

Unités, ordres de grandeur

Taille du noyau $\sim 10^{-15}$ m: beaucoup plus petit que l'atome ($\sim \text{Å} = 10^{-10}$ m)
densités très différentes

- Unité de **longueur**: 1 fm (Fermi) = 10^{-15} m
- énergie**: 1 MeV = 10^6 eV = 1.602×10^{-13} J

Autres grandeurs obtenues par multiplication par une puissance de $c = 3 \times 10^8$ m/s

- **Masse** $m \rightarrow mc^2$ (énergie)
- **Impulsion** $p \rightarrow pc$ (énergie)
- **Temps** $t \rightarrow tc$ (longueur)

Constantes physiques

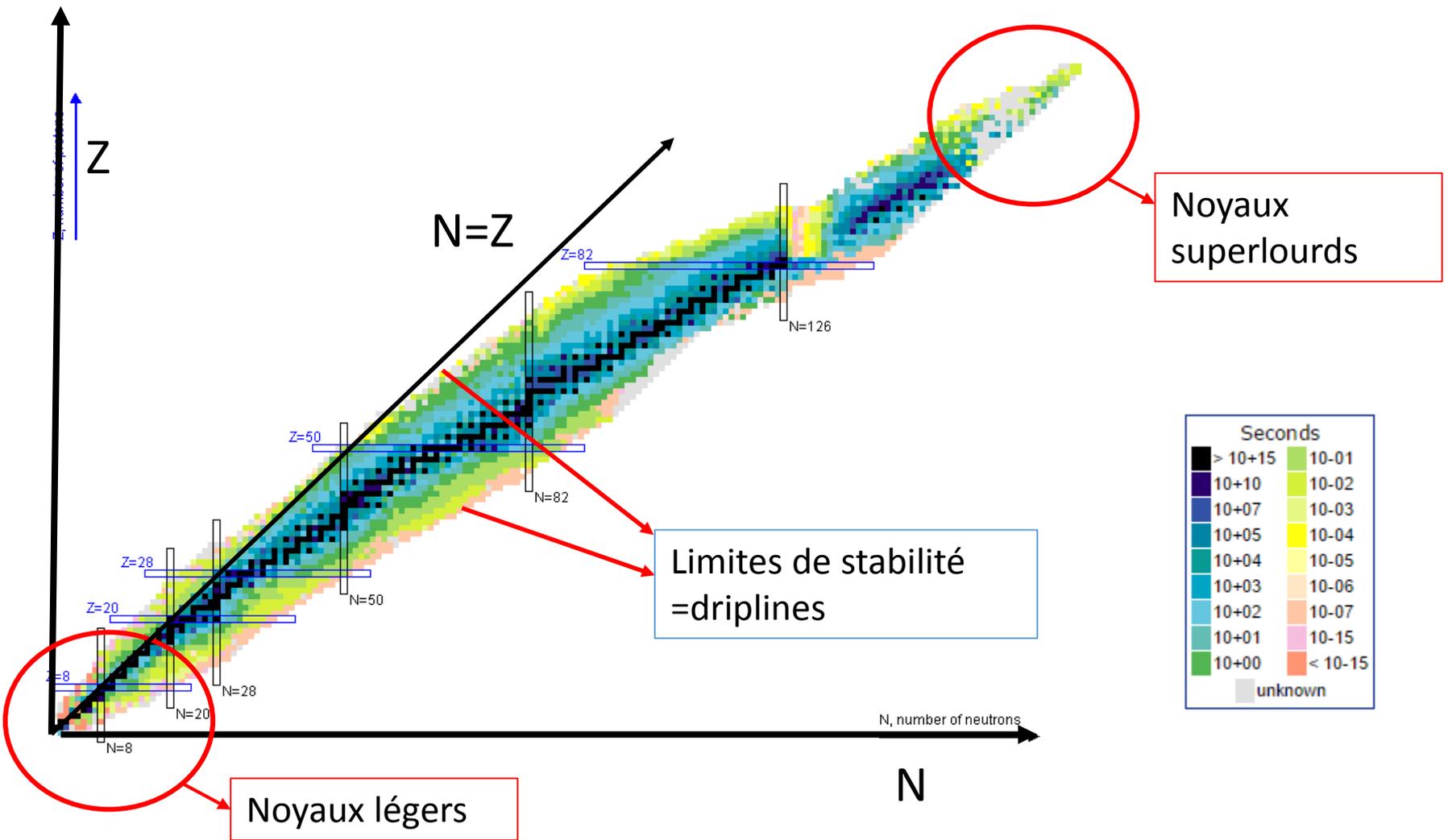
- Constante de Planck: $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J.s $\rightarrow \hbar c = 197.33$ MeV.fm
- Masse du proton: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg $\rightarrow m_p c^2 = 938.27$ MeV
- Masse du neutron: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg $\rightarrow m_n c^2 = 939.57$ MeV
- Masse de l'électron: $m_e = 9.1094 \times 10^{-31}$ kg $\rightarrow m_e c^2 = 0.511$ MeV
- Charge de l'électron: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha \hbar c = 1.44$ MeV.fm (structure fine $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$)

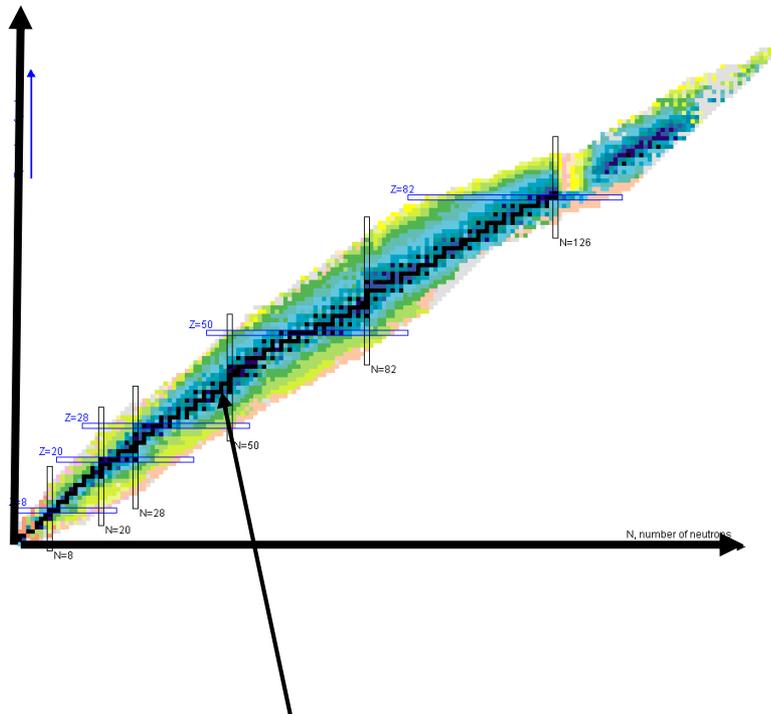
On déduit

- **Masse du nucléon**: $m_N \approx (m_p + m_n) / 2 \approx 938.9$ MeV
- $\hbar^2 / 2m_N \approx 20.9$ MeV.fm²

Durées de vie des noyaux

<http://www.nndc.bnl.gov/chart/>





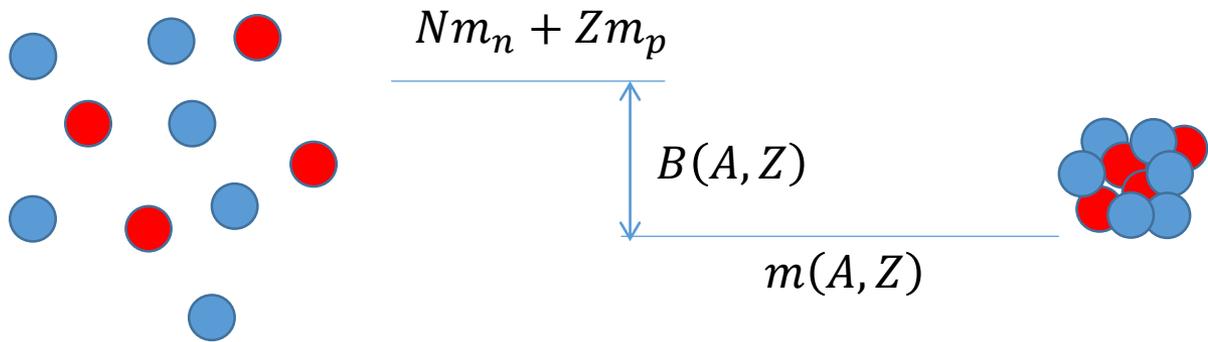
± 3000 noyaux connus
 ± 500 stables ou de longue durée de vie

Propriétés de chaque noyau:

- **Masse $m(A, Z)$**
 - Energie de liaison $B(A, Z) = [Nm_n + Zm_p - m(A, Z)]c^2$
 - Energies de séparation (1 neutron, 1 proton, 1 alpha, etc)
- **Spin J , parité π** (état fondamental): entier pour A pair, demi-entier pour A impair
- **Rayon carré moyen**: mesure la dimension du noyau
- **Moment quadrupolaire**: mesure la déformation
- Etc.

Energie de liaison

- Masse d'un noyau $m(A, Z) \approx Nm_n + Zm_p \approx A \times 1000 \text{ MeV} \rightarrow$ très grand
 \rightarrow énergie de liaison: $B(A, Z) = [Nm_n + Zm_p - m(A, Z)]c^2$
- $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$, $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$
- $B > 0$ pour tous les noyaux connus: pas de désintégration en N neutrons et Z protons

