

# Progressi nel calcolo dei grafici di Feynman

(e un'applicazione alla produzione di coppie di bosoni vettori a LHC)

Lorenzo Tancredi

Institut für Theoretische Physik - Universität Zürich

Bologna, 7 Ottobre 2013

In collaborazione con Thomas Gehrmann, Erich Weihs, Ettore Remiddi

# Piano del Seminario

1. **Perché** ancora conti a molti loop in QFT?
  - ▶ → A che ordine perturbativo ha *senso* fermarsi?
2. **Come** procedere (*tecnicamente*)?
  - ▶ → State-of-the-art techniques in multi-loop calculations
3. **Applicazione**
  - ▶ → Correzioni a 2-loop alla produzione di coppie di bosoni vettori massivi ad LHC

## Perché ancora conti a molti loop in QFT?

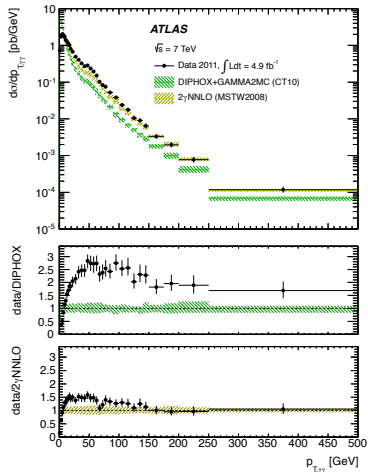
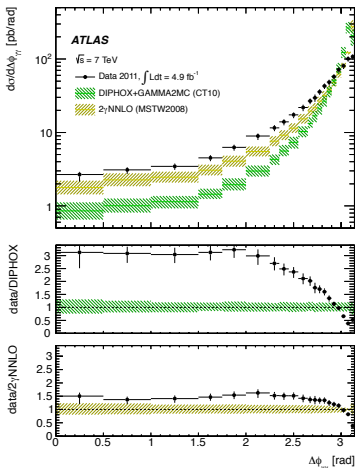
- ▶ **Esperimenti** sempre più complessi:  
SPS → LEP → Tevatron → LHC →...
- ▶ Il Modello Standard è ormai **fisica di precisione**
- ▶ **LHC** macchina adronica → segnale “*sporco*”  
→ **nevertheless**, dopo 3 anni già precisione al **per cento!**

Un pò di **nomenclatura**:

- ▶ Data **un'osservabile**:  
(sezione d'urto, distribuzioni angolari, thrust, ...)
  
- ▶ Data una **teoria di campo** caratterizzata da coupling  $\alpha < 1$ 
  1. Correzioni **Leading-Order** (LO)  $\approx \mathcal{O}(1)$
  2. Correzioni **Next-To-Leading-Order** (NLO)  $\approx \mathcal{O}(\alpha)$
  3. Correzioni **Next-To-Next-To-Leading Order** (NNLO)  $\approx \mathcal{O}(\alpha^2)$
  4. etc...
  
- ▶ **Dove** ha senso fermarsi?

# Distribuzione angolare **coppie di fotoni** prodotti a LHC:

## ► Confronto **teoria-esperimento** → $\gamma\gamma$ production ad ATLAS



**Simili** precisioni già raggiunte ad LHC per diverse osservabili in:

- ▶ Produzione di **coppie di bosoni vettori**  $\rightarrow \gamma, Z, W^\pm$

$\rightarrow$  Principali canali di produzione dell'**Higgs**:

1.  $H \rightarrow \gamma\gamma$
2.  $H \rightarrow W^+W^-$
3.  $H \rightarrow ZZ$

- ▶ Produzione **top-antitop**

$\rightarrow$  **forward-backward asymmetry**,

precisione sperimentale ha già superato precisione teorica a NLO.

- ▶ **di-jet** production:

consistenza interna **QCD** - regime perturbativo/non-perturbativo

In tutti questi processi **bisogno** di predizioni teoriche al NNLO in **QCD**.

## Building-blocks per un calcolo al **NNLO**: (in massless QCD!!)

- ▶ **Two-loop** (double-virtual) :  $q\bar{q} \rightarrow V_1 V_2$  ✗
- ▶ **One-loop** (real-virtual) :  $q\bar{q} \rightarrow V_1 V_2 g$  ✓
- ▶ **Tree-level** (real-real) :  $q\bar{q} \rightarrow V_1 V_2 g g$  ✓

### Plus:

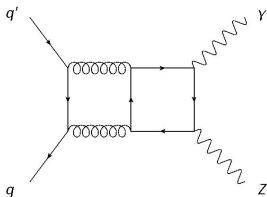
- ▶ **Schema di regolarizzazione** per divergenze UV e IR a livello dell'ampiezza ✓  
→ **dimensional regularisation**
- ▶ **Schema di sottrazione** per cancellare divergenze IR nell'integrazione spazio-fasi ✓  
→  **$q_T$ -subtraction**, Antenna subtraction, Sector decomposition...

And a lot of work to put everything together!

