HYBRID THEORY-SIMULATIONS MACHINE LEARNING APPROACH TO BACKTRACING

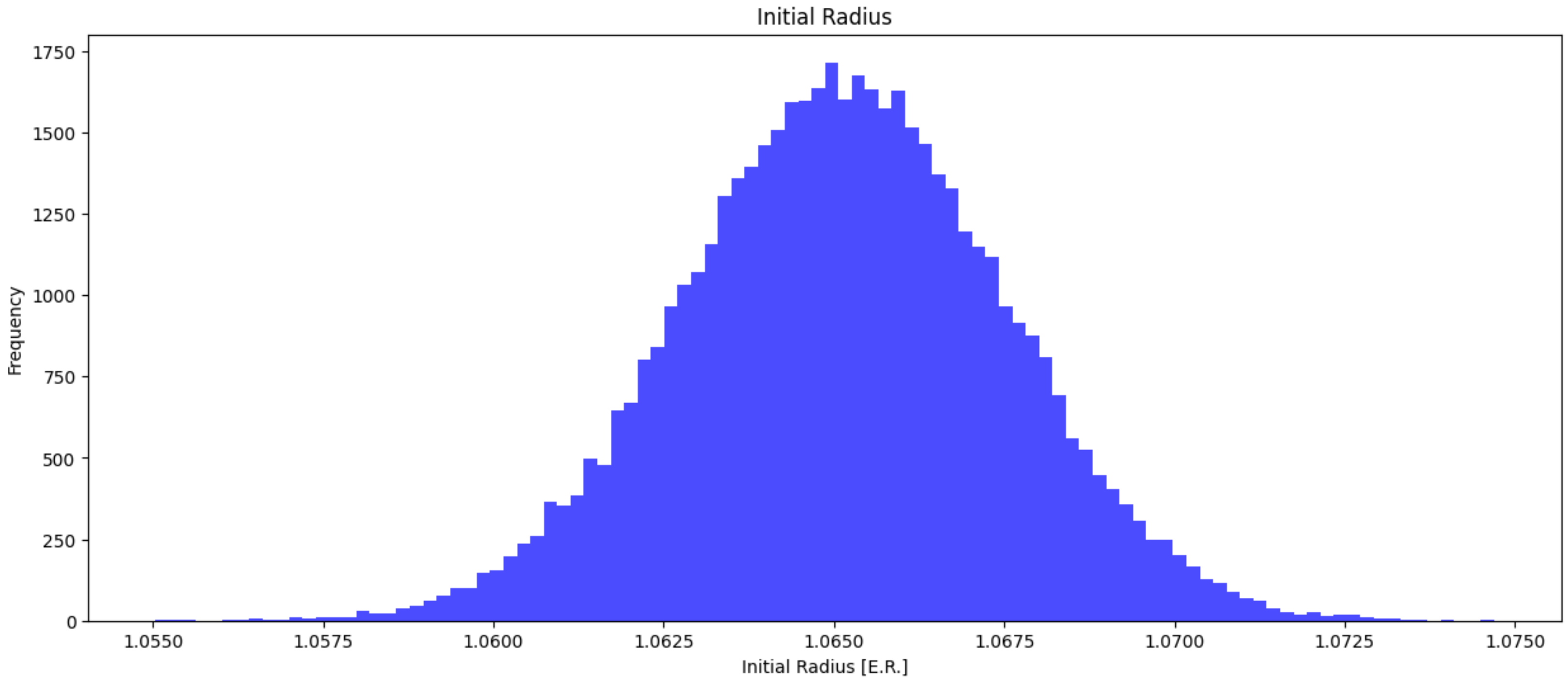
STARTING POINT: RUNGE-KUTTA TRAJECTORIES