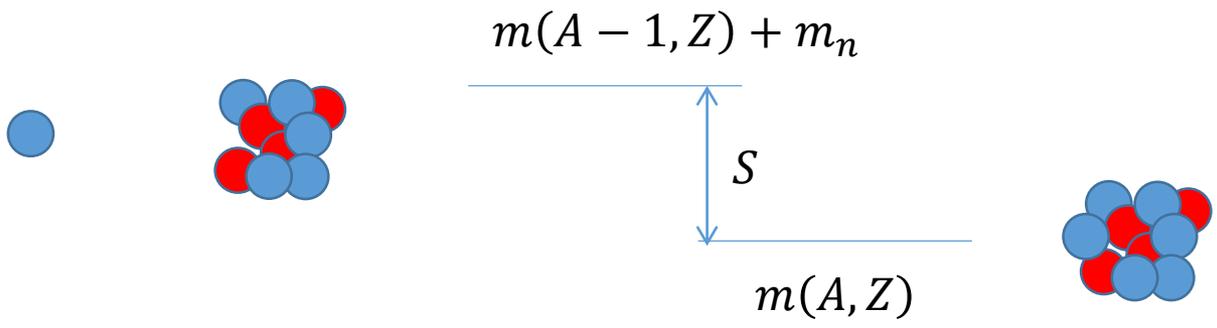


nucléons à l'infini:
masse du système = $Nm_n + Zm_p$

nucléons dans le noyau: plus stable
masse du système = $m(A, Z)$

énergie de liaison $B(A, Z) =$ différence entre les 2 situations

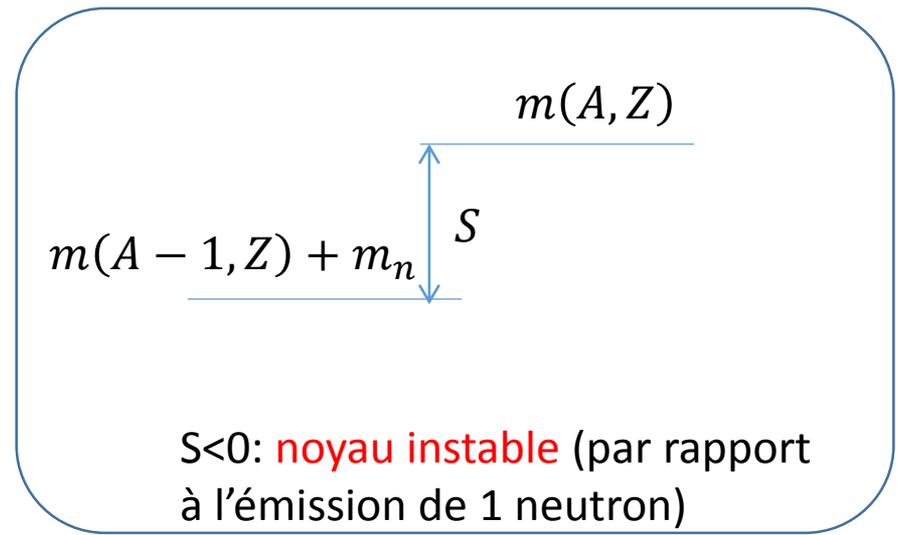
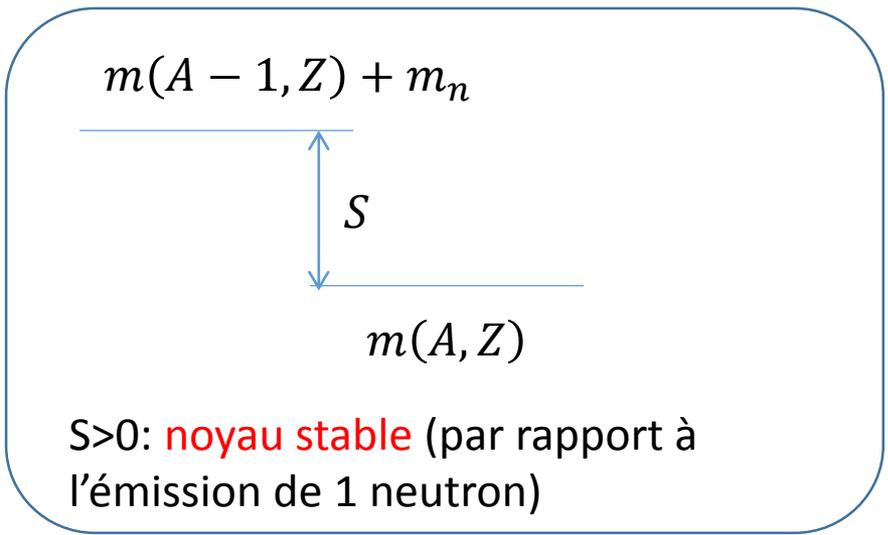
Energie de séparation (neutrons): $S_n = [m(A - 1, Z) + m_n] - m(A, Z)$



Un neutron à l'infini:
 masse du système = $m(A - 1, Z) + m_n$

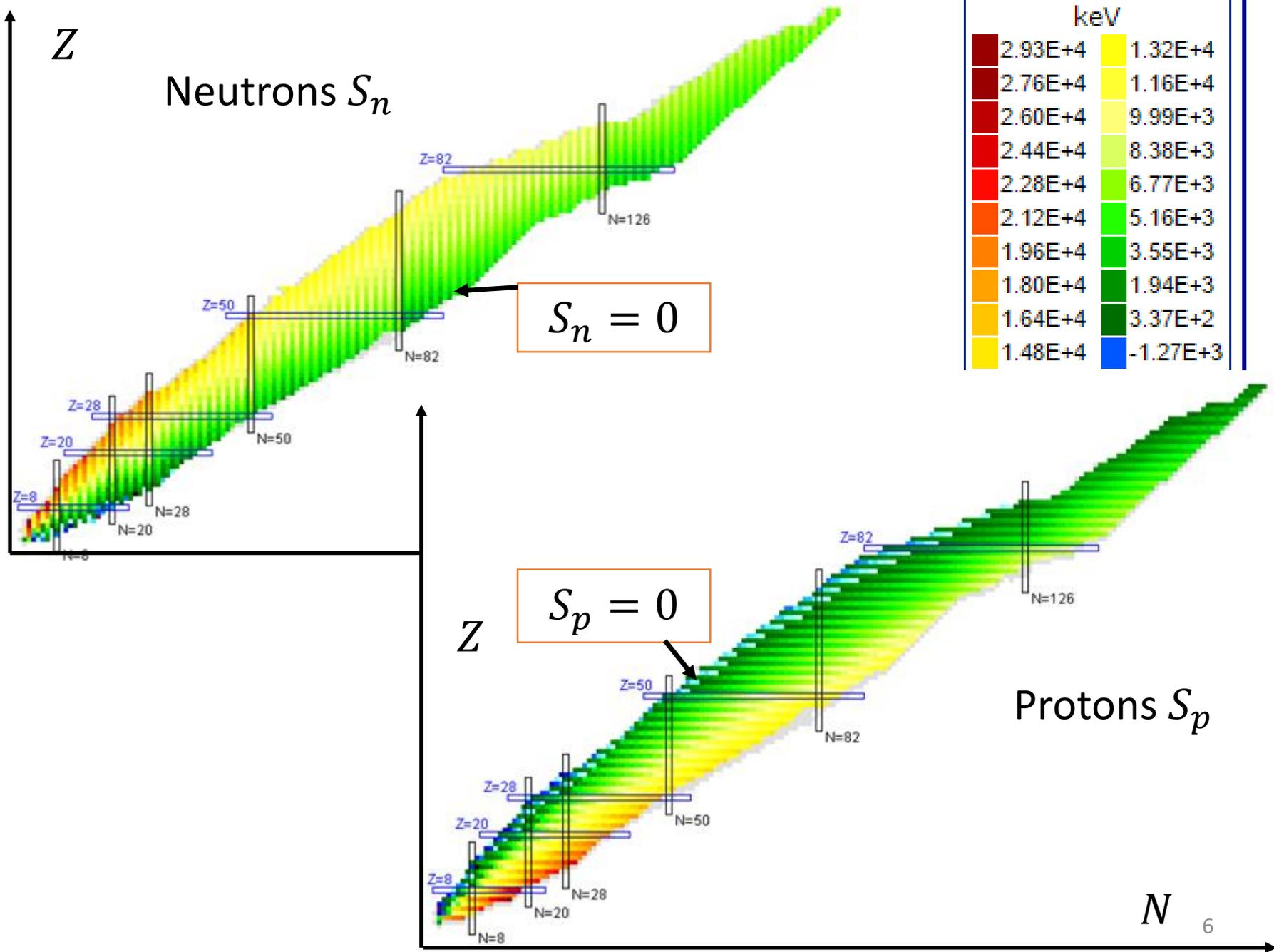
nucléons dans le noyau: plus stable
 masse du système = $m(A, Z)$

2 cas possibles:



Idem pour les protons

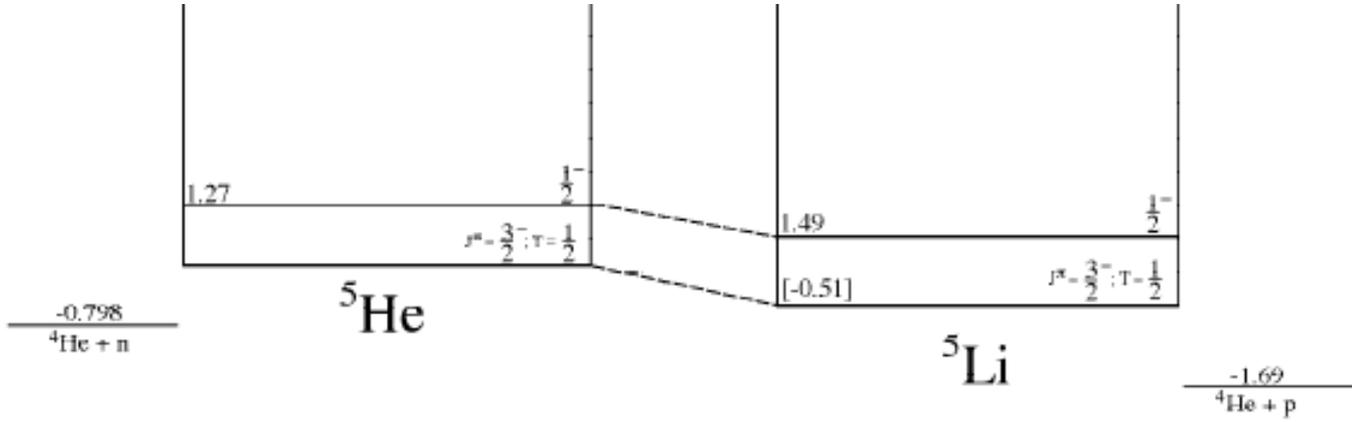
$S_n = 0, S_p = 0$ définissent les driplines



Stabilité des noyaux

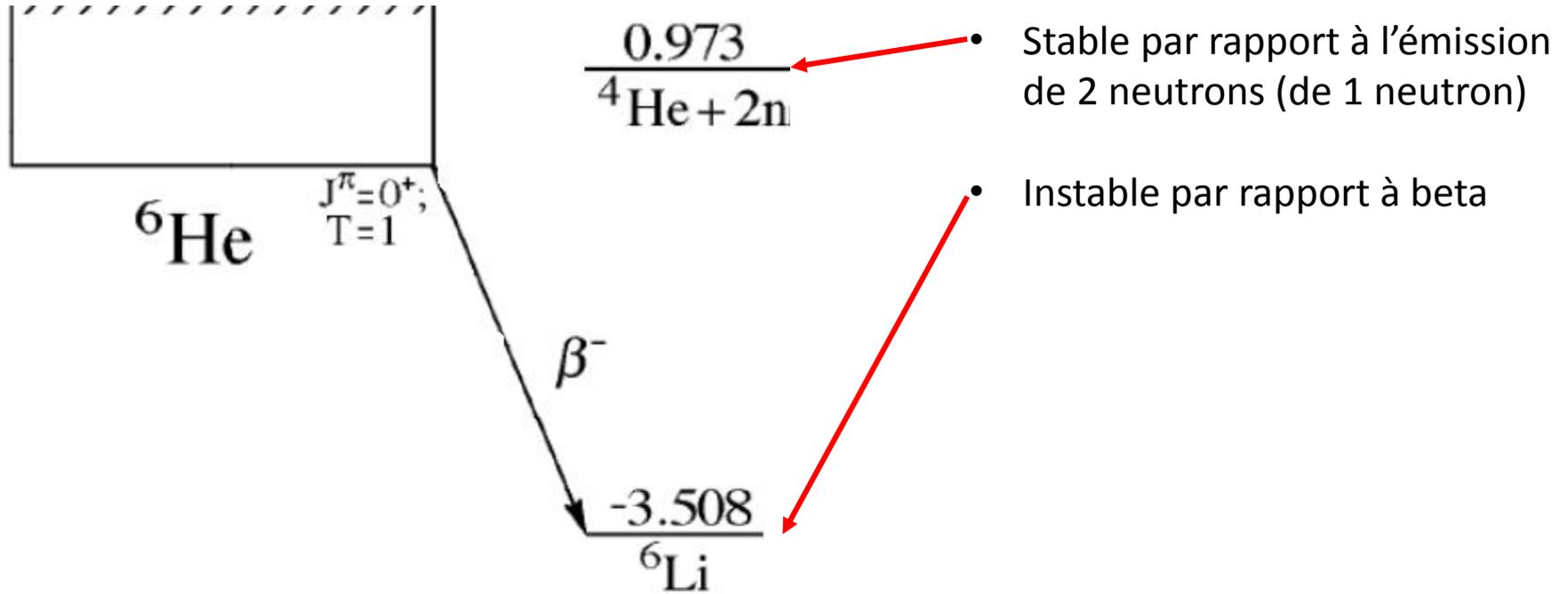
- Instabilité **en particules**:
 - A change: émission d'un neutron, d'un proton, d'un alpha, etc.
 - Durées de vie en général très courtes ($\sim 10^{-21} s$)
- Instabilité **par émission β** :
 - A constant (N et Z changent)
 - Durées de vie variables (de $10^{-6} s$ à 10^{15} ans)

