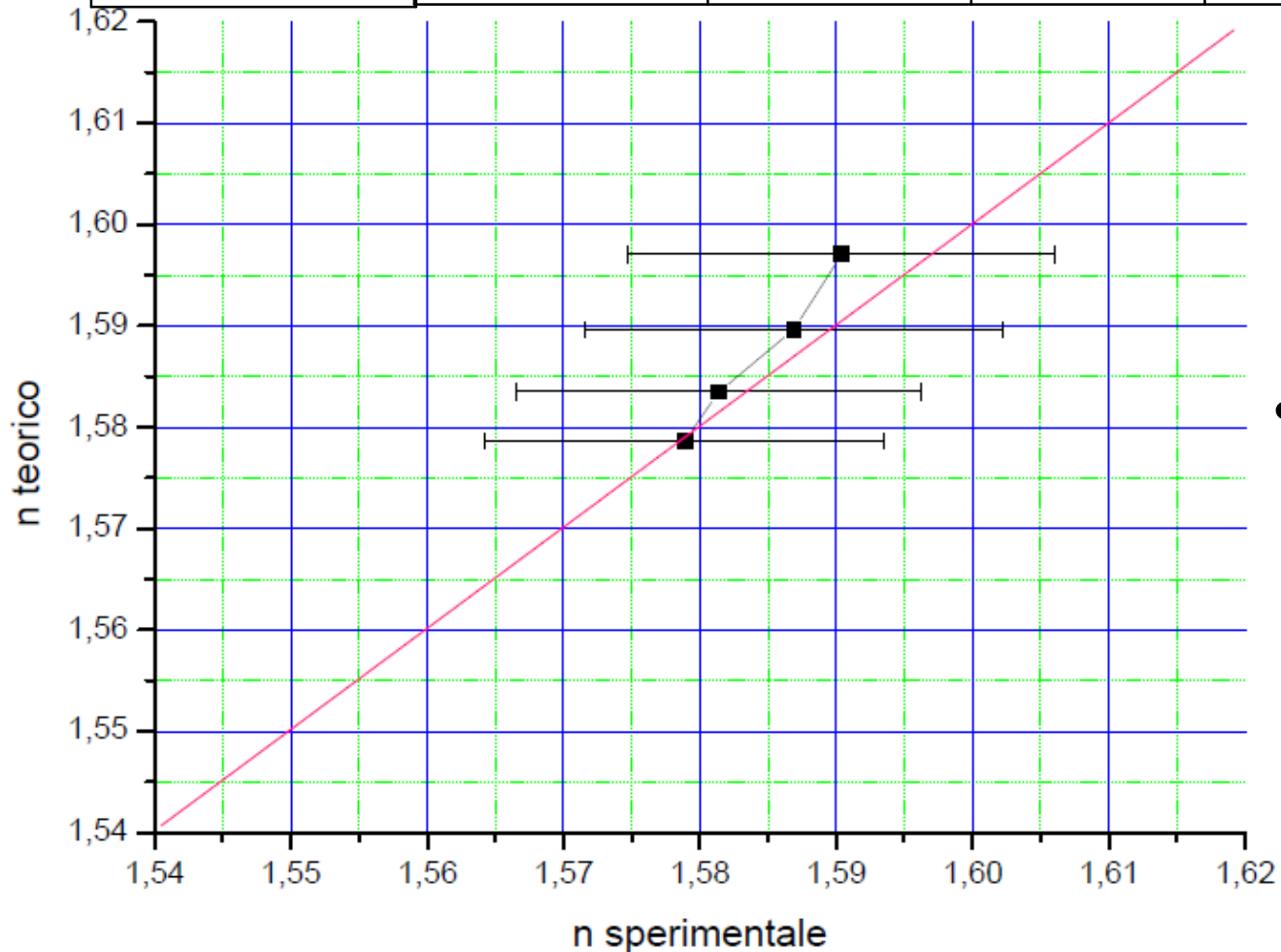


# SFERE SOLIDE:

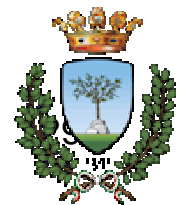
- Policarbonato



n teorico polycarbonato	n sperimentale polycarbonato	$\Delta n$ sperimentale polycarbonato	$\frac{f}{R}$	$\Delta\left(\frac{f}{R}\right)$	Lunghezza d'onda (nm)
1,59703	1,5904	0,0157	1,3096	0,0271	500
1,58962	1,5869	0,0153	1,3128	0,0259	550
1,5835	1,5814	0,0148	1,3223	0,0204	600
1,57869	1,5789	0,0146	1,3254	0,0164	650