Calcolo a **due loop** spesso **bottleneck** per predizioni a **NNLO**

Come procedere per conto a molti loop? → **approccio diagrammatico**

- ▶ Scrivere ampiezza di scattering in **diagrammi di Feynman**



- ▶ Ogni diagramma può contenere “centinaia” di integrali scalari

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{S_1^{r_1} \dots S_l^{r_l}}{k^2 l^2 (k-l)^2 (k-p_1)^2 (k-p_1-p_2)^2 (l-p_1-p_2)^2 (l-p_1-p_2+q_1)^2}$$

$S_i$  **prodotti scalari** tra impulsi esterni/interni



1. Organizzazione degli integrali in **topologie**:  
(Denominatori presenti)

$$\int \prod_j d^d k_j \frac{S_1^{r_1} \dots S_l^{r_l}}{D_1^{l_1} \dots D_n^{l_n}}$$

2. In ogni topologia grossa **ridondanza**  
*integrali in una stessa topologia NON sono indipendenti !!!*

3. Ridondanza risolta attraverso **integrazioni per parti**  
(*Integration-By-Parts identities, IBPs, d-dimensioni !*)

$$\int \prod_j d^d k_j \left( v_\mu \frac{\partial}{\partial k_j^\mu} \frac{S_1^{r_1} \dots S_l^{r_l}}{D_1^{l_1} \dots D_n^{l_n}} \right) = 0, \quad v^\mu = k_j^\mu, p_k^\mu$$

- Enorme numero di identità tra integrali nella **stessa topologia**.

1. Organizzazione degli integrali in **topologie**:  
(Denominatori presenti)

$$\int \Pi_j d^d k_j \frac{S_1^{r_1} \dots S_l^{r_l}}{D_1^{l_1} \dots D_n^{l_n}}$$

2. In ogni topologia grossa **ridondanza**  
*integrali in una stessa topologia NON sono indipendenti !!!*

3. Ridondanza risolta attraverso **integrazioni per parti**  
(*Integration-By-Parts identities, IBPs, d-dimensioni !* )

$$\int \Pi_j d^d k_j \left( v_\mu \frac{\partial}{\partial k_j^\mu} \frac{S_1^{r_1} \dots S_l^{r_l}}{D_1^{l_1} \dots D_n^{l_n}} \right) = 0, \quad v^\mu = k_j^\mu, p_k^\mu$$

- Enorme numero di identità tra integrali nella **stessa topologia**.

1. **IBPs** generano enormi sistemi **lineari** di equazioni con gli integrali come incognite.
2. Coefficienti sono funzioni **razionali** degli invarianti e di “d”.
3. Invertendo il sistema  
→ si esprimono integrali in funzione dei **Master Integrals** (MIs)
4. In applicazioni **realistiche**:  
processo 2 → 2 a **due loop**: decine di migliaia di equazioni!
  - ▶ Computer Algebra!
  - ▶ Possibile automatizzare completamente il procedimento  
→ **algoritmo di Laporta**
  - ▶ Implementato in diversi codici in FORM, Mathematica, C++.  
[Reduze, AIR, FIRE, ...]

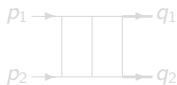
1. **IBPs** generano enormi sistemi **lineari** di equazioni con gli integrali come incognite.
2. Coefficienti sono funzioni **razionali** degli invarianti e di “d”.
3. Invertendo il sistema  
→ si esprimono integrali in funzione dei **Master Integrals** (MIs)
4. In applicazioni **realistiche**:  
processo  $2 \rightarrow 2$  a **due loop**: decine di migliaia di equazioni!
  - ▶ Computer Algebra!
  - ▶ Possibile automatizzare completamente il procedimento  
→ **algoritmo di Laporta**
  - ▶ Implementato in diversi codici in FORM, Mathematica, C++.  
[Reduze, AIR, FIRE, ...]

## Numeri per un'ampiezza a due loop in *massless QCD*: $q\bar{q} \rightarrow ZZ$

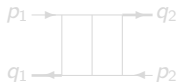
- ▶ **143** Diagrammi di Feynman
- ▶  $\approx$  **3100** Integrali PLANARI
- ▶  $\approx$  **1500** Integrali NON-PLANARI

Possono essere raggruppati in **3 topologie**:

- ▶ **Topo A**: Integrali **Planari** con due gambe massive adiacenti



- ▶ **Topo B**: Integrali **Planari** con due gambe massive non-adiacenti



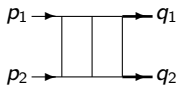
- ▶ **Topo C**: Integrali **Non-Planari**

**Numeri** per un'ampiezza a due loop in *massless QCD*:  $q\bar{q} \rightarrow ZZ$

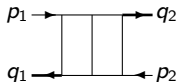
- ▶ **143** Diagrammi di Feynman
- ▶  $\approx$  **3100** Integrali PLANARI
- ▶  $\approx$  **1500** Integrali NON-PLANARI

Possono essere raggruppati in **3 topologie**:

- ▶ **Topo A**: Integrali **Planari** con due gambe massive adiacenti



- ▶ **Topo B**: Integrali **Planari** con due gambe massive non-adiacenti



- ▶ **Topo C**: Integrali **Non-Planari**

- ▶ Riduzione a **MIs** con **Reduze2** [C.Studerus, A.Manteuffel]
  - ▶ **Topo A**: 26 2-loop MIs, 13 nuovi double-boxes
  - ▶ **Topo B**: 13 2-loop MIs, 9 nuovi double-boxes
  - ▶ **Topo C**: 16 2-loop MIs, 13 nuovi double-boxes
- ▶ Da  $\approx 5000$  **Integrali**  $\rightarrow \approx 50$  **Master Integrals** !
- ▶ Funzioni a tre punti (triangoli) già noti:  
[T.Gehrmann, E.Remiddi; T.G.Birthwright, E.W.N.Glover, P.Marquard;  
F.Chavez, C.Duhr]
- ▶ Il conto diventa quantomeno “fattibile” ...
- ▶ Come calcolare i double-boxes (e in generale i MIs)?