Exemple 1: A=5, instables en particules

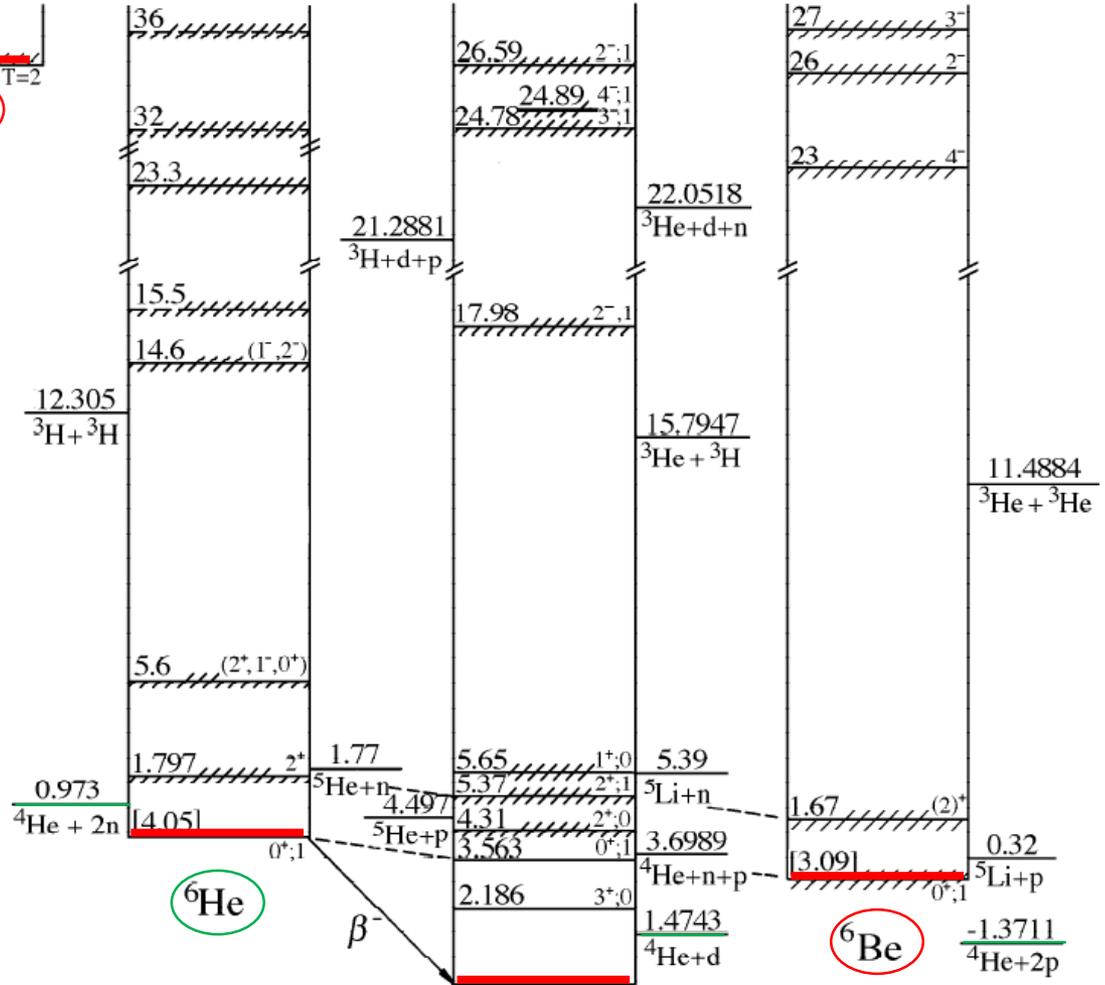
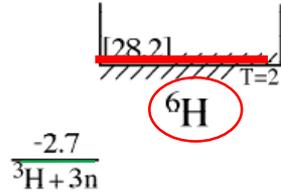
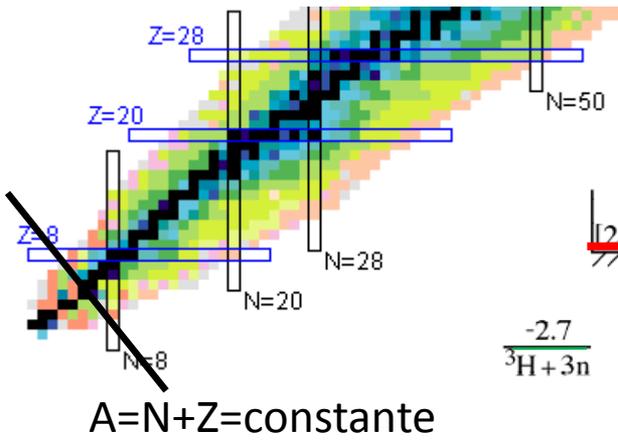


- Noyaux A=5: ${}^5\text{He}$ et ${}^5\text{Li}$ (pas de noyaux stables pour A=5)
 - ${}^5\text{He} \rightarrow \alpha + n$
 - ${}^5\text{Li} \rightarrow \alpha + p$
- Durée de vie $\sim 10^{-20} s \rightarrow$ n'existent pas, impossibles à fabriquer!

Exemple 2: ${}^6\text{He}$: instable par émission beta
Durée de vie: 0.8 sec.