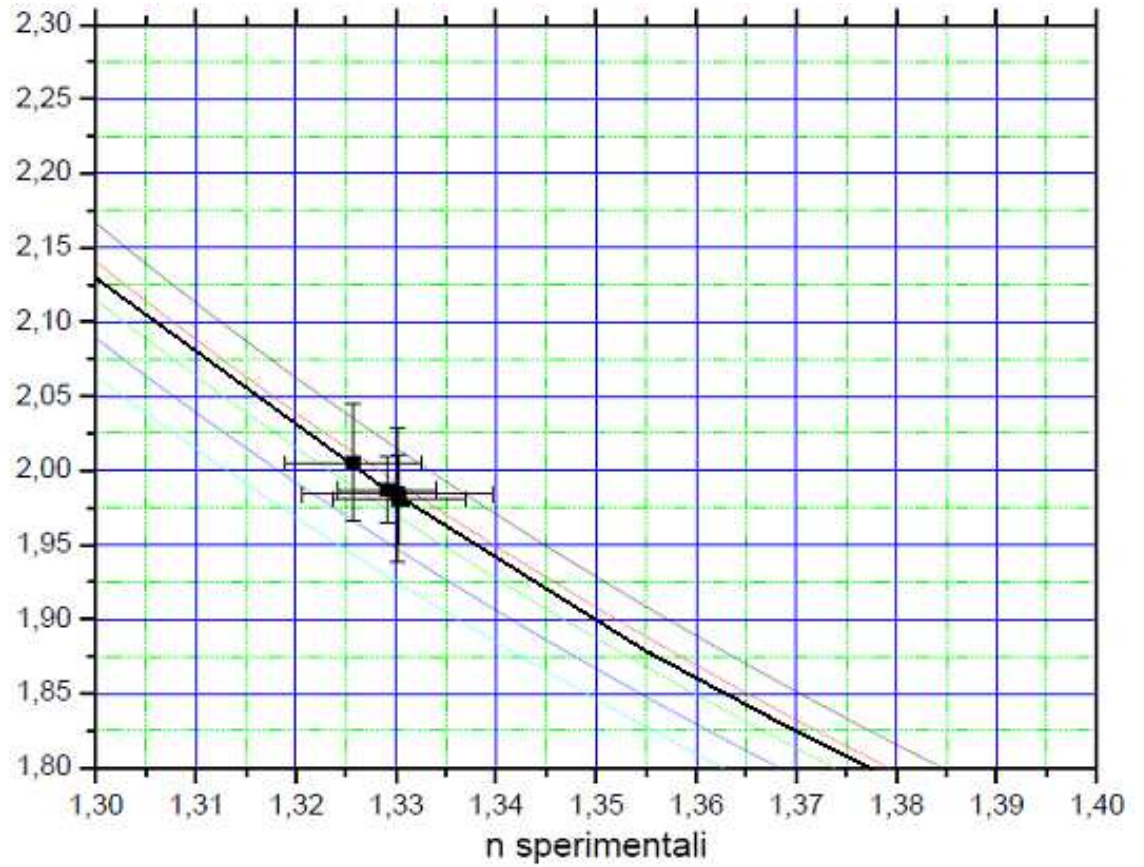