Diversi **metodi analitici** a disposizione:

1. Parametri di Feynman.
2. Rappresentazioni di Mellin Barnes
3. **Equazioni Differenziali (DE)**
  - ▶ **Evita** integrazione diretta su momenti di loop !
  - ▶ Espone struttura **analitica** degli integrali !
  - ▶ L'unico che apre alla possibilità (??) di **automatizzazione** !  
→ a patto di avere speciali classi di funzioni...
  - ▶ → DE possono essere ottenute in modo **automatizzato**
  - ▶ → “direct inspection” delle equazioni rivela **struttura analitica** del risultato prima ancora di risolverle !



Diversi **metodi analitici** a disposizione:

1. Parametri di Feynman.
2. Rappresentazioni di Mellin Barnes
3. **Equazioni Differenziali (DE)**
  - ▶ **Evita** integrazione diretta su momenti di loop !
  - ▶ Espone struttura **analitica** degli integrali !
  - ▶ L'unico che apre alla possibilità (??) di **automatizzazione** !  
→ a patto di avere speciali classi di funzioni...
  - ▶ → DE possono essere ottenute in modo **automatizzato**
  - ▶ → “direct inspection” delle equazioni rivela **struttura analitica** del risultato prima ancora di risolverle !

## Come funziona?

1. Data una certa **topologia** → riduzione a **MIs**.
2. In generale **N** MIs indipendenti  $I_1, \dots, I_N$ .
3. MIs sono **funzioni scalari**  
→ funzioni dei soli **invarianti esterni**  $s_{ij}$  e delle **dimensioni**  $d$

ad esempio  $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$

4. **Derivate** rispetto agli invarianti esterni:

$$s_{ij} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} = \sum_{k,l} p_k^\mu \frac{\partial}{\partial p_l^\mu}$$

## Come funziona?

1. Data una certa **topologia** → riduzione a **MIs**.
2. In generale **N** MIs indipendenti  $I_1, \dots, I_N$ .
3. MIs sono **funzioni scalari**  
→ funzioni dei soli **invarianti esterni**  $s_{ij}$  e delle **dimensioni**  $d$

ad esempio  $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$

4. **Derivate** rispetto agli invarianti esterni:

$$s_{ij} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} = \sum_{k,l} p_k^\mu \frac{\partial}{\partial p_l^\mu}$$

1. Derivata rispetto agli impulsi esterni genera nuovi integrali nella **stessa topologia**

$$s_{ij} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} I(s_{ij}, d) = \sum_k C_k(s_{ij}, d) I_k(s_{ij}, d)$$

2. Con IBPs vengono ridotti nuovamente a MIs  
→ sistema **lineare** di equazioni di **primo grado**

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} = M_{N \times N} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ \dots \\ G_N \end{pmatrix}$$

3. Se  $N = 1$  problema **banale**
  - ▶ Equazione lineare di primo grado, soluzione per quadratura.
4. Se  $N > 1$  →  $N$  **equazioni lineari** di primo grado **accoppiate**.
  - ▶ Complessità del sistema determina struttura della soluzione.

1. Derivata rispetto agli impulsi esterni genera nuovi integrali nella **stessa topologia**

$$s_{ij} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} I(s_{ij}, d) = \sum_k C_k(s_{ij}, d) I_k(s_{ij}, d)$$

2. Con IBPs vengono ridotti nuovamente a MIs  
→ sistema **lineare** di equazioni di **primo grado**

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} = M_{N \times N} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ \dots \\ G_N \end{pmatrix}$$

3. Se  $N = 1$  problema **banale**
  - ▶ Equazione lineare di primo grado, soluzione per quadratura.
4. Se  $N > 1$  →  $N$  **equazioni lineari** di primo grado **accoppiate**.
  - ▶ Complessità del sistema determina struttura della soluzione.

1. Derivata rispetto agli impulsi esterni genera nuovi integrali nella **stessa topologia**

$$s_{ij} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} I(s_{ij}, d) = \sum_k C_k(s_{ij}, d) I_k(s_{ij}, d)$$

2. Con IBPs vengono ridotti nuovamente a MIs  
→ sistema **lineare** di equazioni di **primo grado**

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} = M_{N \times N} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ \dots \\ G_N \end{pmatrix}$$

3. Se  $N = 1$  problema **banale**
  - ▶ Equazione lineare di primo grado, soluzione per quadratura.
4. Se  $N > 1$  →  $N$  **equazioni lineari** di primo grado **accoppiate**.
  - ▶ Complessità del sistema determina struttura della soluzione.

1. Osservazione **empirica** n. 1:

- ▶ Nella maggioranza dei casi noti le equazioni si possono disaccoppiare in  $d = 4$ . (*teorie massless - o con "poche masse" nei loop*)
- ▶ Soluzione **iterativa** come espansione in **serie** in  $(d - 4)$

2. Osservazione **empirica** n. 2:

- ▶ In questi casi soluzione esprimibile come **Polilogaritmi Multipli**.

3. Osservazione **empirica** n. 3:

- ▶ Quando questo non è possibile sembrano apparire **nuove funzioni** Integrali Ellittici, Polilogaritmi Ellittici, ... ???

1. Osservazione **empirica** n. 1:

- ▶ Nella maggioranza dei casi noti le equazioni si possono disaccoppiare in  $d = 4$ . (*teorie massless - o con "poche masse" nei loop*)
- ▶ Soluzione **iterativa** come espansione in **serie** in  $(d - 4)$

2. Osservazione **empirica** n. 2:

- ▶ In questi casi soluzione esprimibile come **Polilogaritmi Multipli**.

3. Osservazione **empirica** n. 3:

- ▶ Quando questo non è possibile sembrano apparire **nuove funzioni** Integrali Ellittici, Polilogaritmi Ellittici, ... ???