$A = 6$



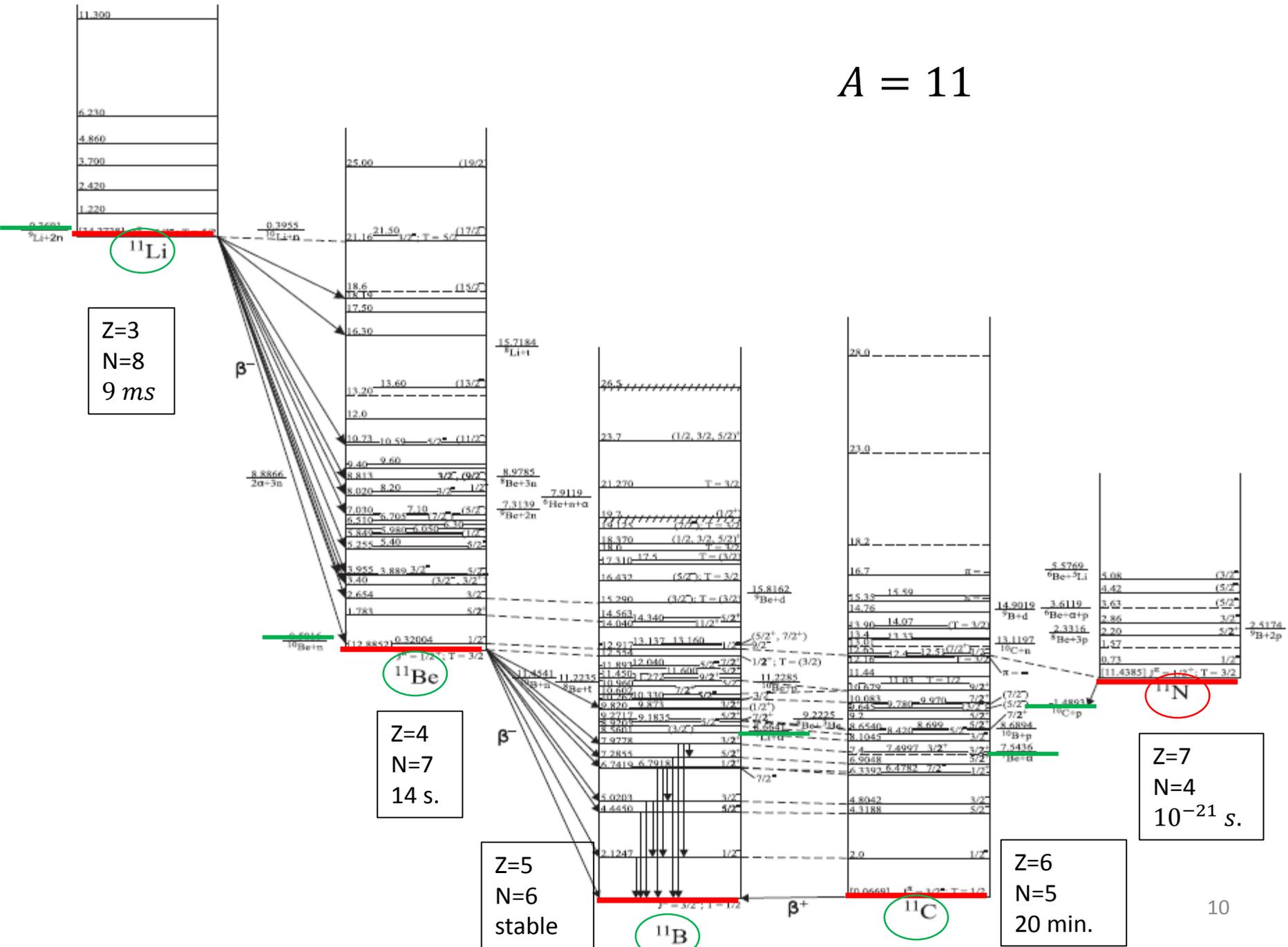
Z=1
N=5

Z=2
N=4

Z=3
N=3

Z=4
N=2

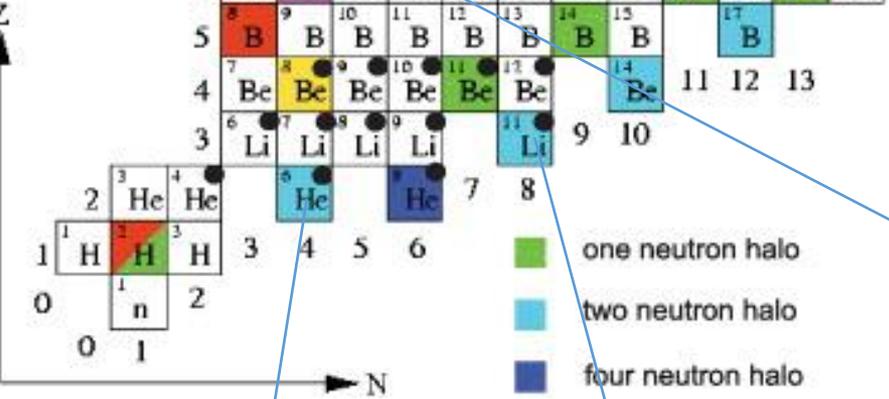
A = 11



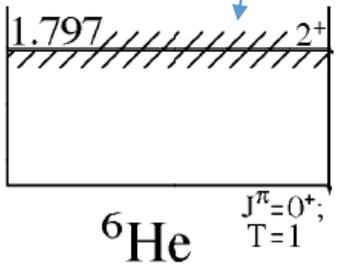
Noyaux exotiques

- one proton halo
- two proton halo
- TITAN
- + ISOLTRAP

Z

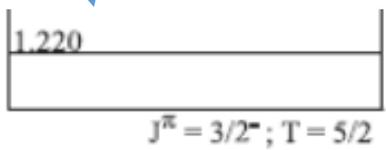


- one neutron halo
- two neutron halo
- four neutron halo



${}^6\text{He}$ $J^\pi=0^+$; $T=1$

$\frac{0.973}{{}^4\text{He}+2n}$

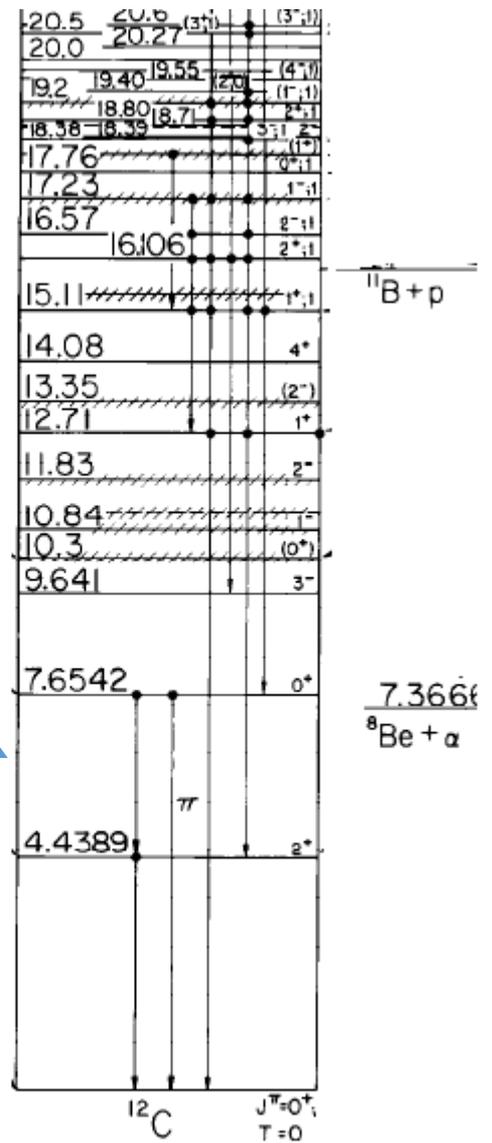


${}^{11}\text{Li}$

$\frac{0.3691}{{}^9\text{Li}+2n}$

${}^6\text{He}, {}^{11}\text{Li}$: exotiques
 S_{2n} petit

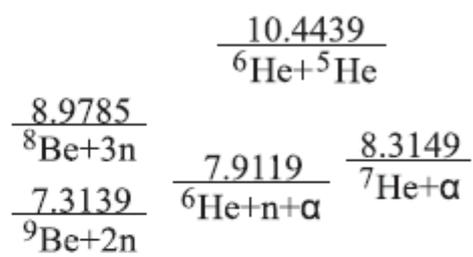
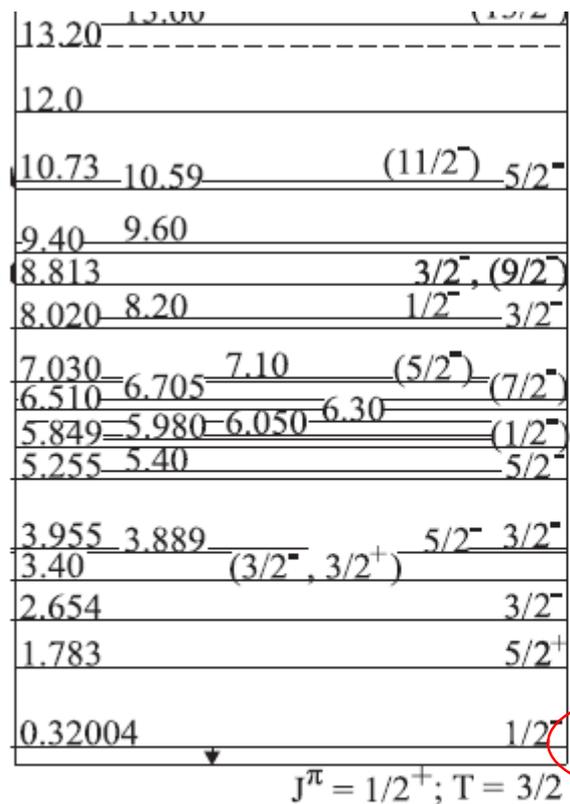
$\frac{18.722}{{}^{11}\text{C}+n}$



${}^{12}\text{C}$: non exotique
 S_n, S_p grands

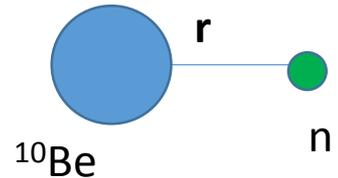
Structure des noyaux exotiques

- importance des seuils
- Structure donnée par le seuil le plus bas

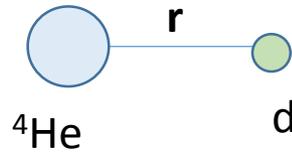
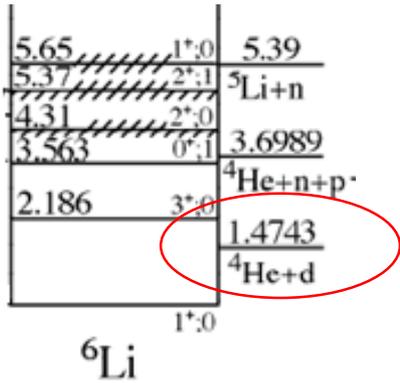


0.5016
 ${}^{10}\text{Be} + n$

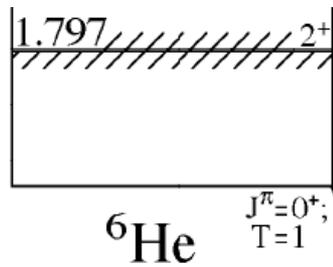
${}^{11}\text{Be}$ décrit par un modèle ${}^{10}\text{Be} + n$
(approximation)



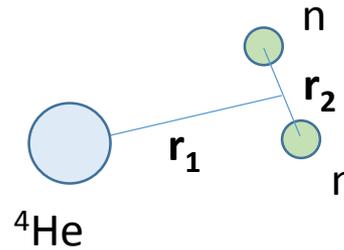
${}^{11}\text{Be}$



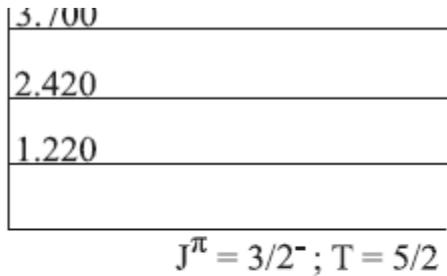
Modèle à 2 (ou 3) centres



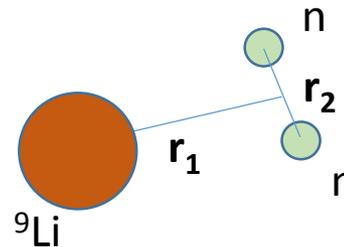
$$\frac{0.973}{^4\text{He} + 2n}$$



Modèle à 3 centres



$$\frac{0.3691}{^9\text{Li} + 2n}$$

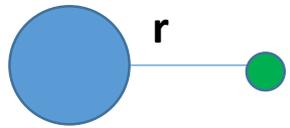


Modèle à 3 centres

¹¹Li

Principale propriété des noyaux exotiques: grand rayon

Modèle simplifié: noyau à 2 centres $H = T_r + V(r)$

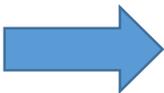
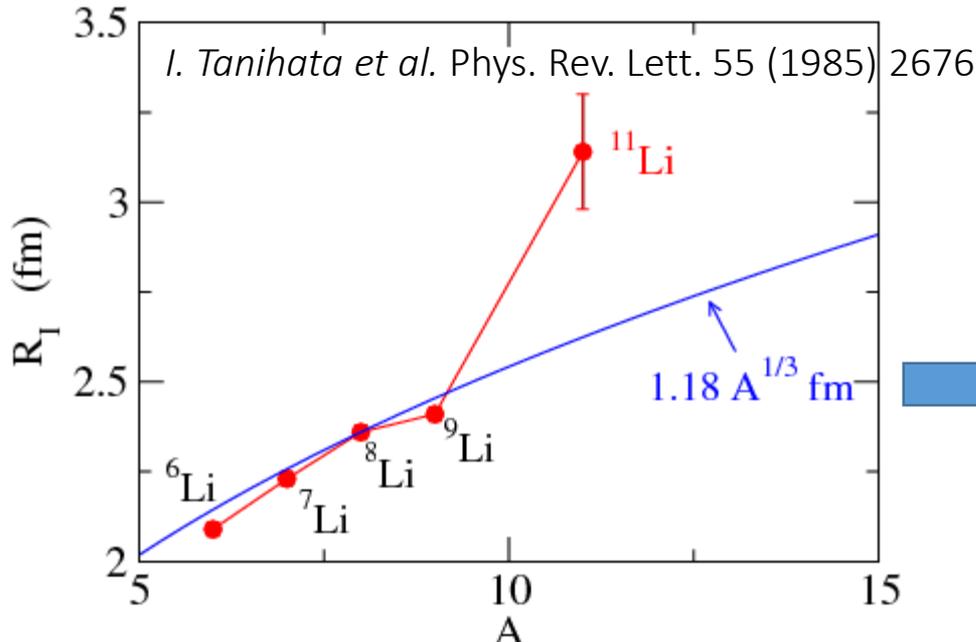


A grande distance: $V(r) \rightarrow 0,$

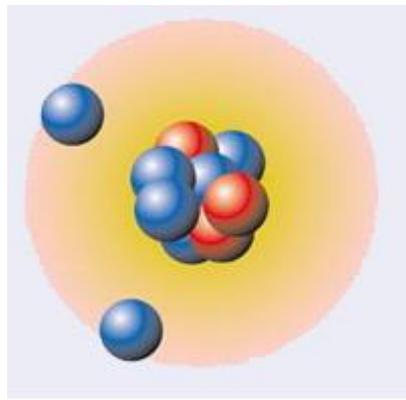
$$\psi(r) \rightarrow \exp(-k_B r), \text{ avec } k_B = \sqrt{-2E_B \mu / \hbar^2}$$