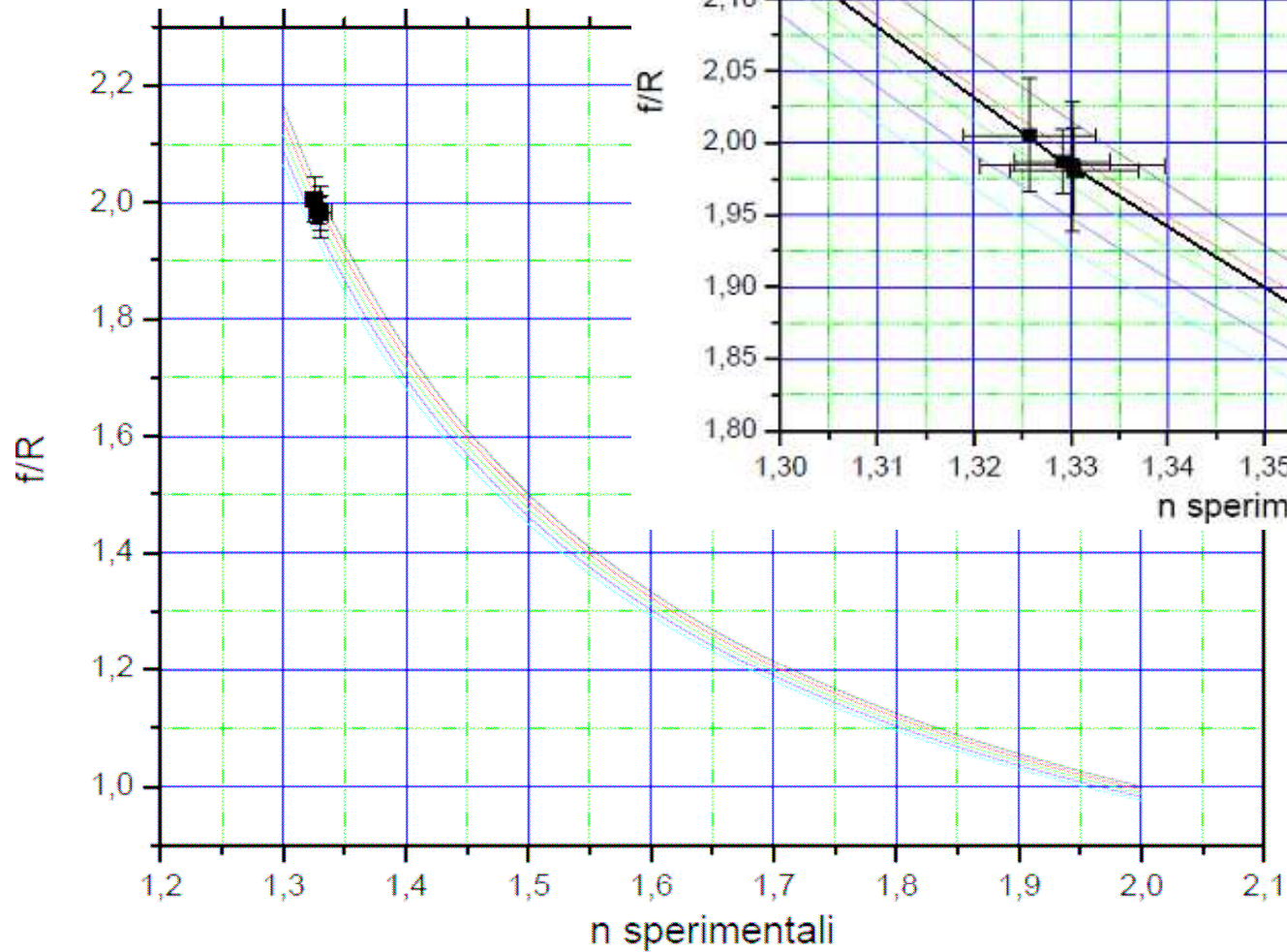