1. Osservazione **empirica** n. 1:

- ▶ Nella maggioranza dei casi noti le equazioni si possono disaccoppiare in  $d = 4$ . (*teorie massless - o con "poche masse" nei loop*)
- ▶ Soluzione **iterativa** come espansione in **serie** in  $(d - 4)$

2. Osservazione **empirica** n. 2:

- ▶ In questi casi soluzione esprimibile come **Polilogaritmi Multipli**.

3. Osservazione **empirica** n. 3:

- ▶ Quando questo non è possibile sembrano apparire **nuove funzioni** Integrali Ellittici, Polilogaritmi Ellittici, ... ???

Se sono **Multiple Polylogarithms** (MPLs) siamo fortunati !

► **MPLs** (or GHPLs) - Definizione:

[E.Remiddi, J.Vermaseren; T.Gehrmann, E.Remiddi; A.B.Goncharov; ...]

$$G(0; y) = \ln y, \quad G(a; y) = \ln(1 - y/a),$$

$$G(\vec{0}_n; y) = \frac{1}{n!} \ln^n y$$

$$G(a_z, \vec{b}_z; y) = \int_0^y \frac{dt}{t - a_z} G(\vec{b}_z; t)$$

$a_z$  e  $b_z^{(j)}$  in generale funzioni di  $z$ .

La **struttura analitica** dei MPLs è contenuta negli **indici!!!**

→ *vector of singularities!*

Il numero degli indici determina il **peso**  $w$  o il grado di **trascendentalità** del MPL.

Concetto di **trascendentalità** è fondamentale:

1. **Funzione razionale** ha trascendentalità **zero**:

$$g(a; x) = \frac{1}{x - a}, \quad w = 0$$

2. Ogni **integrazione** aumenta **di 1** grado di trascendentalità:

$$G(a; t) = \int_0^t \frac{dx}{x - a} = \ln \left( 1 - \frac{t}{a} \right), \quad w = 1$$

3. Ogni **derivata** diminuisce **di 1** grado di trascendentalità:

$$\frac{d}{dt} G(a, b; t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{dx}{x - a} \int_0^x \frac{dy}{y - b} = \frac{1}{t - a} G(b; t), \quad w = 1$$

*Differenziando "un numero sufficiente di volte" ci si riduce sempre a funzioni razionali... → tutto diventa banale !*

- ▶ MPLs formano un' **Algebra** → Shuffle Product

$$G(a; x) G(b, c; x) = G(a, b, c; x) + G(b, a, c; x) + G(b, c, a; x).$$

- ▶ Per  $w < 4$  si riducono a **polilogaritmi di Nielsen**:

$$G(a, b; x) = Li_2\left(\frac{b-x}{b-a}\right) - Li_2\left(\frac{b}{b-a}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{b}\right) \ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$G(z, z, z; y) = \frac{1}{3!} \ln\left(1 - \frac{y}{z}\right)^3$$

- ▶ **N.B.** per quantità fisiche a **NNLO** serve sempre  $w = 4$  !

## 1-loop Example:

- ▶ Triangolo con gambe esterne massive + **loop massless**  
(sottotopologia per  $q\bar{q} \rightarrow ZZ$ )

$$T(s) = \begin{array}{c} \xrightarrow{p_{12}} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \xrightarrow{q_1} \quad \xrightarrow{q_2} \end{array} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k-q_1)^2(k-p_1-p_2)^2}$$

E la sua unica sottotopologia:

$$B(p^2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k-p)^2}$$

con  $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$  e  $q_1^2 = q_2^2 = Q^2$ .

- ▶ Differenziando rispetto ad  $s$  si ottiene:

$$s \frac{\partial}{\partial s} T(s) = - \left[ \frac{d-2}{2} + \frac{2Q^2(d-3)}{s-4Q^2} \right] T(s) + \frac{2(d-3)}{s-4Q^2} [B(Q^2) - B(s)],$$

## 1-loop Example:

- ▶ Triangolo con gambe esterne massive + **loop massless**  
(sottotopologia per  $q\bar{q} \rightarrow ZZ$ )

$$\mathcal{T}(s) = \begin{array}{c} \xrightarrow{p_{12}} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \xrightarrow{q_1} \\ \xrightarrow{q_2} \end{array} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k-q_1)^2(k-p_1-p_2)^2}$$

E la sua unica sottotopologia:

$$\mathcal{B}(p^2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k-p)^2}.$$

con  $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$  e  $q_1^2 = q_2^2 = Q^2$ .

- ▶ Differenziando rispetto ad  $s$  si ottiene:

$$s \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{T}(s) = - \left[ \frac{d-2}{2} + \frac{2Q^2(d-3)}{s-4Q^2} \right] \mathcal{T}(s) + \frac{2(d-3)}{s-4Q^2} [\mathcal{B}(Q^2) - \mathcal{B}(s)],$$

- Sviluppando in  $\epsilon = (4 - d)/2$  si ottiene un sistema di equazioni **“chained”**:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{T}^{(-1)}(s) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s - 4Q^2} \right] \mathcal{T}^{(-1)}(s),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{T}^{(0)}(s) &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s - 4Q^2} \right] \mathcal{T}^{(0)}(s) \\ &+ \frac{1}{s - 4Q^2} \mathcal{T}^{(-1)}(s) + \frac{1}{2Q^2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s - 4Q^2} \right] (\ln(-Q^2 - i\eta) - \ln(-s - i\eta)), \end{aligned}$$

- L'equazioni di possono risolvere data una condizione al contorno!

