

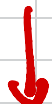


Teoria della Misura in RG e Modelli di Polvere

Matteo Luca Ruggiero
Dlp. di Matematica Unito & INFN



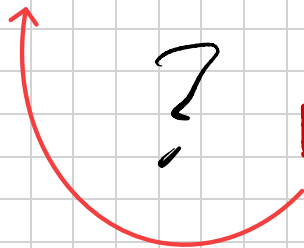
Misure (Osservatori - Osservabili)



Newton → RG



BASSA ENERGIA



Leoni di Tesoro
della Misura

1) Spaziotempo vs Spazio e Tempo

La Relatività descrive i fenomeni nello spaziotempo, ma anche la fisica Newtoniana usa

SPAZIO



"dove avviene"

TEMPO



"quando avviene" e
"come evolve"

per descrivere i fenomeni.

Per Einstein spazio e tempo

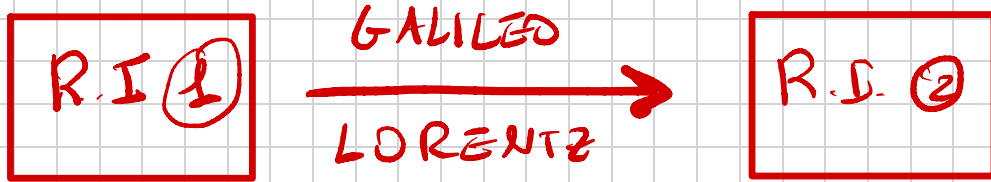
NON SONO ENTITÀ

INDIPENDENTI

2) Il caso delle Relatività Ristrette

In un R.I. le misure vengono fatte utilizzando **OROLOGI** e **REGOLI**; il processo di misure è definito localmente.

Le operazioni occupano una regione ragionevolmente piccola dello spaziotempo.



GALILEO : spazio e tempo **RESTANO INDIPENDENTI**

LORENTZ : spazio e tempo **SI MESCOLANO**

3) Il Caso Generale

In ultima analisi, chiunque faccia misure, e fa localmente, ed esse costituiscono sono quindi misure indipendenti di spazio e di tempo.



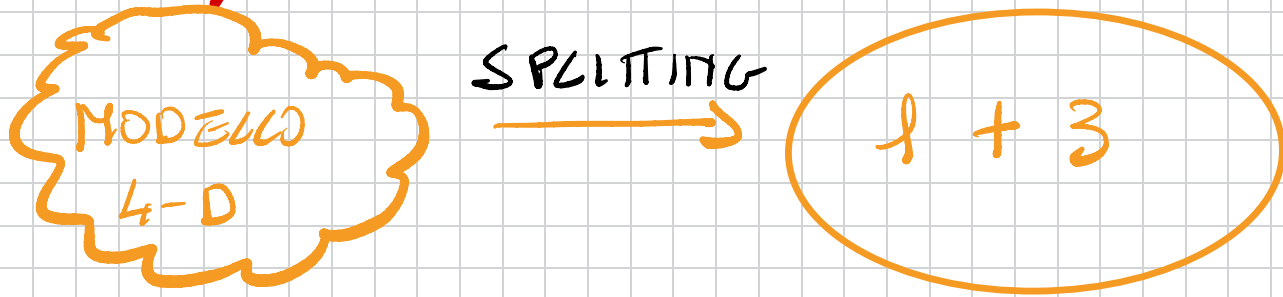
QUESTO NON DIPENDE DAL PARADIGMA (N., RS, RG...)

In RG non esistono osservatori privilegiati:

- grandezze tensoriali
- operazioni tensoriali

COME OTTIENIAMO
GRANDEZZE 1+3
DIMENSIONALI?