Approximation: $\psi(r) \approx A \exp(-k_B r)$

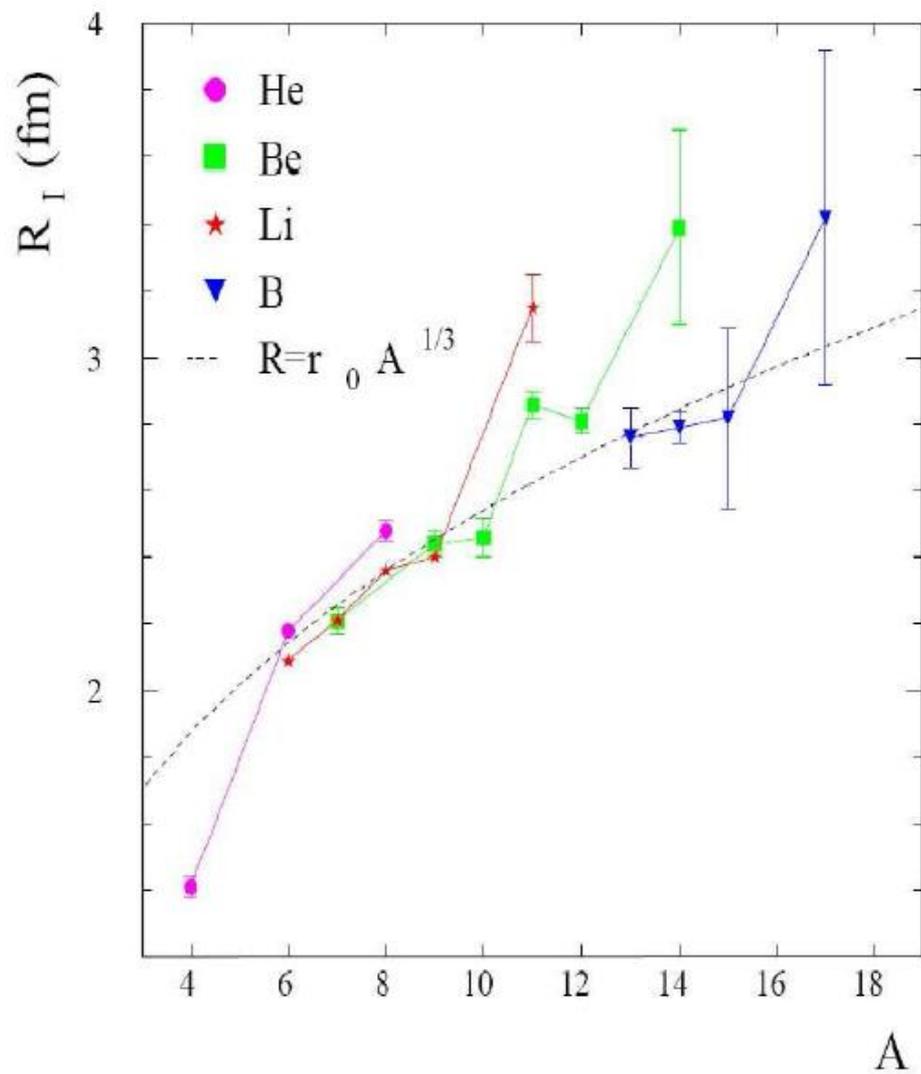
Rayon: $\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 \psi(r)^2 dr}{\int \psi(r)^2 dr} \sim \frac{1}{k_B^2} \rightarrow$ le rayon augmente quand k_B diminue



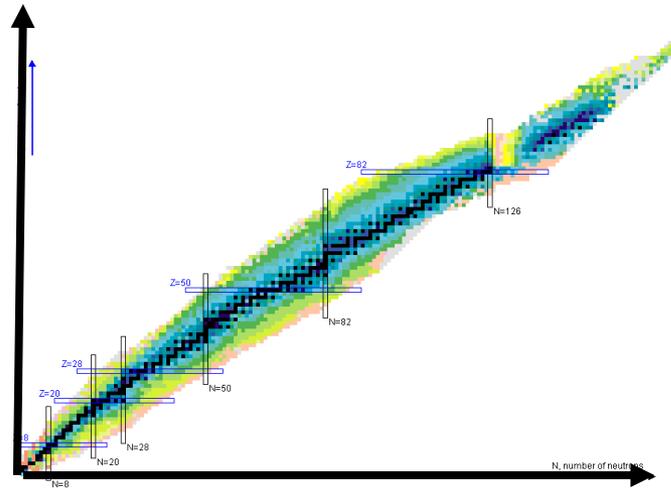
Interprétation d'une structure en halo



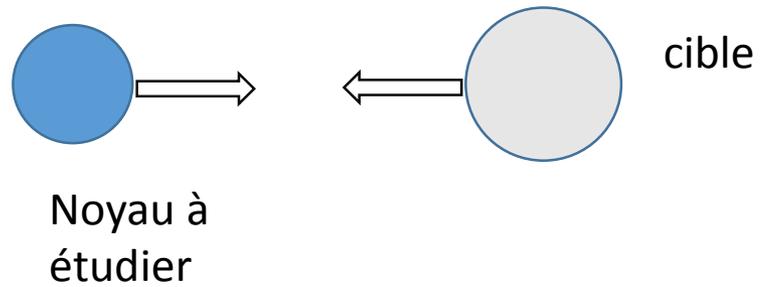
Rayons de He, Li, Be, B



Modèles (spectroscopie)



Modèles (réactions)



Modèles de spectroscopie

Equation de Schrödinger: $H\Psi = E\Psi$

Fonction d'onde Ψ

- Dépend de toutes les coordonnées des nucléons
- Antisymétrique: $P_{ij}\Psi(1,2, \dots i, \dots j, \dots A) = -\Psi(1,2, \dots j, \dots i, \dots A)$

Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{j>i=1}^A V_{ij} + \sum_{k>j>i} V_{ijk} + \dots$$

avec

T_i = énergie cinétique du nucléon i

V_{ij} = interaction nucléon-nucléon = $V_{ij}^N + V_{ij}^C$

- Interaction coulombienne V_{ij}^C : longue portée $\sim e^2/r$
- Interaction nucléaire V_{ij}^N : pas connue exactement
attractive, de courte portée
différente pour 2 nucléons libres, et dans le noyau
dépend du spin $S = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = 0$ ou 1 , isospin $T=0$ ou 1

Principaux problèmes:

- Interaction nucléaire pas connue exactement
- Equation de Schrödinger très difficile (impossible) à résoudre pour $A > 4$

→ des modèles sont nécessaires

- Modèle en couches
- Modèle de potentiel
- Modèles microscopiques

Le modèle en couches

Le Hamiltonien « exact »

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i>j=1}^A V_{ij}$$

est remplacé par

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A U_i(r_i) + H_{res}$$

où H_{res} est un Hamiltonien « résiduel » supposé petit

→ H est à particules indépendantes.

→ chaque nucléon ressent un potentiel moyen généré par les autres nucléons

En négligeant H_{res} :

- $H = \sum_{i=1}^A H_i$
- $E = \sum_{i=1}^A E_i$
- $\Psi = \Phi_1 \dots \Phi_A$

→ Modèle à particules indépendantes

Approximation de l'oscillateur harmonique: solution analytique

Potentiel $U(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ = potentiel central (spin-orbite négligé)

Pour chaque nucléon:

- Energie: $E_{n_r, \ell} = \hbar\omega(2n_r + \ell + \frac{3}{2})$ ne dépend que de $n = 2n_r + \ell$
- Fonction d'onde:

$$\phi_{n_r, \ell, m}(r, \theta, \phi) = R_{n_r \ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

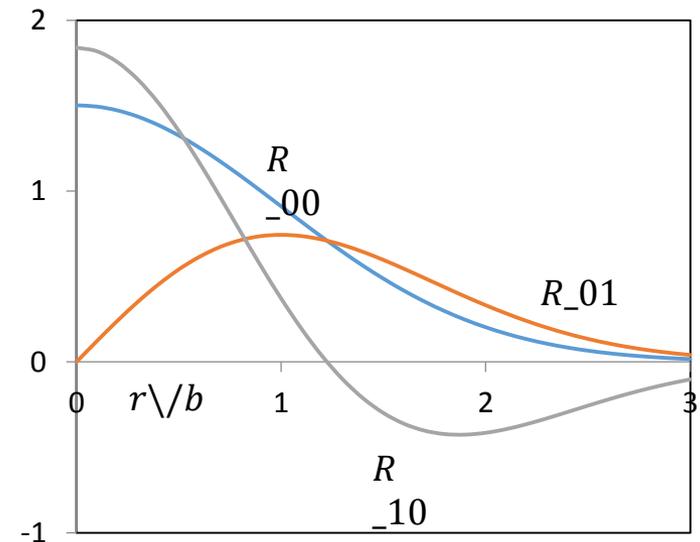
$$R_{n_r \ell}(r) = N_{n_r \ell} \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right) r^{\ell} {}_1F_1\left(-n_r, \ell + \frac{3}{2}, \frac{r^2}{b^2}\right)$$

Exemples:

$$R_{00}(r) = 2\pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)$$

$$R_{01}(r) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{-1/4} r \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)$$

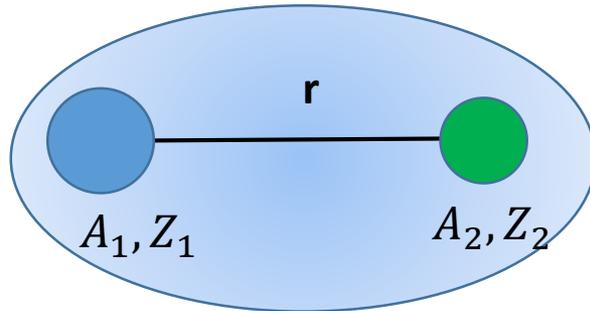
$$R_{10}(r) = \sqrt{6}\pi^{-1/4} \left(1 - \frac{2r^2}{3b^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)$$



Application aux noyaux exotiques

- Différences dans les nombres magiques
- Défaut du modèle en couches: orbitales gaussiennes
→ mal adapté aux noyaux peu liés

- On suppose le noyau formé de 2 amas (« clusters ») de nucléons
- On néglige la structure interne de ces amas



- Applicable aux noyaux légers
Bien adapté aux collisions noyau-noyau.
Peut être généralisé à 3 ou 4 particules
- Hamiltonien: $H = T_1 + T_2 + V(r_1 - r_2) = T_{cm} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + V(r)$
- Le potentiel $V(r)$ contient 2 termes: $V(r) = V_N(r) + V_C(r)$: nucléaire+ coulomb
- Exemples de potentiels nucléaires (contiennent des paramètres ajustables):
 - Gaussien : $V_N(r) = V_0 \exp(-(r/r_0)^2)$
 - Woods-Saxon: $V_N(r) = \frac{V_0}{1 + \exp((r-R)/a)}$