- Polycarbonato

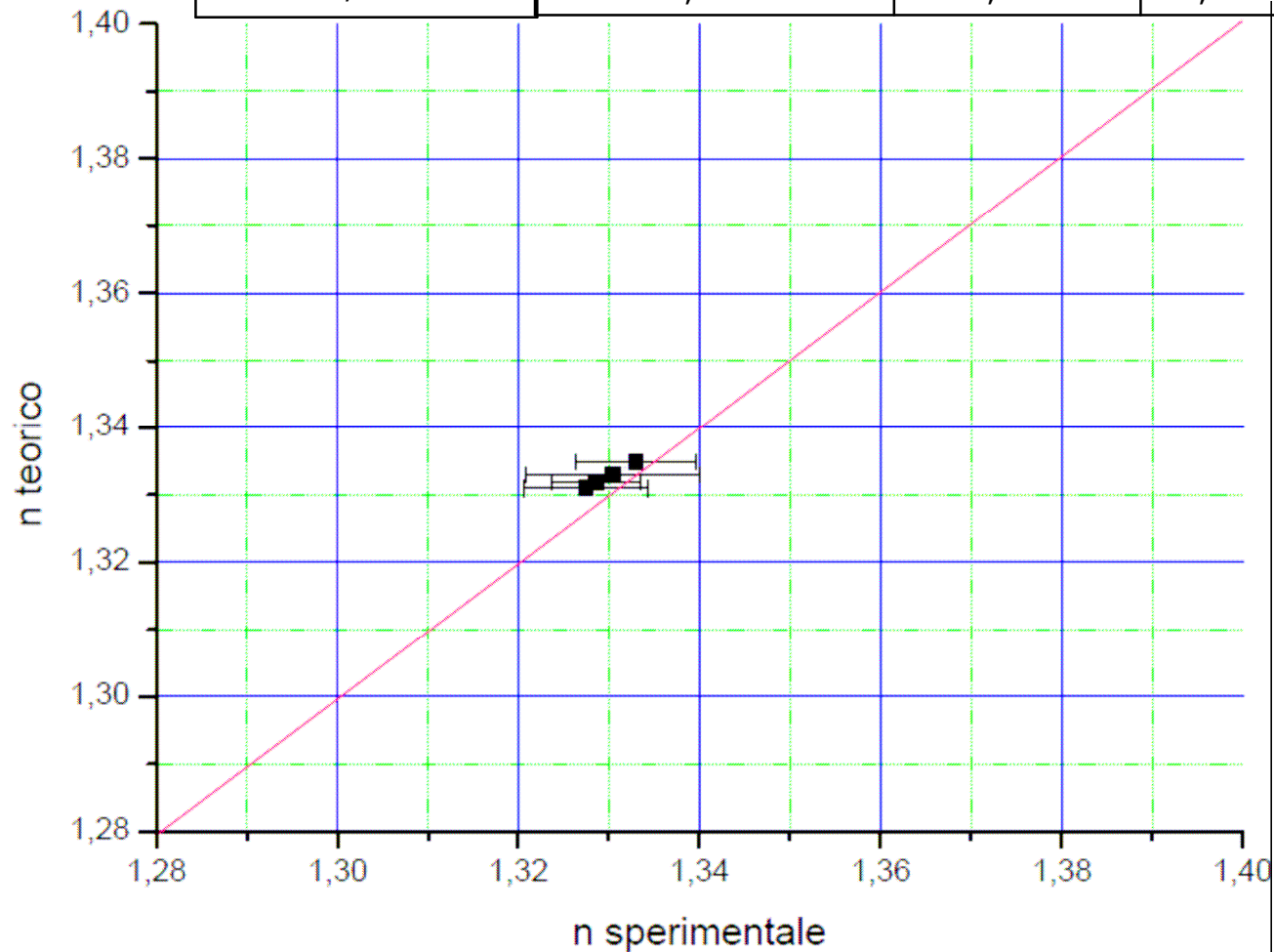


# SFERE CON LIQUIDO:

- Acqua distillata



n teorico acqua distillata	n sperimentale acqua distillata	$\Delta n$ sperimentale	$\frac{f}{R}$	$\Delta\left(\frac{f}{R}\right)$	Lunghezza d'onda (nm)
1,335	1,3303	0,0066	1,9809	0,0303	500
1,333	1,3301	0,0096	1,9840	0,0453	550
1,332	1,3291	0,0049	1,9870	0,0223	600
1,331	1,3257	0,0068	2,0053	0,0398	650