4) Il Caso Generale

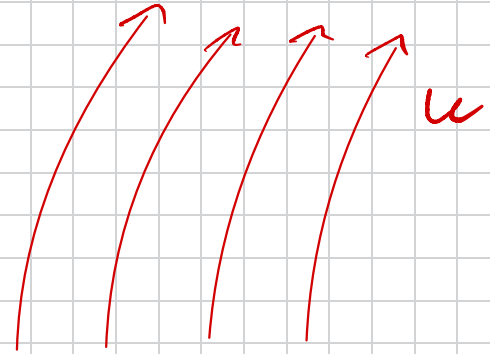


- Effetti del Campo gravitazionale
- Effetti del "moto" degli osservatori

SPLITTING: CONGRUENZA DI LINEE DI UNIVERSO

5) Sistemi di Riferimento Relativistici

Un sistema di riferimento è una **CONGRUENZA** di tipo tempo, ossia un insieme di linee di universo di particelle test che costituiscono il **FLUIDO DI RIFERIMENTO**

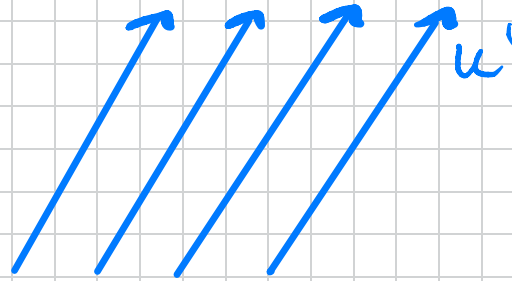
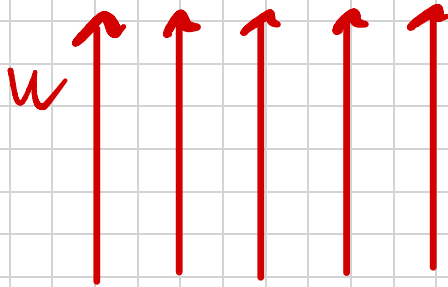


C_u è definita da un campo vettoriale u tangente alle linee di universo, parametrizzate del tempo proprio

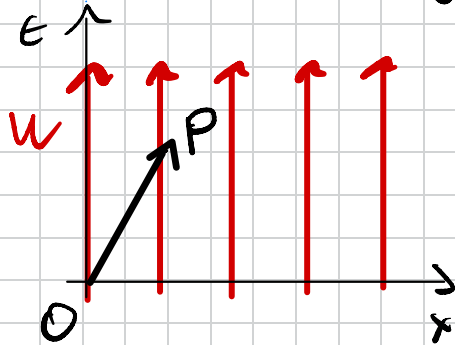
$$u \cdot u = -1$$

$$\left(\begin{array}{c} (-, +, +, +) \\ C = G = 1 \end{array} \right) \quad \text{NOTAZIONE}$$

6) Riferimento Inerziale in Relatività Speciale



Un RI è definito da una congruenza con $u = \text{costante}$



Base Coordinate absolute $u = \partial_t$

$$\partial_P = x^\mu \partial_\mu = t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z$$

t $\rightarrow$ TEMPO RELATIVO

x, y, z $\rightarrow$ POSIZIONE RELATIVA

7) Cinematica Relativa

$OP = R(Z)$ è la linea di universo di una particella (Z tempo proprio) $\rightarrow R = Et + r$

$$\vec{V} = \frac{dR}{dZ} = \frac{dR}{dE} \cdot \frac{dE}{dZ} = \frac{dE}{dZ} \left(\frac{dr}{dE} + u \right) = \gamma(V + u)$$

↑

QUADRIVELOCITÀ

↑

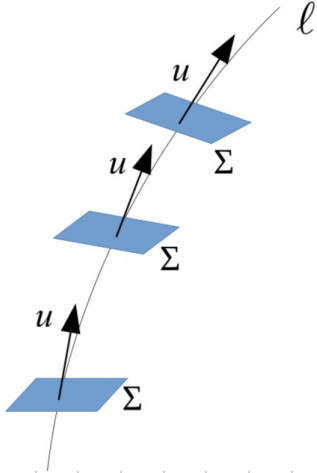
γ

$V \rightarrow$ VELOCITÀ RELATIVA

$$\gamma = -\vec{V} \cdot \vec{u} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

OSSERVAZIONE "u" costante definiremo uno **SPLITTING GLOBALE**

8) Riferimenti in Relatività Generale



$l \in C_w$ è la linea di riferimento

Σ è lo spazio 3-dimensionale ortogonale a u
($\forall p \in l$) $\rightarrow$ PIATTAFORMA SPAZIALE
LOCAL REST SPACE

$u \oplus \Sigma$ è la base del processo di
misura (riproduce localmente lo RS)
(è possibile poi definire COORDINATE ADATTATE)

OSSERVAZIONE: si applica anche ad osservatori
accelerati in RS

3) Le Tecniche delle Proiezioni

PROBLEMA Come si passa da 4-D a 3+1, una volta visto u ?