- Fonction d'onde factorisée: $\Psi^{\ell m}(\mathbf{r}) = R_{\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \frac{u_{\ell}(r)}{r}Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$
 - Partie radiale donnée par $-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)u_{\ell} + V(r)u_{\ell} = Eu_{\ell}$
 - Peut être résolue numériquement
 - Solution analytique pour quelques potentiels simples
 - puits carré (cf deuton)
 - oscillateur harmonique
 - Éléments de matrice: factorisation des parties angulaire (analytique) et radiale (numérique)
- Exemple: moment quadrupolaire

$$Q \sim \langle u_{\ell}Y_{\ell}^{\ell} | r^2 Y_2^0 | u_{\ell}Y_{\ell}^{\ell} \rangle = \langle Y_{\ell}^{\ell} | Y_2^0 | Y_{\ell}^{\ell} \rangle \times \int_0^{\infty} u_{\ell}(r)^2 r^2 dr$$

Extension aux modèles microscopiques

- Basés sur un hamiltonien à A corps: $H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i>j=1}^A V_{ij}$
- Equation de Schrödinger très difficile/impossible à résoudre

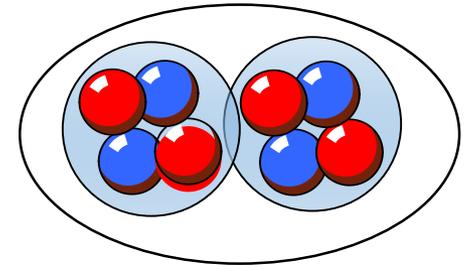
2 approches

1. Modèles en « amas » (=« clusters »)

On suppose que la fonction d'onde est $\Psi = \mathcal{A}\phi_1\phi_2g(\rho)$

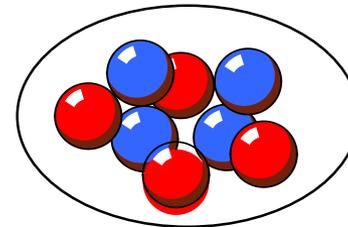
- ϕ_1, ϕ_2 = fonctions d'onde internes (**modèle en couches**)
- $g(\rho)$ = fonction relative (**output**)
- \mathcal{A} = opérateur d'antisymétrisation

=**Méthode du Groupe Résonant (RGM)**



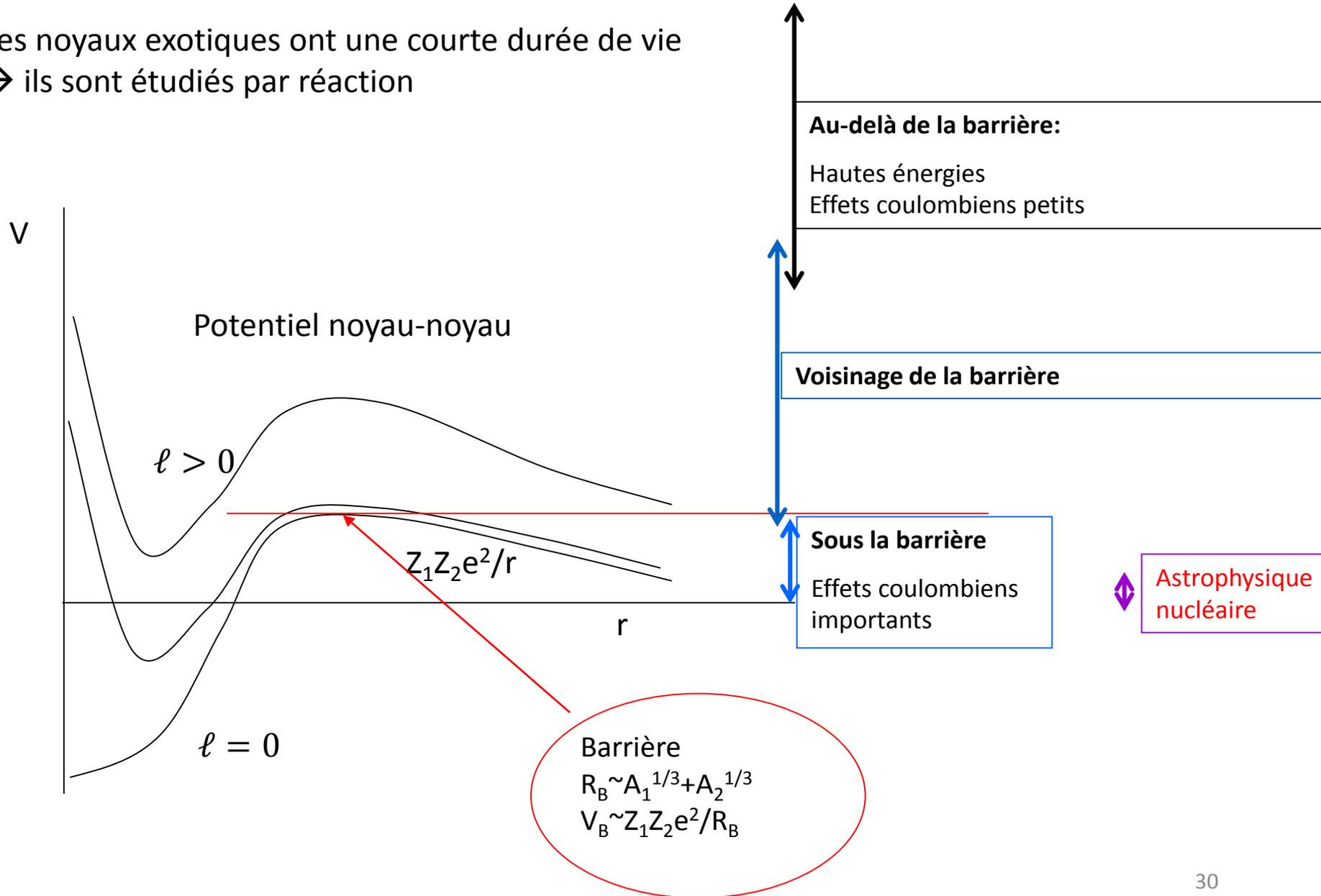
2. Modèles « ab initio »

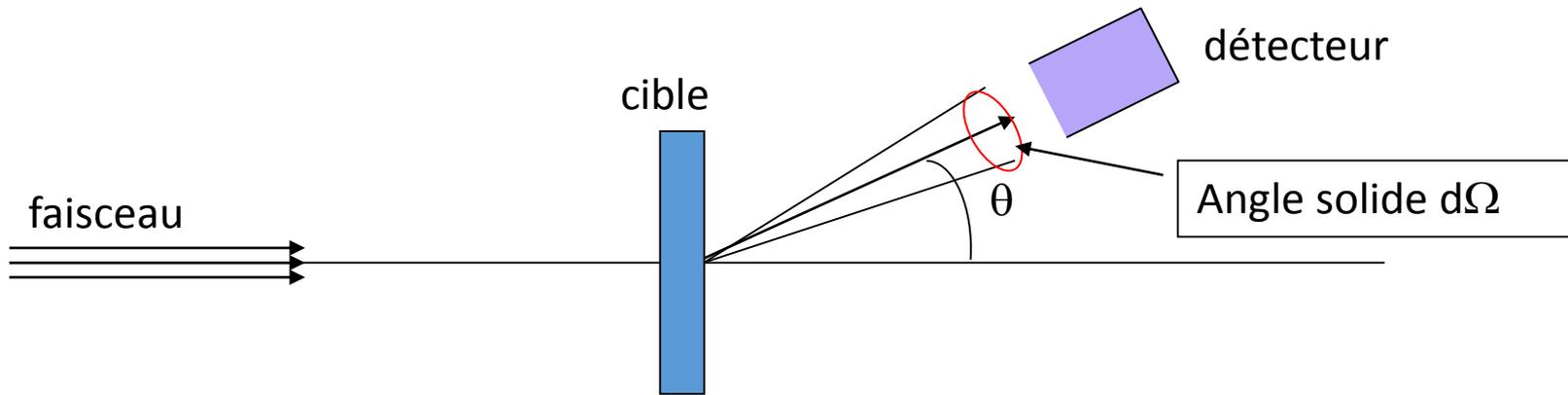
- Pas d'hypothèse sur la fonction d'onde
- Plus compliqués que les modèles en amas
- Limités aux noyaux $A \leq 12$



Modèles de réaction

Les noyaux exotiques ont une courte durée de vie
→ ils sont étudiés par réaction



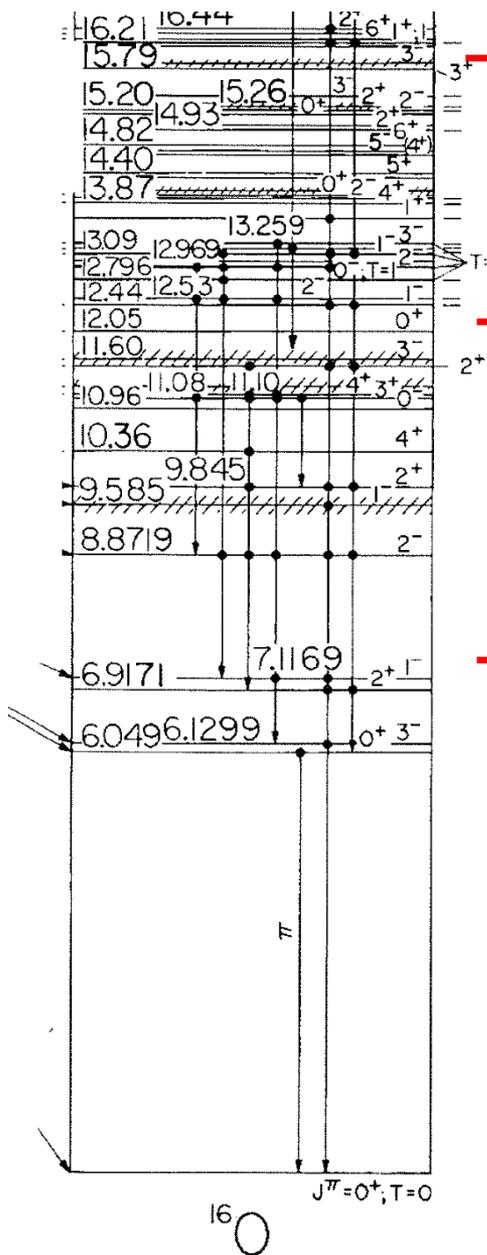


Types de réactions

- *Collision élastique*: $A + B \rightarrow A + B$, $Q=0$: toujours possible
- *Réaction inélastique*: $A + B \rightarrow A' + B$: le noyau A est excité, B reste dans son fondamental
 $A + B \rightarrow A + B'$: l'inverse
 Seuil $Q = -E_{x,A} - E_{x,B} < 0$: l'énergie de collision doit être au moins $|Q|$
- *Réaction de transfert*: $A + B \rightarrow C + D$: des nucléons sont échangés
 Seuil $Q < 0$ ou > 0 : spécifique à chaque réaction
- *Réaction de capture radiative*: $A + B \rightarrow C + \gamma$
 Seuil $Q > 0$: sinon, le noyau C est instable en particules
- *Réaction de dissociation (breakup)*: $A + B \rightarrow A + b + b'$: le noyau B se dissocie en $b + b'$