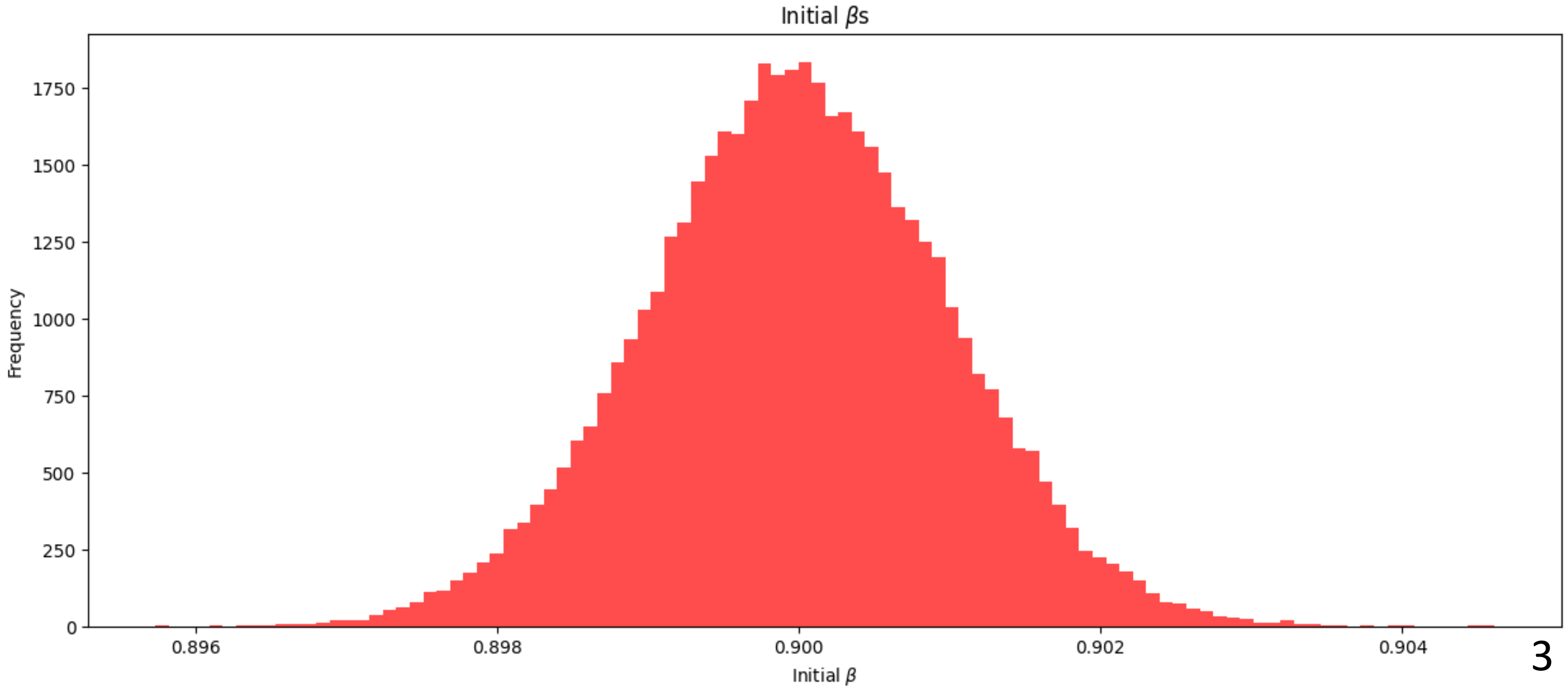
- Protons
- Earth magnetic dipole,
- Generated with RK45,
- Initial conditions generated with Guassian distributions for moduli of position and velocity, uniform distributions for theta and phi.