$u \rightarrow u^a$ (Componente)

PROIETTORE TEMPORALE

$$T(u)^a_b = -u_a u^b$$

PROIETTORE SPAZIALE

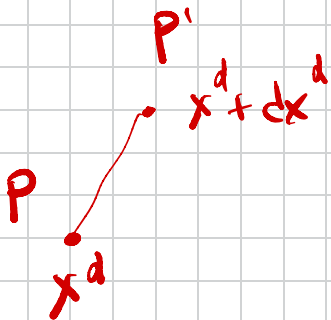
$$P(u)^a_b = \delta^a_b + u^a u_b$$

e.g.: $X^a \rightarrow u^a (-u_b X^b) + [\delta^a_b + u^a u_b] X^b$

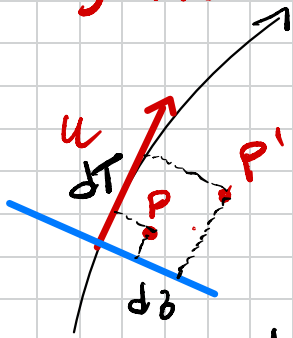
$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = -u_a u_b dx^a dx^b + \gamma_{ab} dx^a dx^b$$

dove $\gamma_{ab} \equiv P(u)_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$

$\hookrightarrow$ **METRIC SPAZIALE**



10) Proiezioni dell'intervallo spaziotemporale



$$dT = -u_a dx^a$$

TEMPO RELATIVO

$$d\delta^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b$$

DISTANZA SPAZIALE

dT è l'intervallo di tempo fra P e P'

$d\delta$ è la distanza spaziale

$\Rightarrow$ MISURE
RELATIVE
A "U"

$$ds^2 = -dT^2 + d\delta^2$$

Esempio (RS)

$$u = \partial_t$$

$$dT = dt, \quad d\delta^2 = dx^2$$

$$u = \gamma(\partial_t + v\partial_x)$$

$$\begin{cases} dT = (dt - v dx) \gamma \\ d\delta = (dx - v dt) \gamma \end{cases}$$

11) Cinematica Relative

Sia $x^a(z_u)$ le linee di universo di una particella.

PROBLEMA Come viene descritto il suo moto da Cu?

VELOCITÀ RELATIVA $v^a = \frac{p^a_B dx^B}{-u_a dx^a}$ $\frac{\text{distanza relativa}}{\text{tempo relativo}}$

Essendo $U^a = \frac{dx^a}{dz_u}$ si ottiene $U^a = \gamma [v^a + u^a]$ (*)
 $\gamma = -U^a u_a$ *vel. rel.*

(*) generalizza il risultato delle RS

IMPULSO : $P^a = E(P, u) [v + u]$ $E(P, u) = m \gamma$

12) Cenni sulle dinamiche relative

Per studiare le dinamiche occorrono operazioni di derivazione e anche essi vanno "proiettati". Entrano in gioco le proprietà delle congruenze che ne definiscono l'evoluzione.

DINAMICA

$$\begin{cases} \frac{D^+ \mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^G + \mathbf{F}^{NG} \\ \frac{D\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{F}^G + \mathbf{F}^{NG}) \end{cases}$$

$\mathbf{F}^G \rightarrow$ caratteristiche delle congruenze (espansione, vorticità, accelerazioni)

$\mathbf{F}^{NG} \rightarrow$ campi non gravitazionali

Analogia
t
rif. non inerziali

13) La necessità di eleggere il dominio di misure

Lungo le linee d'universo $ds^2 = -dT^2 + d\delta^2$, lo spaziotempo è quindi localmente Minkowskiano.