$$\mathcal{T}^{(-1)}(s) = \frac{C^{(-1)}}{\sqrt{s(s - 4Q^2)}}, \quad \text{con } C^{(-1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(0)}(s) &= \frac{2}{\sqrt{s(s - 4Q^2)}} \left\{ \int \frac{ds}{\sqrt{s(s - 4Q^2)}} \left[ \ln(-s - i\eta) - \ln(-Q^2 - i\eta) \right] \right\} \\ &+ C^{(0)} \end{aligned}$$

- Sviluppando in  $\epsilon = (4 - d)/2$  si ottiene un sistema di equazioni **“chained”**:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{T}^{(-1)}(s) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s - 4Q^2} \right] \mathcal{T}^{(-1)}(s),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{T}^{(0)}(s) &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s - 4Q^2} \right] \mathcal{T}^{(0)}(s) \\ &+ \frac{1}{s - 4Q^2} \mathcal{T}^{(-1)}(s) + \frac{1}{2Q^2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s - 4Q^2} \right] (\ln(-Q^2 - i\eta) - \ln(-s - i\eta)), \end{aligned}$$

- L'equazioni di possono risolvere data una condizione al contorno!

$$\mathcal{T}^{(-1)}(s) = \frac{C^{(-1)}}{\sqrt{s(s - 4Q^2)}}, \quad \text{con } C^{(-1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(0)}(s) &= \frac{2}{\sqrt{s(s - 4Q^2)}} \left\{ \int \frac{ds}{\sqrt{s(s - 4Q^2)}} \left[ \ln(-s - i\eta) - \ln(-Q^2 - i\eta) \right] \right\} \\ &+ C^{(0)} \end{aligned}$$



Radice quadrata si può linearizzare !

- ▶ Ponendo:

$$s = -Q^2 \frac{(1+x)^2}{x}$$

- ▶ si ottiene

$$\mathcal{T}^{(0)}(x) = -\frac{2x}{m^2(1-x^2)} \left\{ \int dx \left[ \frac{\ln(x)}{x} - 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \right] + C^{(0)} \right\},$$

- ▶ Che adesso si può integrare in termini di *MPLs*

$$\mathcal{T}^{(0)}(x) = -\frac{2x}{m^2(1-x^2)} \left\{ G(0, 0, x) - 2 G(0, -1, x) + C^{(0)} \right\}.$$

con  $C^{(0)} = \pi^2/6$

- ▶ Semplicemente **guardando** l'equazione differenziale si sa già:
  1. A ogni ordine in  $\epsilon$  ci sono solo MPLs
  2. Solo indici  $(-1, 0, 1)$  possono apparire  
→ **Polilogaritmi Armonici** (HPLs) [E.Remiddi, J. Vermaseren, 2001]
  3. → **Alfabeto** degli MPLs
- ▶ Iterazione ordini più alti in  $\epsilon$  diventa banale !  
(basta "aggiungere indici" agli MPLs!)
- ▶ **DE** trasformano integrazione sul loop in integrazione **banale** !

- ▶ Semplicemente **guardando** l'equazione differenziale si sa già:
  1. A ogni ordine in  $\epsilon$  ci sono solo MPLs
  2. Solo indici  $(-1, 0, 1)$  possono apparire  
→ **Polilogaritmi Armonici** (HPLs) [E.Remiddi, J. Vermaseren, 2001]
  3. → **Alfabeto** degli MPLs
- ▶ Iterazione ordini più alti in  $\epsilon$  diventa banale !  
(basta "aggiungere indici" agli MPLs!)
- ▶ DE trasformano integrazione sul loop in integrazione **banale** !

- ▶ Semplicemente **guardando** l'equazione differenziale si sa già:
  1. A ogni ordine in  $\epsilon$  ci sono solo MPLs
  2. Solo indici  $(-1, 0, 1)$  possono apparire  
→ **Polilogaritmi Armonici** (HPLs) [E.Remiddi, J. Vermaseren, 2001]
  3. → **Alfabeto** degli MPLs
- ▶ Iterazione ordini più alti in  $\epsilon$  diventa banale !  
(basta "aggiungere indici" agli MPLs!)
- ▶ **DE** trasformano integrazione sul loop in integrazione **banale** !

## Riassumendo:

→ Se le funzioni sono MPLs, sappiamo **TUTTO!**

- ▶ Proprietà semplici sotto differenziazione
- ▶ Struttura Algebrica
- ▶ + Routines numeriche per il calcolo numerico  
[Vollinga, Weinzierl 2004]

**DE** “perfette” per trattare queste funzioni !

- ▶ Ma queste funzioni quanto sono **general**i?

## Riassumendo:

→ Se le funzioni sono MPLs, sappiamo **TUTTO!**

- ▶ Proprietà semplici sotto differenziazione
- ▶ Struttura Algebrica
- ▶ + Routines numeriche per il calcolo numerico  
[Vollinga, Weinzierl 2004]

**DE** “perfette” per trattare queste funzioni !

- ▶ Ma queste funzioni quanto sono **generali**?

La risposta è **MOLTO** !

1. Funzioni sufficienti per **qualsiasi** conto a **1 loop**.  
(1-loop *concettualmente* risolto!)
2. Funzioni sufficienti per conti fino a 3 o 4 loop  $\approx$  **massless** !  
[  $N = 4$ , massless QCD, QED, QCD con  $m_t \neq 0, \dots$  ]
  - 3-jet production a 2 loop in massless QCD,
  - VV production a 2 loop in massless QCD,
  - $t \bar{t}$  production 2 loop in QCD  $m_t \neq 0$ ,
  - Scattering Bhabha a 2 loop in full-QED,...
3. Primo esempio in cui non sono sufficienti:
  - **2-loop massive Sunrise graph**
    - ▶ Bottleneck per qualsiasi conto EW a 2 loop.

La risposta è **MOLTO** !