1 E.R. = 6371 km
ISS altitude ∽ (400 + 6371)km∽ 1.06 E.R.

- Trajectories generated at CNAF
- 10’000 points for each trajectory

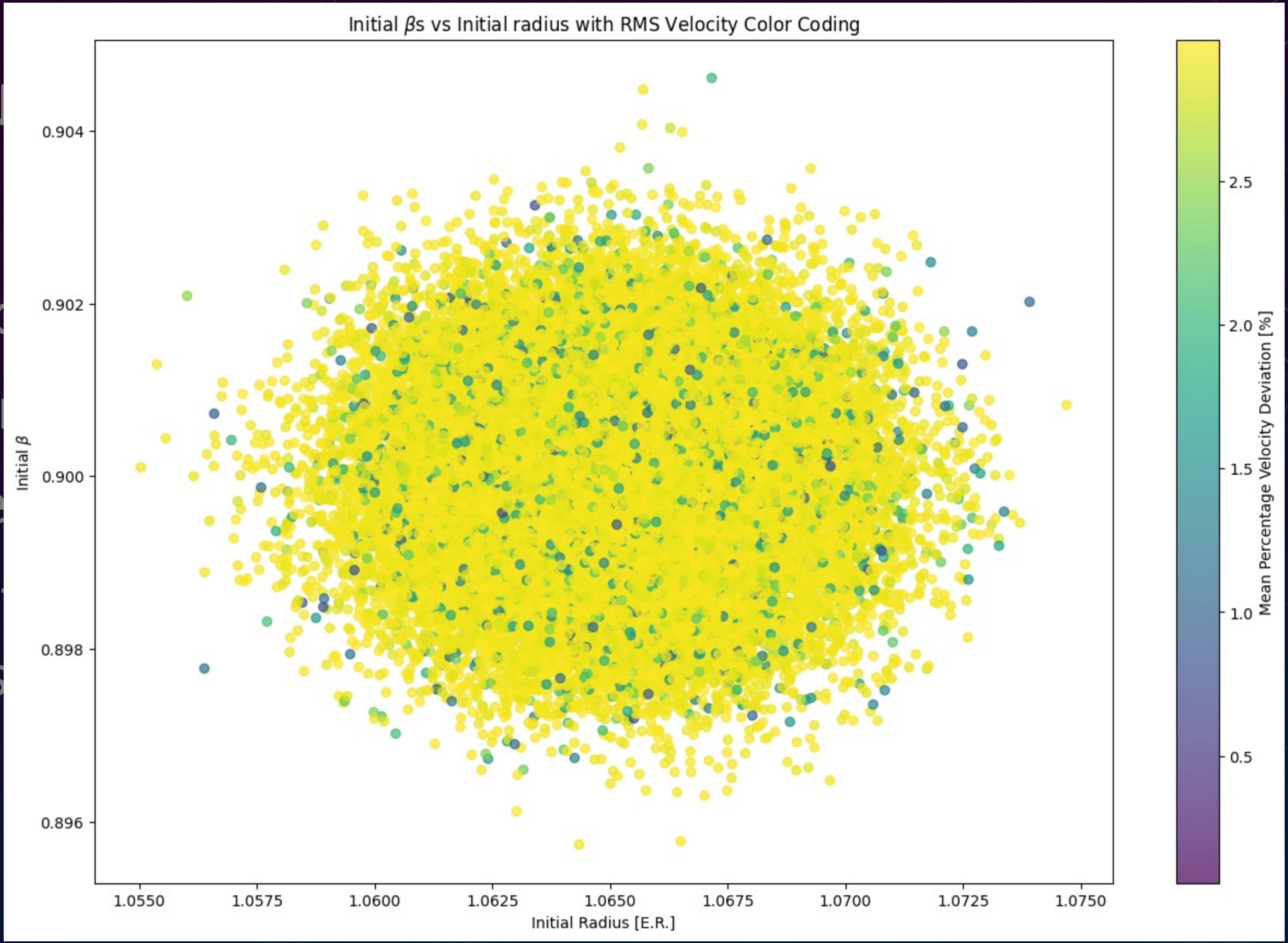
c ∽ 47.05 E.R./s





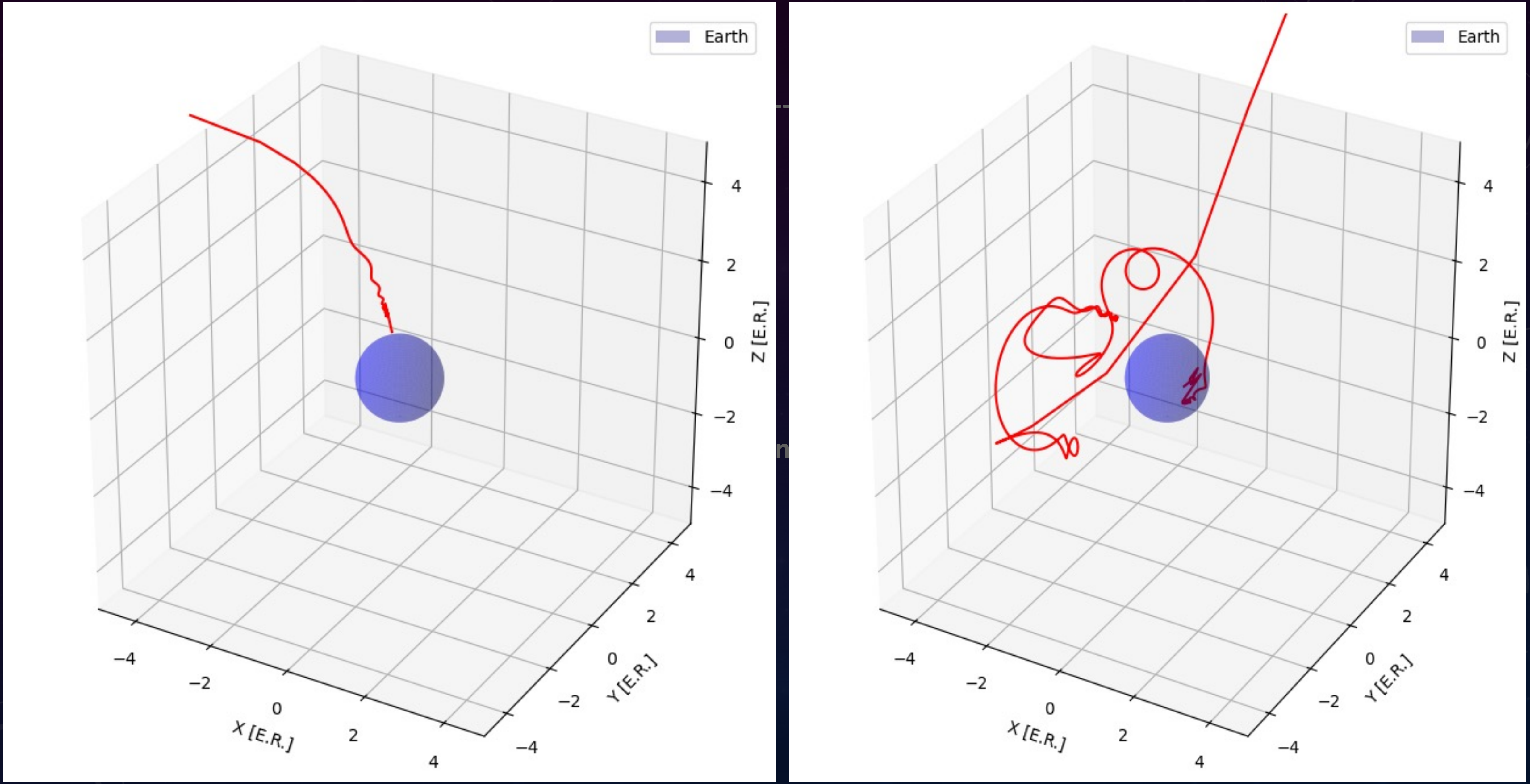
STARTIN

- Pro
- Ear
- Ge
- Ini
dis
un



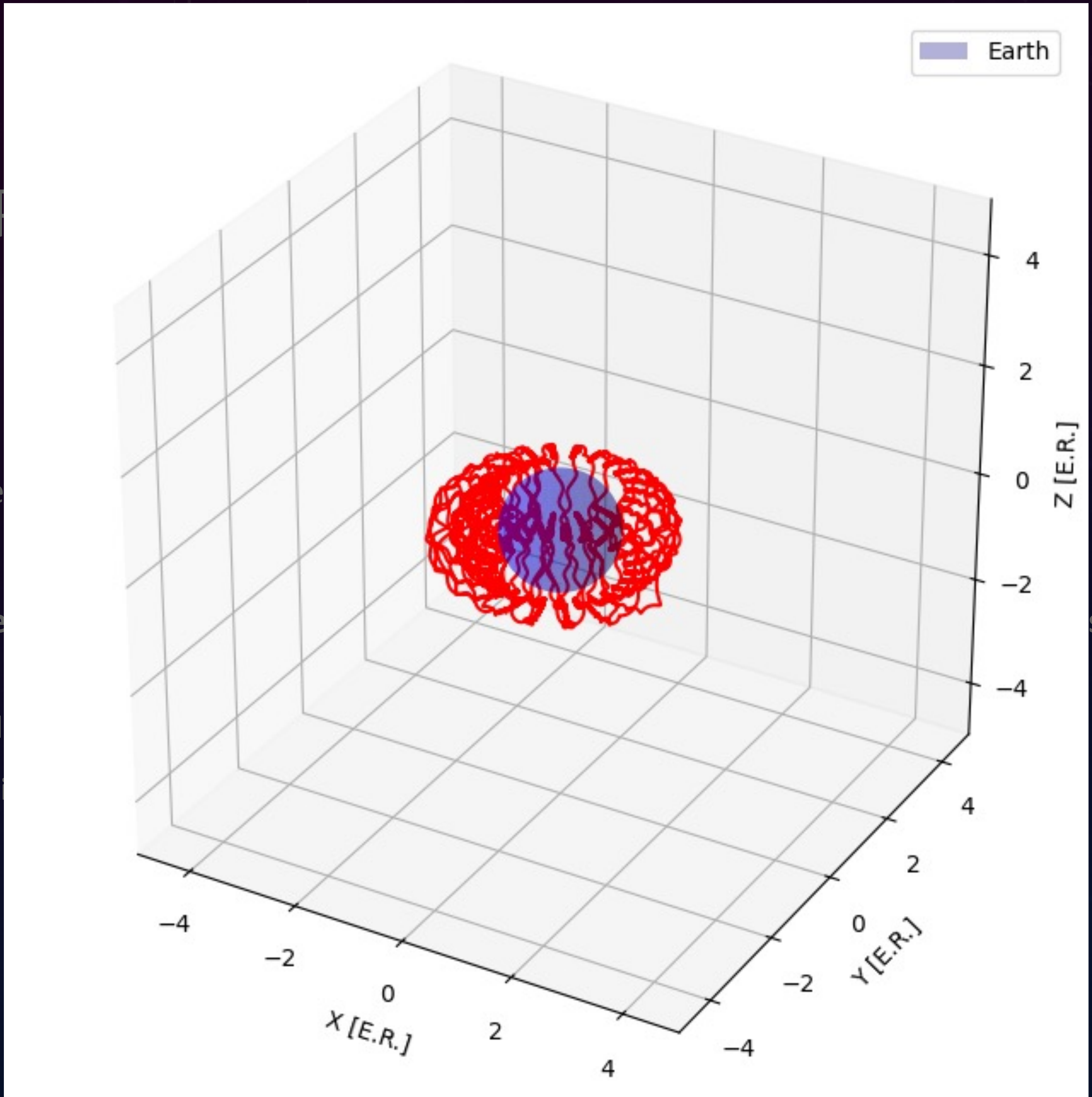
STARTING POINT: RUNGE-KUTTA

- A trajectory is a sequence of timestamps,
- Single timestamp: $[t, x, y, z, v^x, v^y, v^z, a^x, a^y, a^z]$,
- **Trajectories are separated into two groups: those originated outside the Earth's magnetosphere and those within it**
  - **If there is a value of r>10E.R. : outside**
  - **Otherwise: inside**


Earth
X [E.R.]
Y [E.R.]
Z [E.R.]
−4
−2
0
2
4
Earth
X [E.R.]
Y [E.R.]
Z [E.R.]
−4
−2
0
2
4

STARTING P

- A trajectory is a se
- Single timestamp:
- **Trajectories are se** **sphere and those within it**
  - **If there is a val**
  - **Otherwise: insi**



ML DATASET: FRAGMENT OF TRAJECTORY

$$\Delta t_k = t_k - t_i \qquad \vec{a}_k = \vec{v}_k \times \vec{B}(\vec{r}_k)$$

NORMALIZED MASS AND CHARGE:
m=1
q=1

Δt_{i-N}	…	…	…	…	…	…	t_i	…	…	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i-N}	…	…	…	…	…	…	x_i	…	…	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i-N}	…	…	…	…	…	…	y_i	…	…	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i-N}	…	…	…	…	…	…	z_i	…	…	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	v_i^x	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	v_i^y	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	v_i^z	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^z
a_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	a_i^x	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^x
a_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	a_i^y	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^y