Grandeur fondamentale en théorie des réactions: section efficace $\frac{d\sigma}{d\theta}(E, \theta)$ (dimension L^2)
 unité: barn, mbarn ($1b=10^{-28} \text{ m}^2=10^{-24} \text{ cm}^2$)

Exemple: réactions impliquant 8 protons et 8 neutrons → noyau unifié= ^{16}O



$n+^{15}\text{O}$: 15.66 MeV

$p+^{15}\text{N}$: 12.13 MeV

$\alpha+^{12}\text{C}$: 7.12 MeV

- collisions élastiques: possibles à toutes énergies
- $\alpha+^{12}\text{C} \rightarrow p+^{15}\text{N}$: possible si $E > 5.01$ MeV
- $\alpha+^{12}\text{C} \rightarrow n+^{15}\text{O}$: possible si $E > 8.54$ MeV
- $p+^{15}\text{N} \rightarrow \alpha+^{12}\text{C}$: possible à toutes énergies
- $\alpha+^{12}\text{C} \rightarrow \gamma+^{16}\text{O}$: possible à toutes énergies

Diffusion par un potentiel

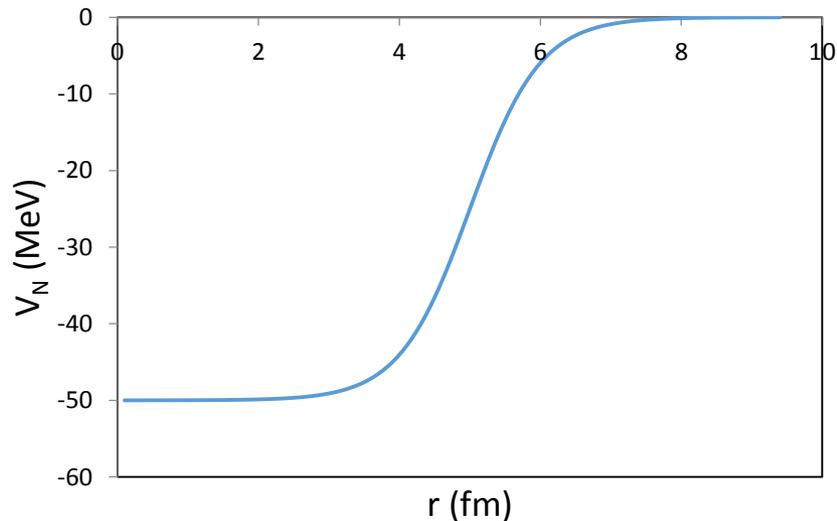
- S'applique à des noyaux légers
- Suppose que l'interaction entre la cible et le projectile peut être décrite par un potentiel
- On néglige la structure interne des noyaux
- Potentiel contient 2 termes:

1. Nucléaire $V_N(\mathbf{r})$: attractif, à courte portée

exemples: Gaussien $V_N(r) = -V_0 \exp(-(r/r_0)^2)$

$$\text{Woods-Saxon: } V_N(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}$$

- les paramètres des potentiels doivent être ajustés sur l'expérience
- pas de solution analytique de l'équation de Schrödinger



Potentiel de Woods-Saxon

r_0 = portée (\sim somme des rayons)

a = diffusivité (~ 0.5 fm)

Figure: $V_0 = 50$ MeV, $r_0 = 5$ fm, $a = 0.5$ fm

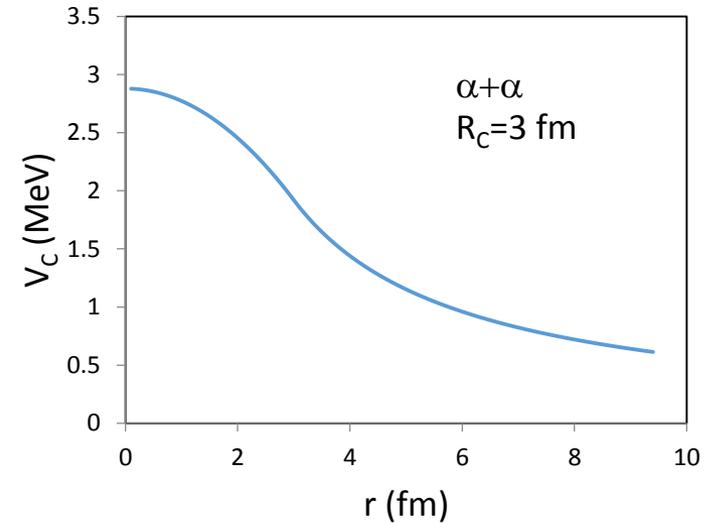
2. Coulombien: longue portée, joue un rôle important dans les collisions de basse énergie

potentiel « point-point »: $V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

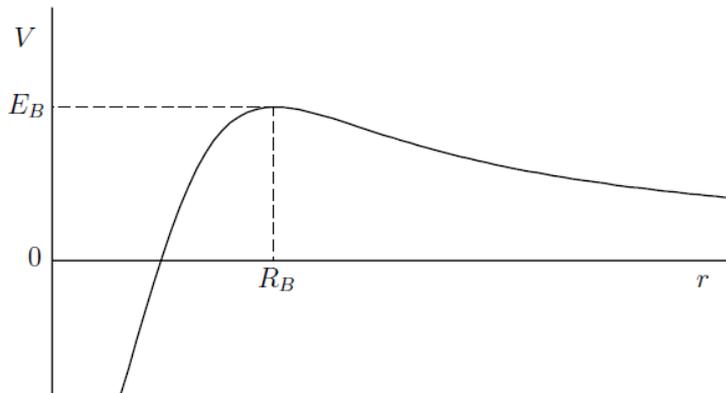
potentiel « point-sphère »: (rayon R_C)

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \text{ pour } r \geq R_C$$

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2R_C} \left(3 - \left(\frac{r}{R_C} \right)^2 \right) \text{ pour } r \leq R_C$$



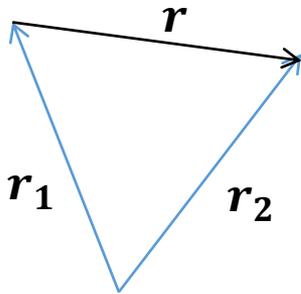
3. Potentiel total: $V(r) = V_N(r) + V_C(r)$: présente un maximum (barrière coulombienne: $r = R_B, V(R_B) = E_B$)



Equation de Schrödinger

$$H\Psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$$

- Obtenue après élimination du centre de masse



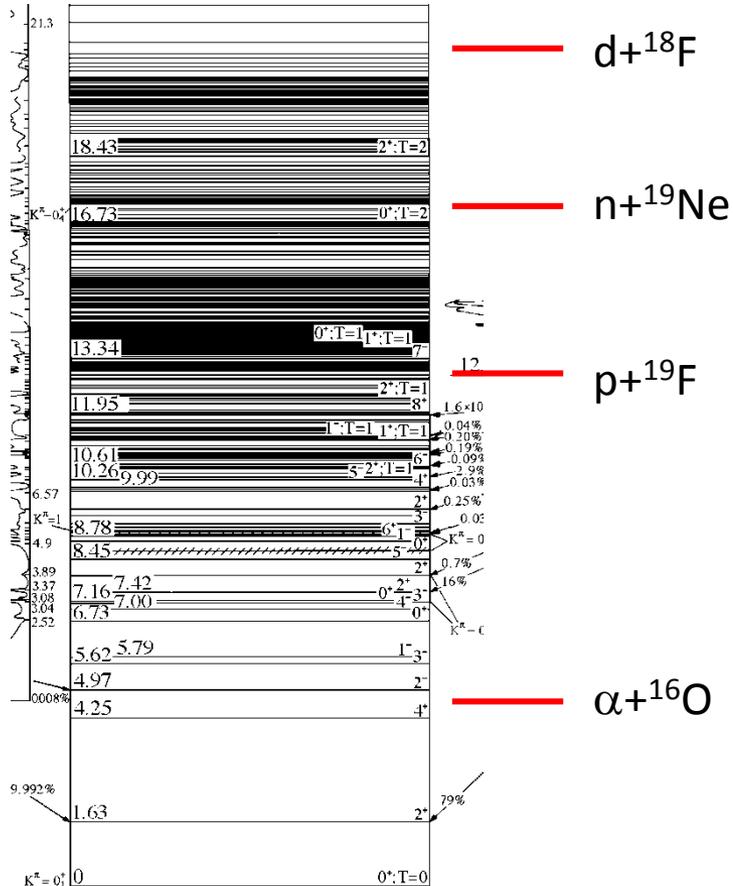
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{A}(A_1\mathbf{r}_1 + A_2\mathbf{r}_2)$$

- Energie $E > 0$: déterminée par rapport à l'énergie du seuil de la réaction
- Hypothèses simplificatrices:
 - Système neutre (pas de potentiel Coulombien)
 - Les noyaux ont un spin zéro
 - Collisions élastiques: calculs « à une voie »
- Méthode des déphasages:
 - Calcul de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$, et de son comportement asymptotique
 - \rightarrow déphasages \rightarrow sections efficaces

Modèle optique

= modèle de potentiel avec un potentiel complexe
partie imaginaire simule l'absorption



Exemple: $\alpha+^{16}\text{O}$

À basse énergie:

- Seule voie ouverte \rightarrow potentiel réel est adapté (pas d'absorption)

À haute énergie:

- nombreuses voies ouvertes
- absorption importante
- modèle de potentiel pas valable \rightarrow potentiel complexe ("optique")