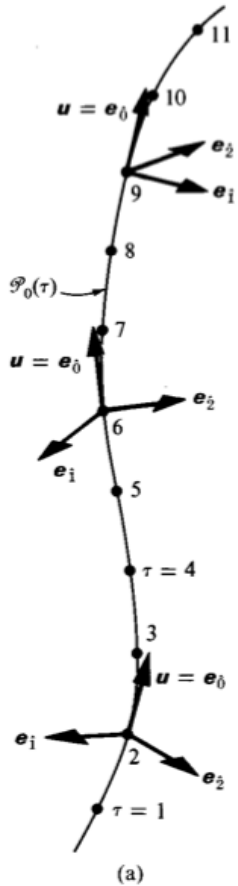
Per descrivere un esperimento è necessario "obtenere" delle linee d'universo.

PROBLEMA

Quale metrica descrive una regione dello spaziotempo, intorno alle linee d'universo dell'osservatore?

- MOTO DELL'OSSERVATORE
- CAMPO GRAVITAZIONALE

13+E) Evoluzione delle Tetrode



u resta tangente alla linea di universo

e_i vettori spaziali non ruotano se soddisfano:

$$\frac{De_i}{d\tau} = (e_i \cdot a)u - (e_i \cdot u)a$$

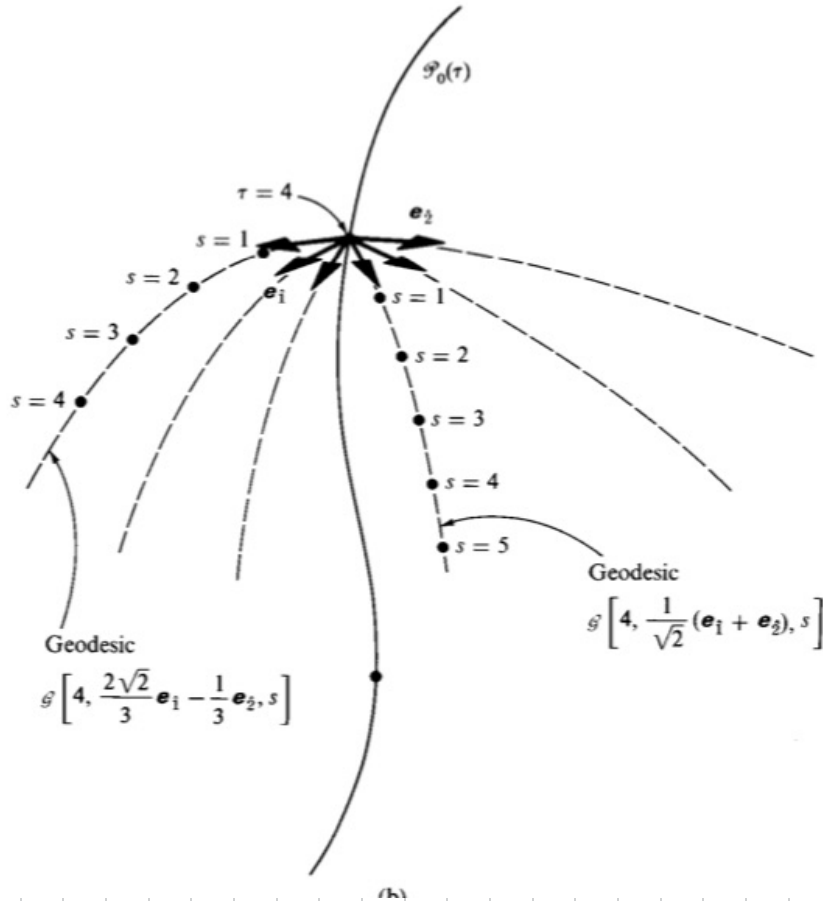
TRASPORTO FERMÍ-WALKER



GIROSCOPIO

Un vettore non trasportato FW ha una rotazione $\vec{\Omega}$ rispetto ad un GIROSCOPIO

14-E) Metrica di Fermi



Come costruiamo
coordinate?