a_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	a_i^z	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^z

ML DATASET

CENTRAL TIMESTAMP

Δt_{i-N}	…	…	…	…	…	…	t_i	…	…	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i-N}	…	…	…	…	…	…	x_i	…	…	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i-N}	…	…	…	…	…	…	y_i	…	…	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i-N}	…	…	…	…	…	…	z_i	…	…	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	v_i^x	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	v_i^y	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	v_i^z	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^z
a_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	a_i^x	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^x
a_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	a_i^y	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^y
a_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	a_i^z	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^z

ML DATASET

PREVIOUS MATRIX

Δt_{i-N}	…	…	…	…	…	…	t_i	…	…	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i-N}	…	…	…	…	…	…	x_i	…	…	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i-N}	…	…	…	…	…	…	y_i	…	…	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i-N}	…	…	…	…	…	…	z_i	…	…	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	v_i^x	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	v_i^y	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	v_i^z	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^z
a_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	a_i^x	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^x
a_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	a_i^y	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^y
a_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	a_i^z	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^z

ML DATASET

FOLLOWING MATRIX

Δt_{i-N}	…	…	…	…	…	…	t_i	…	…	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i-N}	…	…	…	…	…	…	x_i	…	…	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i-N}	…	…	…	…	…	…	y_i	…	…	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i-N}	…	…	…	…	…	…	z_i	…	…	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	v_i^x	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	v_i^y	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	v_i^z	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^z
a_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	a_i^x	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^x
a_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	a_i^y	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^y
a_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	a_i^z	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^z

ML DATASET

Δt_{i-N}	…	…	…	…	…	…	t_i	…	…	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i-N}	…	…	…	…	…	…	x_i	…	…	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i-N}	…	…	…	…	…	…	y_i	…	…	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i-N}	…	…	…	…	…	…	z_i	…	…	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	v_i^x	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	v_i^y	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	v_i^z	…	…	…	…	…	…	v_{i+N}^z
a_{i-N}^x	…	…	…	…	…	…	a_i^x	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^x
a_{i-N}^y	…	…	…	…	…	…	a_i^y	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^y
a_{i-N}^z	…	…	…	…	…	…	a_i^z	…	…	…	…	…	…	a_{i+N}^z