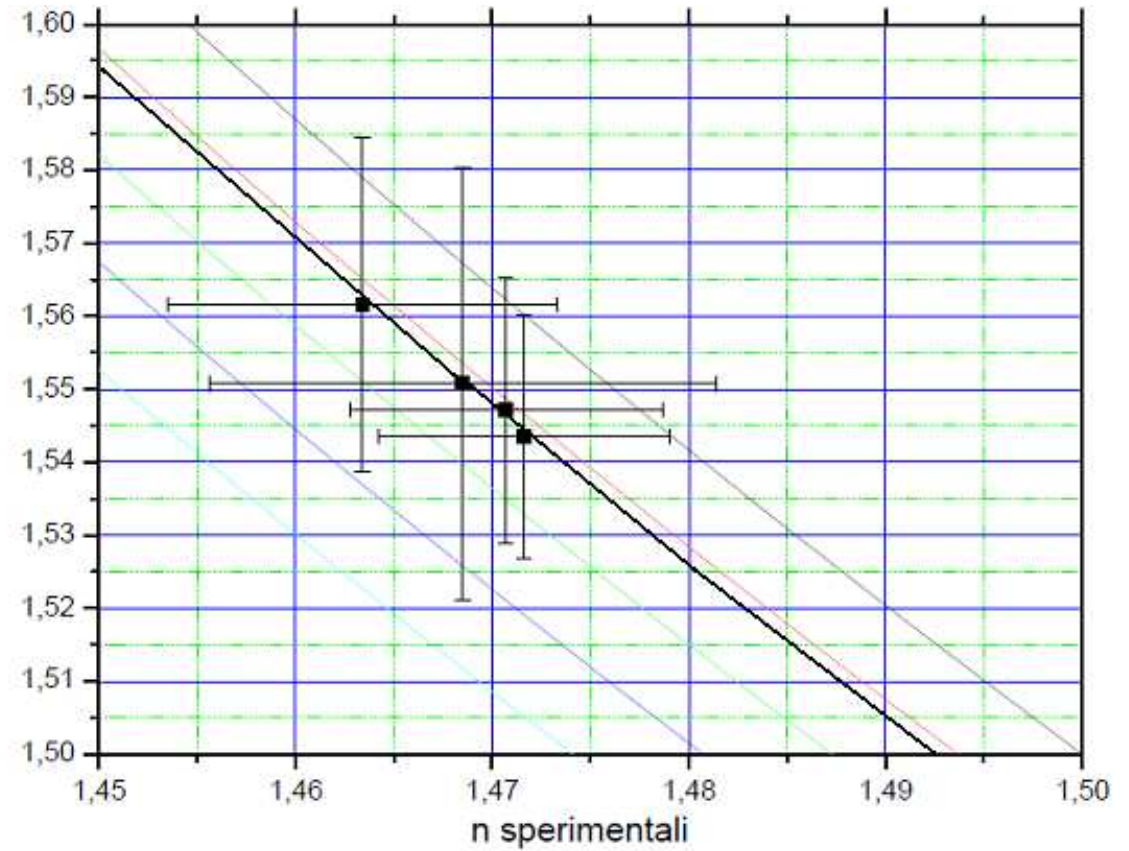