^{20}Ne

Etude de noyaux exotiques par réactions

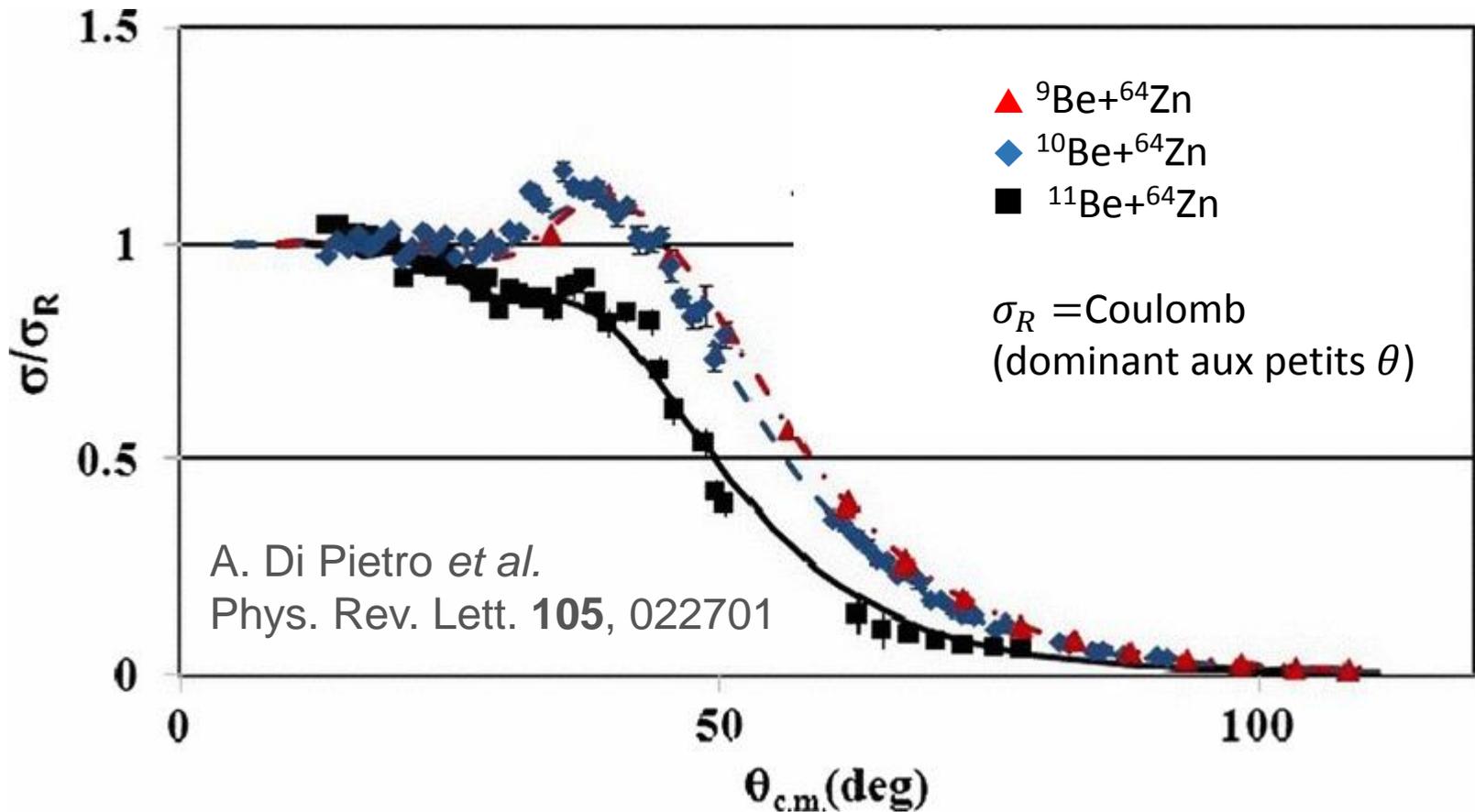
Données expérimentales disponibles: sections efficaces $\frac{d\sigma}{d\theta}$

* élastiques

* dissociation

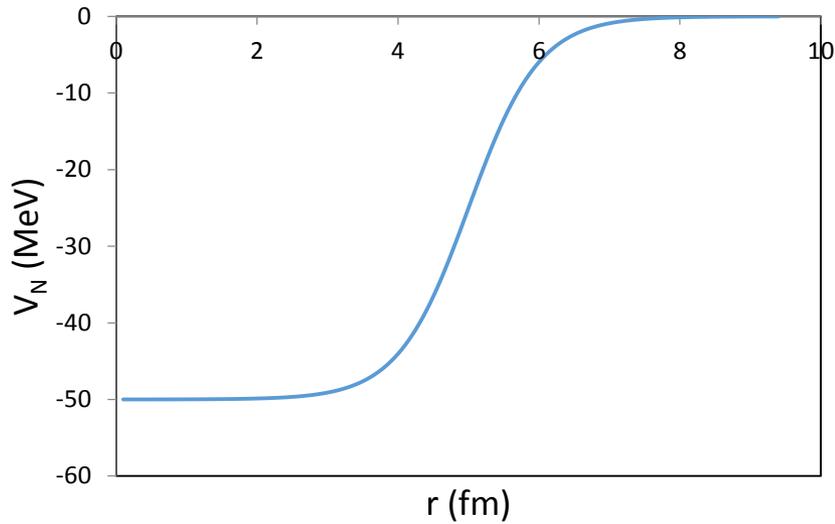
Exemple: ${}^9,{}^{10},{}^{11}\text{Be}+{}^{64}\text{Zn}$ à $E_{\text{cm}}=24.5$ MeV:

${}^9,{}^{10}\text{Be}$ =noyaux « standards », ${}^{11}\text{Be}$ =noyau exotique



Interprétation théorique

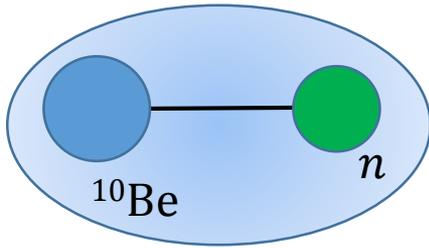
Modèle optique: grande diffusivité pour le potentiel $^{11}\text{Be}+^{64}\text{Zn}$



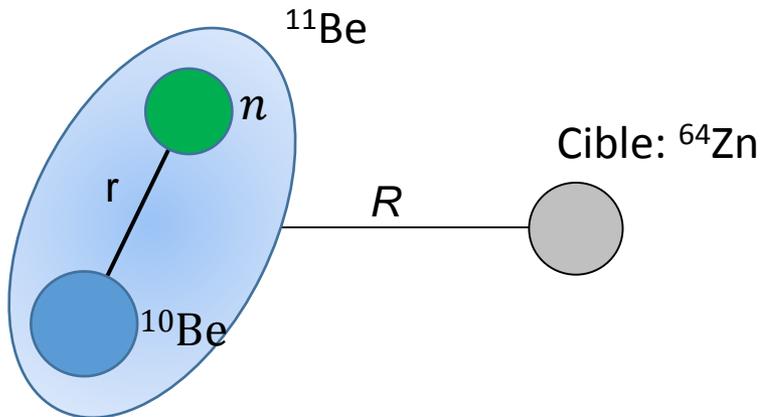
$$\text{Woods-Saxon: } V_N(r) = -\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}$$

Modèle CDCC= Continuum Discretized Coupled Channel

1ere étape: description de ^{11}Be dans le modèle de potentiel $^{10}\text{Be}+n$



2eme étape: utilisation des fonctions d'onde de ^{11}Be dans la collision $^{11}\text{Be}+^{64}\text{Zn}$



Hamiltonien à 3 corps

$$H = H_0(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{R}} + V_{t1}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) + V_{t2}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

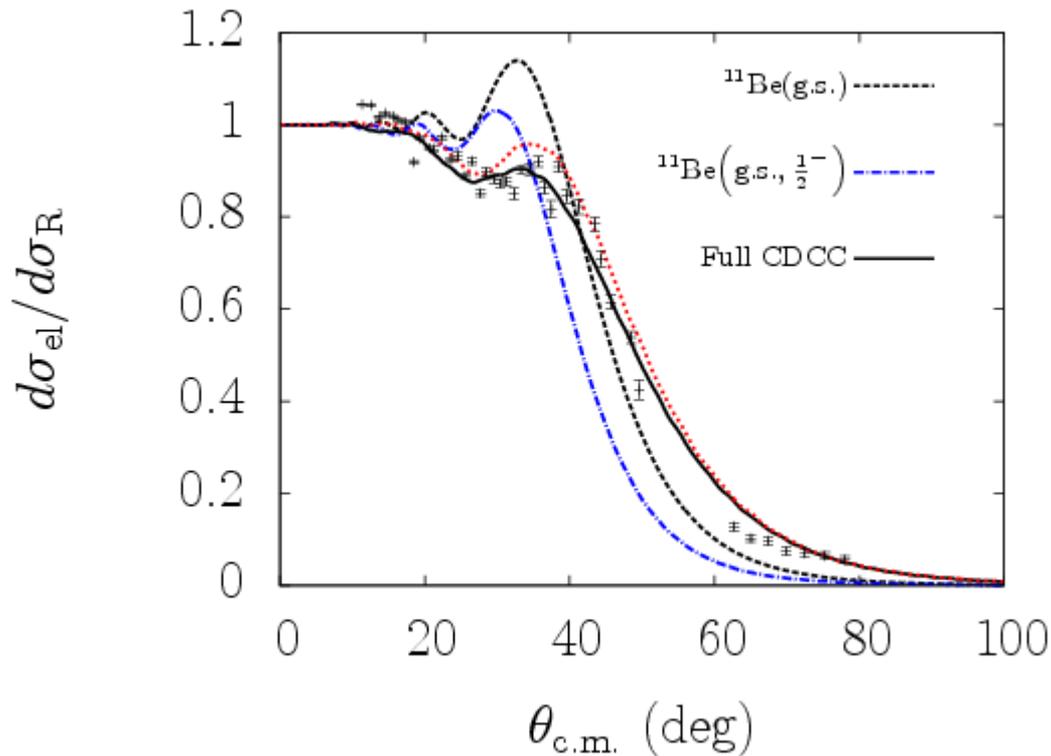
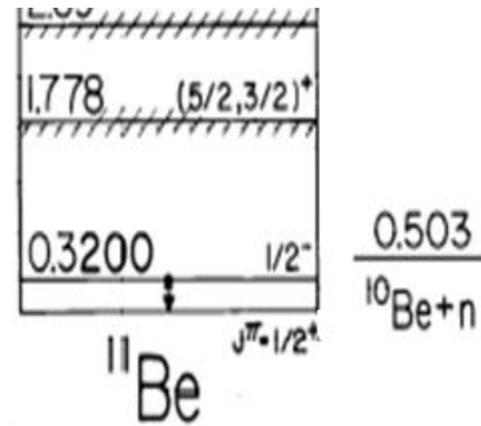
Prise en compte de

- Etat fondamental de ^{11}Be
- Etats continus de $^{10}\text{Be}+n$

- Plus compliqué
- Plus de pouvoir de prédiction que modèle pot.

3 calculs

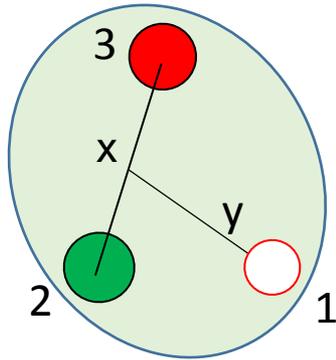
1. ^{11}Be fondamental
2. + 1^{er} état excité
3. + états de dissociation de ^{11}Be



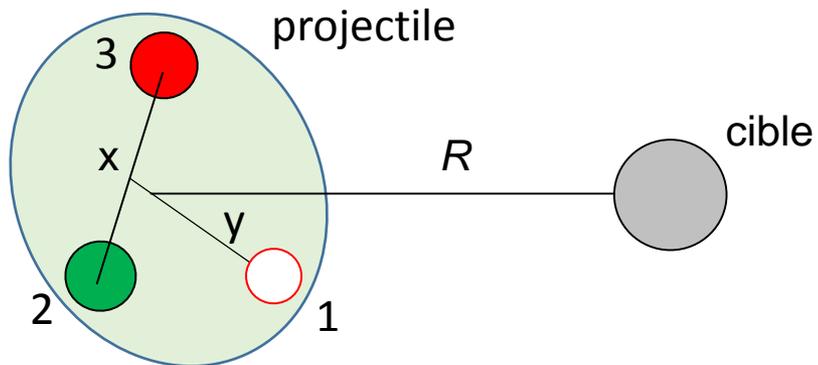
T. Druet, P.D.,
Eur. Phys. J. A48 (2012) 147

Importance du continu!

Extension possible: projectile à 3 corps



Généralisation du modèle de potentiel \rightarrow ${}^6\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, etc.



Hamiltonien à 4 corps
Plus difficile mais faisable