$\tau = \tau$ TEMPO PROPRIO
lungo le linee di
universo di riferimento

x^i DISTANZE PROPRIE
lungo geodetiche spaziali
in Σ

14) Metrica di Fermi

$$ds^2 = - \left(1 + 2 \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{c} \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{x} \right) \cdot c dt d\vec{x} + \delta_{ij} d\vec{x}^i d\vec{x}^j \quad (*)$$

ACCELERAZIONE DELL'OSSERVATORE

ROTAZIONE DELLA TETRADE

$|\vec{x}|$ è la distanza dalla linea d'universo

$(x^i, T) \rightarrow$ INVARIANTI - OSSERVABILI

La miscele in (*) riflette la non inerzialità del riferimento fisico e la rotazione degli assi delle EcEq

$\vec{a} \rightarrow$ NO CADUTA LIBERA

$\vec{\Omega} \rightarrow$ ROTAZIONE RISPETTO A UN GYROSCOPIO

15) Effetti di curvatura

Se vogliamo tenere conto degli effetti pseudotrici in $\hat{X}$,
allora entra in gioco il tensore di curvatura che
è effetti pseudotrici in $\hat{\alpha} \in \hat{Z}$.

$$g_{00} \rightarrow R_{00ij} X^i X^j$$

$$g_{0i} \rightarrow -\frac{2}{3} R_{0jik} X^j X^k$$

$$g_{ij} \rightarrow -\frac{1}{3} R_{ikjl} X^k X^l$$

16) Osservazioni

- Esperimenti Terrestri : matrice & Fermi al I ORDINE
- GWS : in quel caso cerchiamo effetti nuovi:
matrice & Fermi al II ORDINE
- Osservazioni astrofisiche : spazio sinteticamente
piatto, osservatori in periele rispetto alle sorgenti
- Osservatori interni : se siamo nelle Galassie, qual
meccanismo?

Modelli di
Polvere

1) Modelli Newtoniani

Alcuni sistemi, almeno in regioni specifiche, possono essere descritti come "polvere"

SISTEMA $\left\{ \begin{array}{l} \text{isolato} \\ \text{simmetria assiale} \\ \text{stazionario} \end{array} \right.$

• eq. dei momenti $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla \Phi \quad (1)$

rotazione intorno all'asse z

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z \quad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Da (1) $[\vec{v} \parallel \vec{u}_z]$ ottengo $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$

2) Simmetria Cilindrica

• eq. di Poisson $\nabla^2 \Phi = 4\pi q_s \quad (2)$

De $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial q}{\partial z} = 0$

De (1) $w^2 r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ non c'è forze agente nella direzione z

Un sistema del genere ha necessariamente

SIMMETRIA CILINDRICA



SI



NO UN SISTEMA COMPATTO

3) Che cosa cambiare in RG

La RG ha più gradi di libertà (correnti di vortice)

In una metrica

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j$$

la legge del moto di una particella test è

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - 2m \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}_g$$

"FORZA" NEWTONIANA

↳ FORZA DI TIPO LORENTZ

↓
rende possibile un modello di

POLVERE AUTOGRAVITANTE COMPATTO

4) Soluzioni Esatte

polvrex: neutro; simmetria assiale; stazionario; autogravitante

$$T^{\mu\nu} = g u^{\mu} u^{\nu} \quad u^{\mu} = (1, 0, 0, \Omega) \quad \Omega = \frac{dt}{dt} = \frac{u^t}{u^t}$$

$$g_{tt} = \frac{(1 - 2\Omega)^2 - r^2 \Omega^2}{H} \quad g_{te} = \frac{r^2 - r^2}{-H} \Omega + 2 \quad g_{ee} = \frac{r^2 - r^2}{-H}$$

$$\text{con } \Omega = \frac{1}{2} \int \frac{H' dz}{z} \quad \mathcal{F} = 2\eta + r^2 \int \frac{H'}{H} \frac{dz}{z} - \int \frac{H'}{H} z dz$$

$$\mathcal{F}_{,rr} + \mathcal{F}_{,zz} - \frac{1}{r} \mathcal{F}_{,r} = 0$$

TUTTE LE FUNZIONI
DIPENDONO SOLO DA r E z

La soluzione è determinata da $H(z) < 0$; $\mathcal{F}$ funzione qualsiasi.