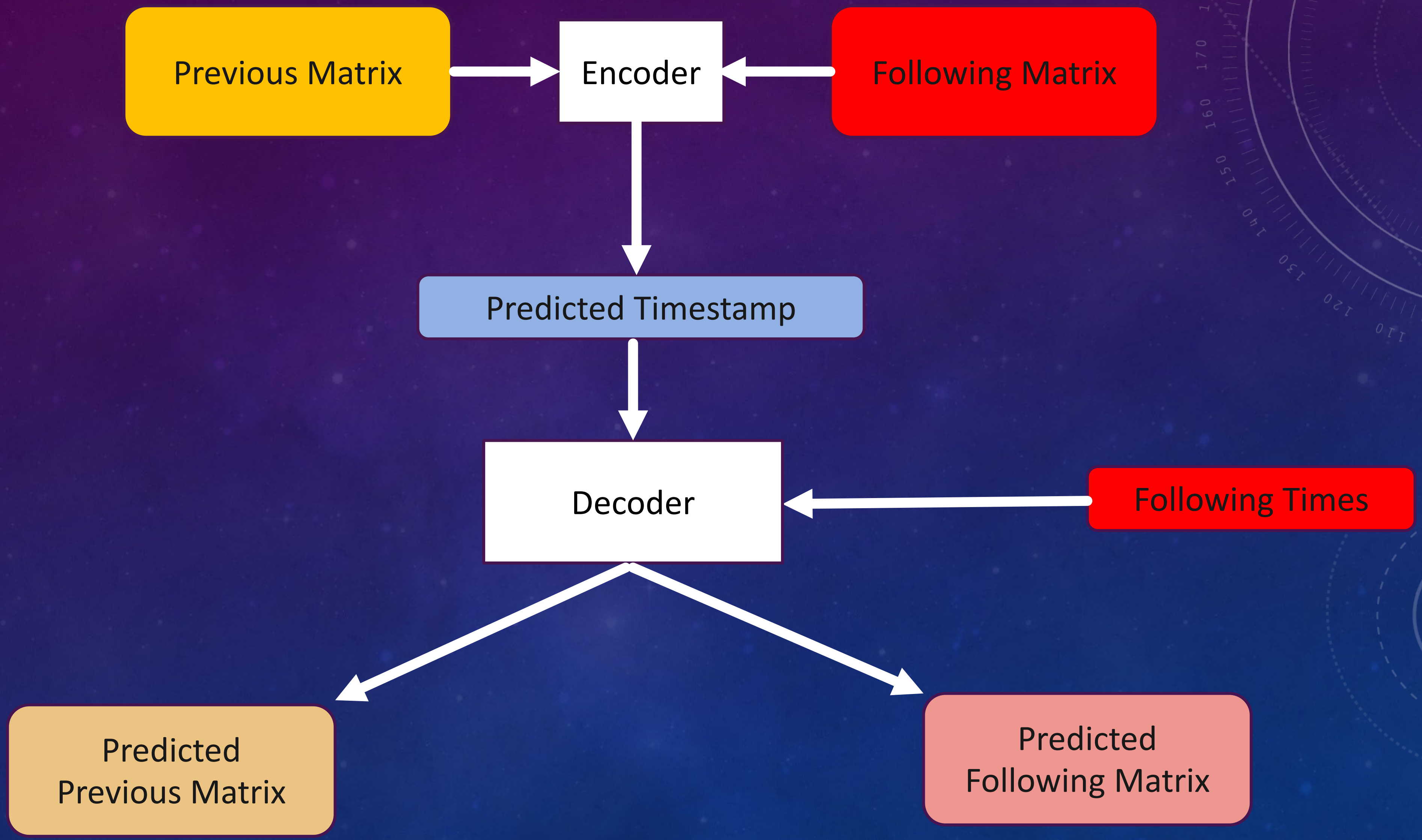
NETWORK INPUT

Previous Matrix					
Δt_{i-N}	…	…	…	…	Δt_{i-1}
x_{i-N}	…	…	…	…	x_{i-1}
y_{i-N}	…	…	…	…	y_{i-1}
z_{i-N}	…	…	…	…	z_{i-1}
v^x_{i-N}	…	…	…	…	v^x_{i-1}
v^y_{i-N}	…	…	…	…	v^y_{i-1}
v^z_{i-N}	…	…	…	…	v^z_{i-1}
a^x_{i-N}	…	…	…	…	a^x_{i-1}
a^y_{i-N}	…	…	…	…	a^y_{i-1}
a^z_{i-N}	…	…	…	…	a^z_{i-1}