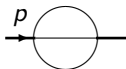
1. Funzioni sufficienti per **qualsiasi** conto a **1 loop**.  
(1-loop *concettualmente* risolto!)
2. Funzioni sufficienti per conti fino a 3 o 4 loop  $\approx$  **massless** !  
[  $N = 4$ , massless QCD, QED, QCD con  $m_t \neq 0, \dots$  ]
  - 3-jet production a 2 loop in massless QCD,
  - VV production a 2 loop in massless QCD,
  - $t \bar{t}$  production 2 loop in QCD  $m_t \neq 0$ ,
  - Scattering Bhabha a 2 loop in full-QED,...
3. Primo esempio in cui non sono sufficienti:
  - **2-loop massive Sunrise graph**
    - ▶ Bottleneck per qualsiasi conto EW a 2 loop.



La risposta è **MOLTO** !

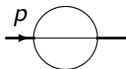
1. Funzioni sufficienti per **qualsiasi** conto a **1 loop**.  
(1-loop *concettualmente* risolto!)
2. Funzioni sufficienti per conti fino a 3 o 4 loop  $\approx$  **massless** !  
[  $N = 4$ , massless QCD, QED, QCD con  $m_t \neq 0, \dots$  ]
  - 3-jet production a 2 loop in massless QCD,
  - VV production a 2 loop in massless QCD,
  - $t\bar{t}$  production 2 loop in QCD  $m_t \neq 0$ ,
  - Scattering Bhabha a 2 loop in full-QED,...
3. Primo esempio in cui non sono sufficienti:
  - **2-loop massive Sunrise graph**
    - ▶ Bottleneck per qualsiasi conto **EW** a 2 loop.

## Sunrise a 2-loop con 3 masse interne:



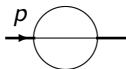
- ▶ Riduzione  $\rightarrow$  4 MIs indipendenti
  1. 4 eq. differenziali **accoppiate** in  $d = 4$ .
  2. Corrispondono a 1 equazione di **4to grado** per 1 MI.
- ▶ Si riesce a **disaccoppiare** solo **due** equazioni in  $d = 2$ .  
 $\rightarrow$  Da valore in  $d = 2$  si può ottenere valore in  $d = 4$  [Tarasov, 1996]
- ▶ In  $d = 2$  problema si riduce a un'equazione di **secondo grado**.
  1. L'equazione **non ammette** soluzioni in termini di **MPLs**
  2. Nuove funzioni necessarie  $\rightarrow$  Funzioni ellittiche

## Sunrise a 2-loop con 3 masse interne:



- ▶ Riduzione  $\rightarrow$  4 MIs indipendenti
  1. 4 eq. differenziali **accoppiate** in  $d = 4$ .
  2. Corrispondono a 1 equazione di **4to grado** per 1 MI.
- ▶ Si riesce a **disaccoppiare** solo **due** equazioni in  $d = 2$ .  
 $\rightarrow$  Da valore in  $d = 2$  si può ottenere valore in  $d = 4$  [Tarasov, 1996]
- ▶ In  $d = 2$  problema si riduce a un'equazione di **secondo grado**.
  1. L'equazione **non ammette** soluzioni in termini di MPLs
  2. Nuove funzioni necessarie  $\rightarrow$  Funzioni ellittiche

## Sunrise a 2-loop con 3 masse interne:



- ▶ Riduzione  $\rightarrow$  4 MIs indipendenti
  1. 4 eq. differenziali **accoppiate** in  $d = 4$ .
  2. Corrispondono a 1 equazione di **4to grado** per 1 MI.
- ▶ Si riesce a **disaccoppiare** solo **due** equazioni in  $d = 2$ .  
 $\rightarrow$  Da valore in  $d = 2$  si può ottenere valore in  $d = 4$  [Tarasov, 1996]
- ▶ In  $d = 2$  problema si riduce a un'equazione di **secondo grado**.
  1. L'equazione **non ammette** soluzioni in termini di **MPLs**
  2. Nuove funzioni necessarie  $\rightarrow$  Funzioni ellittiche

Perchè le funzioni ellittiche sono un **problema**?

1. **Non** esiste una rappresentazione come **integrali iterativi**

2. **Non** si riesce ad estendere concetto di **trascendentalità**

- ▶ *in other words*: **differenziando** un numero “qualsiasi” di volte le funzioni **NON** si semplificano...

3. → **Non** si riesce a calcolare espansioni in  $\epsilon$  a qualsiasi ordine !

- ▶ Matematici e fisici lavorano a possibile estensione delle proprietà dei polilogaritmi alle funzioni ellittiche:

→ **Polilogaritmi Ellittici** [Brown F., Levin A.]

- ▶ 2-loop Sunrise a masse uguali in  $d = 2$  è un **di-logaritmo ellittico**

→ [Bloch S., Vanhove V., 23 Sept. 2013]

Perchè le funzioni ellittiche sono un **problema**?

1. **Non** esiste una rappresentazione come **integrali iterativi**

2. **Non** si riesce ad estendere concetto di **trascendentalità**

- ▶ *in other words*: **differenziando** un numero “qualsiasi” di volte le funzioni **NON** si semplificano...

3. → **Non** si riesce a calcolare espansioni in  $\epsilon$  a qualsiasi ordine !

▶ Matematici e fisici lavorano a possibile estensione delle proprietà dei polilogaritmi alle funzioni ellittiche:

→ Polilogaritmi Ellittici [Brown F., Levin A.]

▶ 2-loop Sunrise a masse uguali in  $d = 2$  è un **di-logaritmo ellittico**

→ [Bloch S., Vanhove V., 23 Sept. 2013]

Perchè le funzioni ellittiche sono un **problema**?