3) ZAMO

Per studiare le metriche usiamo gli osservatori
ZAMO (zero momento angolare)

$$u_a (\partial_t + \omega \partial_\phi) \quad \text{con} \quad \omega = - \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

VELOCITÀ DELLA POLVERE $v^\phi = \frac{z}{r} = v$

MOMENTO ANGOLARE PER UNITÀ DI MASSA

$$z = v r$$

$$\Omega r = \omega r - v \gamma^2 H$$

$$-\gamma^2 H \rightarrow 1$$

VELOCITÀ
COORDINATA

4 $\Omega r = \omega r + v$ — VELOCITÀ RELATIVA

VELOCITÀ DEGLI ZAMO

6) da soluzione in regime di campo debole

Dalla soluzione esatta otteniamo, nel limite di basso energia:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2} - \frac{\Psi^2}{c^2 r^2} \right) dt^2 - 2\frac{\Psi}{c} c dt dr + r^2 \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2} \right) (dr^2 + d\theta^2)$$

Dove 1) Φ

Potenziale "Newtoniano"

2) Ψ

Termine di dragging

$$1) \quad \nabla^2 \Phi + \frac{(\partial_z \Psi)^2 + (\partial_r \Psi - 2\Psi/r)^2}{2r^2} = -4\pi G \rho$$

EQUAZIONE DI

POISSON MODIFICATA



SORGENTI AGGIUNTIVE

1) Il ruolo dell'equazione omogenea

2) Ψ è soluzione di $\partial_{zz}\Psi + \partial_{rr}\Psi - \frac{\partial_r\Psi}{r} = 0$ (*) EQUAZIONE DI GRAD-SHAFRANDU

Ψ NON DIPENDE DALLE SORGENTI AL PRIMO ORDINE
SIGNIFICATIVO

È diverso da quello che succede nel limite di campo debole delle eq. di Einstein (Lense-Thirring), dove la (*) diventa

$$\partial_{zz}\Psi + \partial_{rr}\Psi - \frac{\partial_r\Psi}{r} = \frac{4\pi G}{c} \rho \quad (**)$$

Da (**) Ψ è $O(\frac{1}{c})$, ma non è la stessa cosa al 1° ordine significativo

8) Sul significato fisico di Ψ

Ψ , soluzione dell'omogenea, ha un ruolo fondamentale nell'equilibrio del sistema.

Le sorgenti (polveri) si muovono su geodetiche e r e z costanti.

→ TERMINE DI TIPO LORENTZ

$$\bullet z \rightarrow 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \dot{t} + \frac{\Psi}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (1)$$

$$\bullet r \rightarrow 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \dot{t} + r \dot{t}^2 + \frac{\Psi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi}{r} \right) \quad (2)$$

(1) il termine di tipo Lorentz è necessario per bilanciare la componente verticale delle forze Newtoniane

3) Peculiarità

- ★ l'esistenza di punto sistema dipende da Ψ ,
che NON PUÒ ESSERE TRASCURABILE rispetto a Φ
- ★ il limite di bene energia NON COINCIDE CON LA
FISICA NEWTONIANA
- ★ Ψ si interpreta come MASSA AGGIUNTIVA
nell'equazione di Poisson
- ★ possiamo avere dei profili di velocità
ASINTOTICAMENTE PIATTI

10) Lensing gravitazionale

Studiamo il lensing nella materia di campo debole.