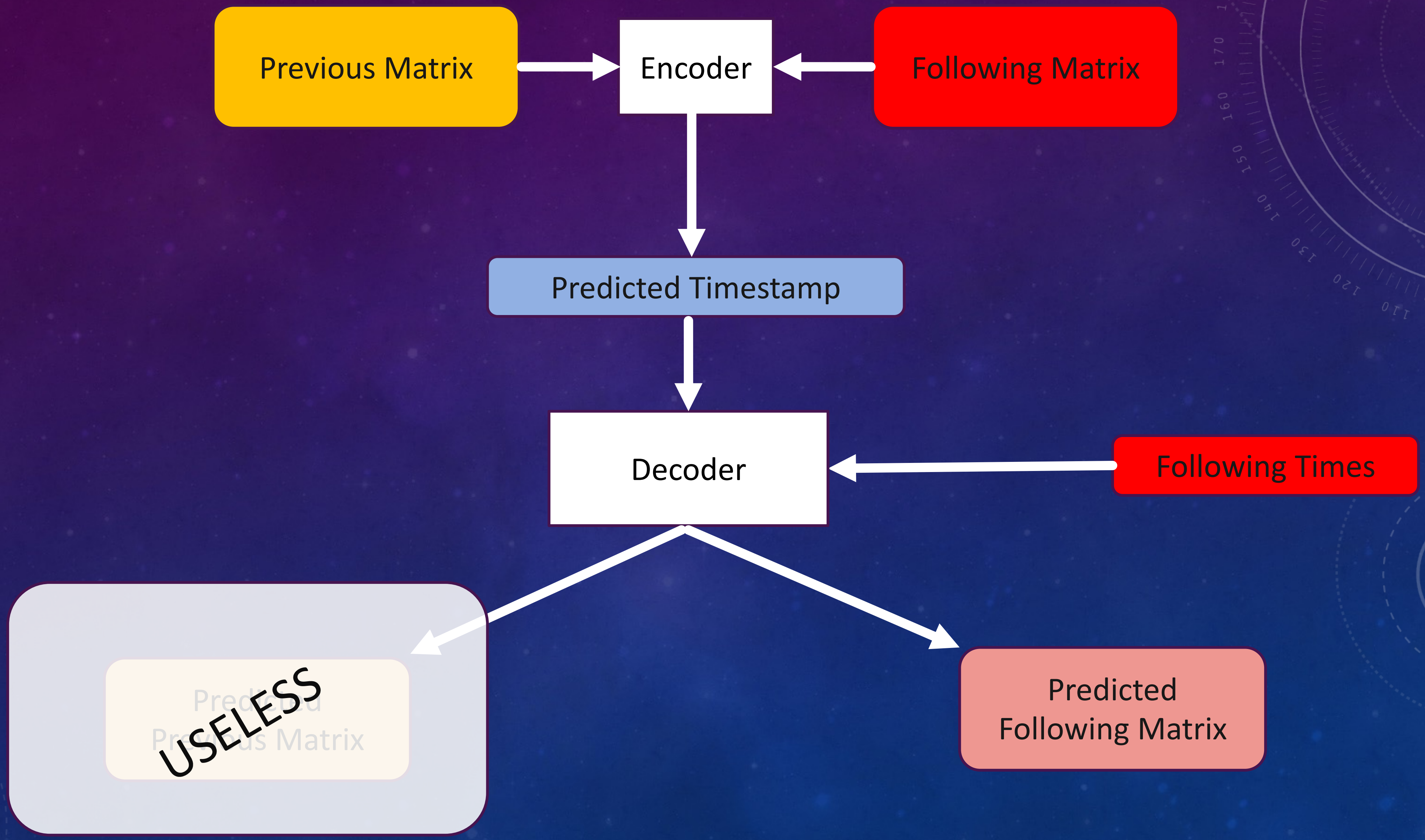
Following Matrix					
Δt_{i+1}	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i+1}	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i+1}	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i+1}	…	…	…	…	z_{i+N}
v^x_{i+1}	…	…	…	…	v^x_{i+N}
v^y_{i+1}	…	…	…	…	v^y_{i+N}
v^z_{i+1}	…	…	…	…	v^z_{i+N}
a^x_{i+1}	…	…	…	…	a^x_{i+N}
a^y_{i+1}	…	…	…	…	a^y_{i+N}
a^z_{i+1}	…	…	…	…	a^z_{i+N}