1. **Non** esiste una rappresentazione come **integrali iterativi**
2. **Non** si riesce ad estendere concetto di **trascendentalità**
  - ▶ *in other words*: **differenziando** un numero “qualsiasi” di volte le funzioni **NON** si semplificano...
3. → **Non** si riesce a calcolare espansioni in  $\epsilon$  a qualsiasi ordine !
  - ▶ Matematici e fisici lavorano a possibile estensione delle proprietà dei polilogaritmi alle funzioni ellittiche:
    - **Polilogaritmi Ellittici** [Brown F., Levin A.]
  - ▶ 2-loop Sunrise a masse uguali in  $d = 2$  è un **di-logaritmo ellittico**
    - [Bloch S., Vanhove V., 23 Sept. 2013]

Perchè le funzioni ellittiche sono un **problema**?

1. **Non** esiste una rappresentazione come **integrali iterativi**
2. **Non** si riesce ad estendere concetto di **trascendentalità**
  - ▶ *in other words*: **differenziando** un numero “qualsiasi” di volte le funzioni **NON** si semplificano...
3. → **Non** si riesce a calcolare espansioni in  $\epsilon$  a qualsiasi ordine !
  - ▶ Matematici e fisici lavorano a possibile estensione delle proprietà dei polilogaritmi alle funzioni ellittiche:
    - **Polilogaritmi Ellittici** [Brown F., Levin A.]
  - ▶ 2-loop Sunrise a masse uguali in  $d = 2$  è un **di-logaritmo ellittico**
    - [Bloch S., Vanhove V., 23 Sept. 2013]



## Conclusioni:

1. Conti a due-loop **necessari** per **fenomenologia**!
2. Sono anche interessanti a livello **teorico**
  - ▶ Strutture matematiche nuove assenti a **1 loop**
  - ▶ Negli ultimi anni (mesi!) nuovi sviluppi interessanti
3. Capire **struttura perturbativa** della teoria può dare indicazioni sulle proprietà più profonde delle QFTs?

Stay Tuned !

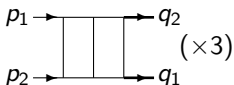
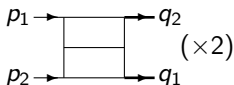
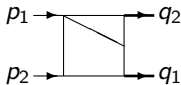
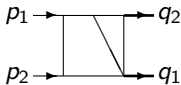
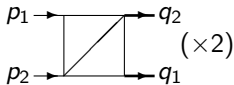
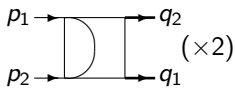
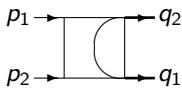
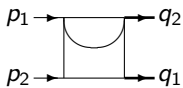
## Conclusioni:

1. Conti a due-loop **necessari** per **fenomenologia!**
2. Sono anche interessanti a livello **teorico**
  - ▶ Strutture matematiche nuove assenti a **1 loop**
  - ▶ Negli ultimi anni (mesi!) nuovi sviluppi interessanti
3. Capire **struttura perturbativa** della teoria può dare indicazioni sulle proprietà più profonde delle QFTs?

Stay Tuned !

Back-up slides

# Topo A - Master Integrals



we found compact expressions in **non-physical** region

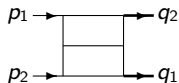
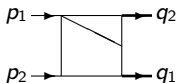
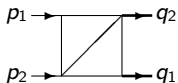
$$s = -m^2 \frac{(1+x)^2}{x} < 0, \quad u = -m^2 z < 0, \quad q_1^2 = q_2^2 = -m^2 < 0$$

All MIs are represented as combinations of **GHPLs** up to **weight 4**

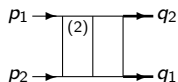
$$G(\vec{f}(x); z) \quad \text{with} \quad f_j(x) = \left\{ 1, 0, -1, -x, -\frac{1}{x}, -\frac{1+x+x^2}{x}, -\frac{x}{1+x+x^2} \right\}$$

$$G(\vec{a}; x) \quad \text{with} \quad a_j = \left\{ 1, 0, -1, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

**N.B.** : The “ugly” indices appear only in **3 topologies** and only at **weight 4**

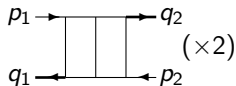
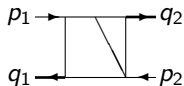
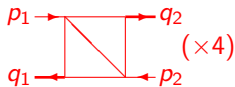
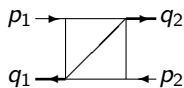
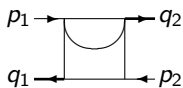


Example of result : **double-box**  $t = 7$  (up to  $w = 3$  fits on 1 slide)



$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{(1-x)(1+x)^3} \left\{ \right. \\
 &+ \frac{1}{\epsilon^2} \left[ 4G(0, -1, x) - 2G(0, 0, x) - \frac{\pi^2}{3} \right] \\
 &+ \frac{1}{\epsilon} \left[ \pi^2 \left( G(-x, z) + G(0, x) - 2G(1, x) - 1/3G(-1/x, z) \right) \right. \\
 &- 2G(-1/x, 0, 0, z) + 4G(-1/x, 1, 0, z) + 2G(-x, 0, 0, z) \\
 &- 4G(-x, 1, 0, z) - 4G(-1, x)G(-1/x, 0, z) \\
 &+ 4G(-1, x)G(-x, 0, z) + 2G(0, x)G(-1/x, 0, z) \\
 &- 2G(0, x)G(-x, 0, z) - 4G(0, -1, x)G(-1/x, z) \\
 &- 4G(0, -1, x)G(-x, z) - 24G(0, -1, -1, x) + 12G(0, -1, 0, x) \\
 &+ 2G(0, 0, x)G(-1/x, z) + 2G(0, 0, x)G(-x, z) \\
 &\left. + 24G(1, 0, -1, x) - 12G(1, 0, 0, x) - 6\zeta_3 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^0) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