Possiamo applicare un principio variazionale (Fermat) alla Lagrangiana

$$w(x^i, \dot{x}^i) = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{g_{ij}(x^i) \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{g_{0i}(x^i) \dot{x}^i}{g_{00}(x^i)} \right)$$

"indice di
rifrazione"

$w_0(x^i)$

contributo Newtoniano

$$w^i(x^i) = - \frac{g_{0i}}{g_{00}}$$

contributo gravitomagnetico

11) Angolo di deflessione

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene

$$\vec{d} = \int_{\sigma-p} n_0' (\nabla_\perp n_0 + \vec{v} \wedge \vec{\nabla} n_0) d\lambda$$

↑
vettore tangente

Il contributo geomagnetico/droglia è

$$\vec{d}_{GM} = \int_{\sigma-p} (\vec{v} \wedge \vec{\nabla} n_0) d\lambda$$

Per calcolarlo serve una soluzione dell'equazione di GRAD-SHAFER

12) Impatto di Ψ sul leasing

1) Ψ MODIFICA la relazione fra Ξ e la sorpresa

2) Ψ APPARE nei Termini in disparte

1) + 2) $\Rightarrow$ può essere interpretato come
meno efficienza

3) Ψ determina una peculiare distorsione delle
immagini -

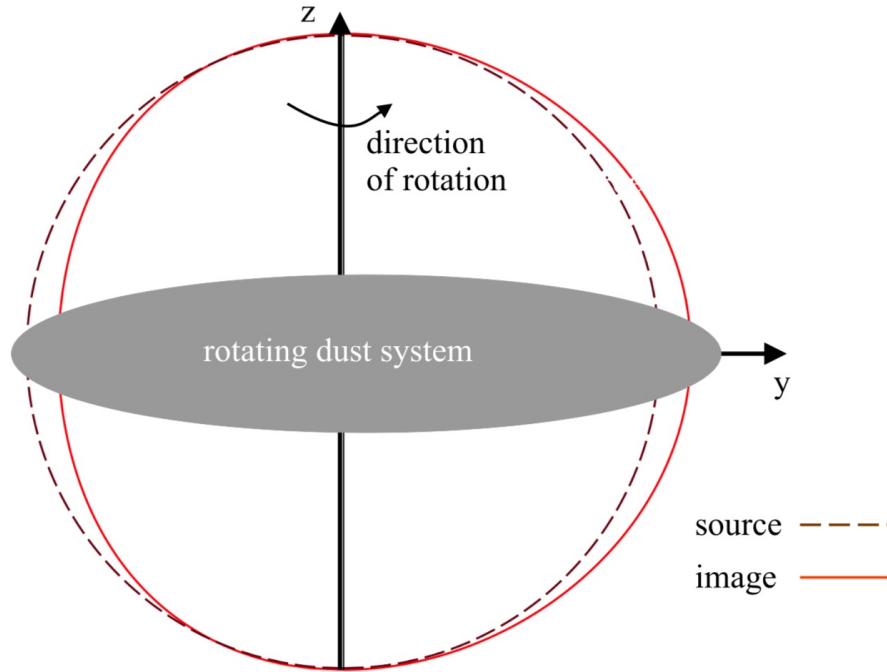


FIG. 2. The sources of light rays are distributed along a circle in the plane of the lens; the dust system rotates about the z axis; the resulting image exhibits a deformation determined by the gravitomagnetic term.

More in these publications

1. Gravitational lensing observables in stationary and axisymmetric solutions in general relativity **e-Print: 2506.17192 [gr-qc]**
2. Low-energy limit of stationary and axisymmetric solutions in general relativity **Phys.Rev.D 111 (2025) 10, 104066 • e-Print: 2412.08598 [gr-qc]**
3. Particle motion in a rotating dust spacetime **Phys.Rev.D 109 (2024) 12, 124011 • e-Print: 2310.04157 [gr-qc]**
4. Stationary rotating and axially symmetric dust systems as peculiar General Relativistic objects **JCAP 02 (2024) 025 • e-Print: 2306.04832 [gr-qc]**
5. Can general relativity play a role in galactic dynamics? **Phys.Rev.D 106 (2022) 12, L121501 • e-Print: 2211.11815 [gr-qc]**
6. Galactic dark matter effects from purely geometrical aspects of general relativity **Phys.Rev.D 106 (2022) 4, 044061 • e-Print: 2205.03091 [gr-qc]**
7. Galactic dynamics in general relativity: the role of gravitomagnetism **Class.Quant.Grav. 39 (2022) 22, 225015 • e-Print: 2112.08290 [gr-qc]**