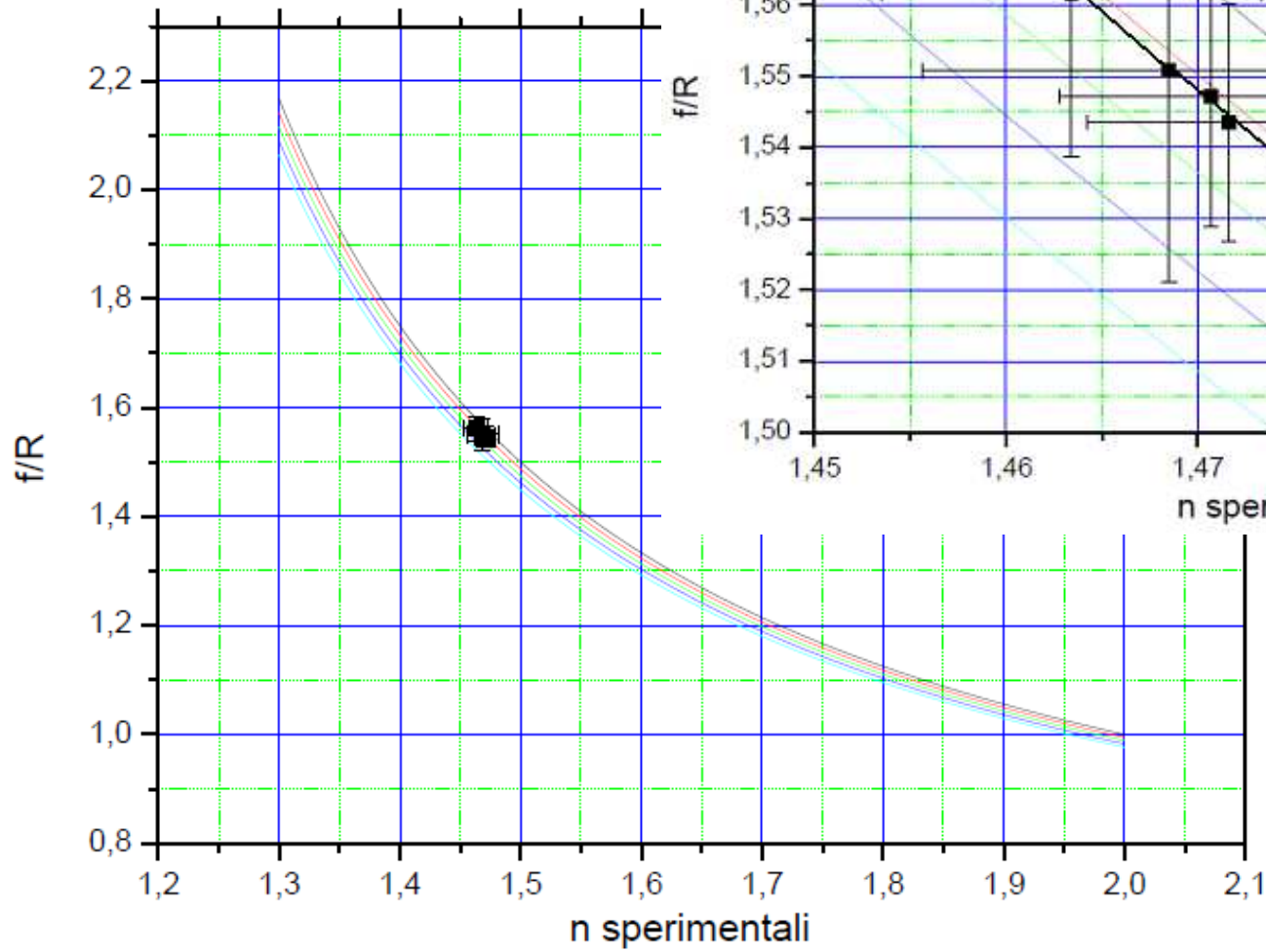