# Topo B - Master Integrals



we found compact expressions in **non-physical** region (except **one!**)

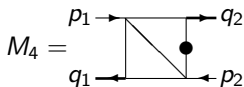
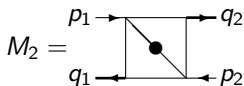
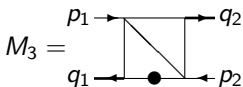
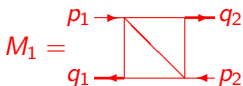
$$t = -m^2 y < 0, \quad u = -m^2 z < 0, \quad q_1^2 = q_2^2 = -m^2 < 0$$

All masters **except one** have extremely compact representations as **GHPLs** up to **weight 4**  $\rightarrow$  *easy boxes!*

$$G(\vec{f}(z); y) \quad \text{with} \quad f_j(z) = \left\{ 1, 0, 2 - z, \frac{1}{z} \right\}$$

$$G(\vec{a}; z) \quad \text{with} \quad a_j = \{1, 0, 2\}$$

**Most complicated topology** has **4 MIs**



*Dots are squared propagators!*



Quite surprisingly (?) the **scalar master** is the **most involved!**

→ [See J.Henn's Talk]

System of 4 coupled differential equations:

- ▶ The **homogeneous solution** of the DE of  $M_1$  contains a **square-root** in  $y, z$
- ▶ **Nevertheless** with this choice of MIs:
  1.  $M_1$  is **finite** → starts at  $\mathcal{O}(1)$
  2. it **decouples** up to  $w = 6$  → (also from  $t = 6, t = 7$  MIs)
- ▶ We can integrate all masters without knowing its value!

Quite surprisingly (?) the **scalar master** is the **most involved!**

→ [\[See J.Henn's Talk\]](#)

System of 4 coupled differential equations:

- ▶ The **homogeneous solution** of the DE of  $M_1$  contains a **square-root** in  $y, z$
- ▶ **Nevertheless** with this choice of MIs:
  1.  $M_1$  is **finite** → starts at  $\mathcal{O}(1)$
  2. it **decouples** up to  $w = 6$  → (also from  $t = 6, t = 7$  MIs)
- ▶ We can integrate all masters without knowing its value!

- ▶  $M_1$  can still be integrated in terms of **GHPLs only**

Going back to  $s, u \rightarrow$  **Landau variable**:

$$s = m^2 \frac{(1 + \xi)^2}{\xi}, \quad \text{and} \quad u = -m^2 \zeta$$

We find:

$$G(\vec{f}(\xi); \zeta) \quad \text{with} \quad f_j(\xi) = \left\{ 1, 0, -1, \xi, \frac{1}{\xi}, \frac{1 + \xi + \xi^2}{\xi}, \frac{1 + \xi^2}{\xi} \right\}$$

$$G(\vec{a}; \xi) \quad \text{with} \quad a_j = \left\{ 1, 0, -1, +i, -i, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

- ▶ **New indices** are needed to reproduce the cut in  $t$

Quite surprisingly (?) the scalar master is the **most involved!**

→ [See Henn's Talk]

BUT with this basis the **homogeneous** system reads:

$$\frac{\partial}{\partial y} M_1 = a_{11} M_1 + a_{12} M_2 + a_{13} M_3 + a_{14} M_4$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_2 = a_{22} M_2 + (d-4) [a_{23} M_3 + a_{24} M_4]$$

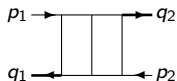
$$\frac{\partial}{\partial y} M_3 = (d-4)^2 [a_{31} M_1] + (d-4) [a_{32} M_2 + a_{33} M_3 + a_{34} M_4]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_4 = (d-4)^2 [a_{41} M_1] + (d-4) [a_{42} M_2 + a_{43} M_3] + a_{44} M_4$$

$M_1$  **decouples** and starts at order  $\mathcal{O}(1)$ . It can be computed **alone** after all other masters have been computed (up to  $t = 7!!!$ )

$M_1$  can influence  $M_3$  and  $M_4$  only starting at  $w = 6$ .

Example of result : **double-box**  $t = 7$  (up to  $w = 3$  fits on 1 slide)



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(1-yz)y} \left\{ \right. \\
 &+ \frac{1}{\epsilon^2} \left[ \frac{\pi^2}{3} - 2G(1/z, 0, y) - 2G(0, z)G(1/z, y) \right] \\
 &+ \frac{1}{\epsilon} \left[ 7G(1/z, 1/z, 0, y) + 3/2G(1/z, y)\pi^2 + 4G(1/z, 0, 0, y) \right. \\
 &- 8G(1/z, 1, 0, y) + 2G(0, 1/z, 0, y) + 7G(0, z)G(1/z, 1/z, y) \\
 &+ 2G(0, z)G(0, 1/z, y) - 6G(0, z)G(1, 1/z, y) - 2/3G(0, y)\pi^2 \\
 &+ 4G(0, 0, z)G(1/z, y) + 2G(0, 1, 0, y) - 6G(1, 1/z, 0, y) \\
 &- 2/3G(1, y)\pi^2 - 8G(1, 0, z)G(1/z, y) + 6G(1, 0, z)G(1, y) \\
 &\left. - 6G(1, 0, 0, y) + 4G(1, 1, 0, y) - 7\zeta_3 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^0) \left. \right\}
 \end{aligned}$$