- Acqua distillata



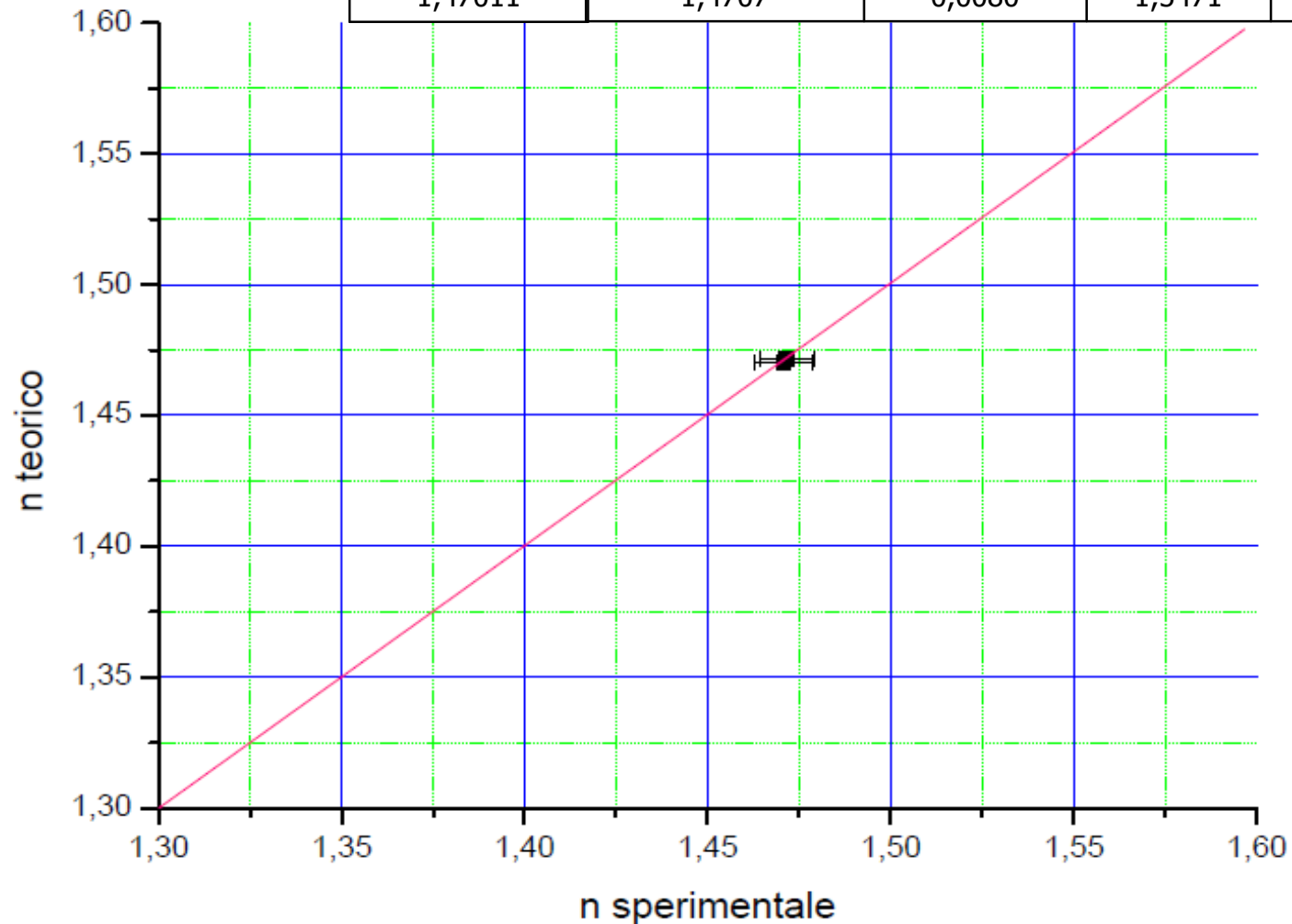
# SFERE CON LIQUIDO:

- Glicerina





n teorico glicerina	n sperimentale glicerina	$\Delta n$ sperimentale	$\frac{f}{R}$	$\Delta\left(\frac{f}{R}\right)$	Lunghezza d'onda (nm)
Sconosciuto	1,4634	0,0099	1,5616	0,0228	500
Sconosciuto	1,4685	0,0129	1,5507	0,0296	550
1,4718	1,4716	0,0074	1,5435	0,0168	600
1,47011	1,4707	0,0080	1,5471	0,0182	650



- Glicerina



# Conclusioni

- Il metodo di misura proposto è valido in quanto fornisce valori di indice di rifrazione concordi con quelli teorici tabulati.
- Lo strumento è in grado di misurare “n” per la maggior parte dei liquidi e solidi dielettrici con  $n < 2$ .
- La strumentazione è relativamente semplice.
- La modalità di raccolta dati è laboriosa, ma fornisce risultati molto accurati.
- Il metodo è più adatto per misure su liquidi.
- Il rifrattometro è uno strumento da banco ottico, poco pratico per una utilizzazione di routine, ma utile per la didattica. Esso va migliorato (parallelismo fascio, uso di recipienti omogenei, allineamento dei vari componenti, programma automatico per l'analisi delle immagini).



# GRAZIE PER L'ATTENZIONE

*Unifestival. Dal 25 al 27 settembre l'Università di Ferrara scende in piazza*



**Riferimento:**

***L. Polastri: “Misura dell'indice di rifrazione di materiali solidi o liquidi col metodo della sfera dielettrica”.***

***Tesi di Laurea in Fisica, A.A. 2009-10, Università di Ferrara.***