Following Times					
Δt_{i+1}	…	…	…	…	Δt_{i+N}

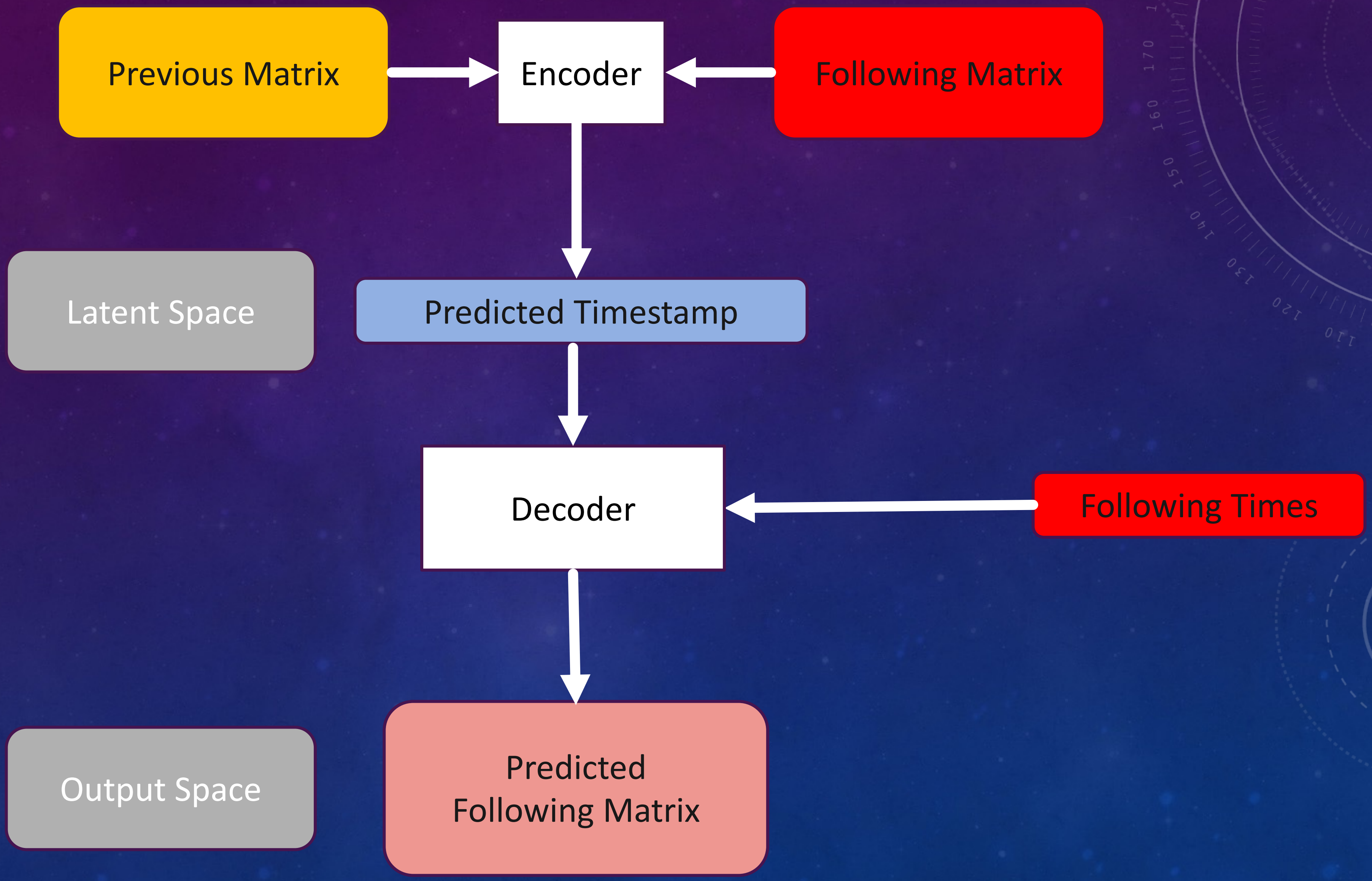
NETWORK ARCHITECTURE: VARIATIONAL AUTO-ENCODER



NETWORK ARCHITECTURE: VARIATIONAL AUTO-ENCODER



NETWORK ARCHITECTURE: VARIATIONAL AUTO-ENCODER



NETWORK OUTPUT

Predicted Timestamp
x_i
y_i
z_i
v_i^x
v_i^y
v_i^z

Predicted Following Matrix					
x_{i+1}	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i+1}	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i+1}	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i+1}^x	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i+1}^y	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i+1}^z	…	…	…	…	v_{i+N}^z

TRAINING EVENT

Previous Matrix

Δt_{i-N}	…	…	…	…	Δt_{i-1}
x_{i-N}	…	…	…	…	x_{i-1}
y_{i-N}	…	…	…	…	y_{i-1}
z_{i-N}	…	…	…	…	z_{i-1}
v^x_{i-N}	…	…	…	…	v^x_{i-1}
v^y_{i-N}	…	…	…	…	v^y_{i-1}
v^z_{i-N}	…	…	…	…	v^z_{i-1}
a^x_{i-N}	…	…	…	…	a^x_{i-1}
a^y_{i-N}	…	…	…	…	a^y_{i-1}
a^z_{i-N}	…	…	…	…	a^z_{i-1}

t_i
x_i
y_i
z_i
v^x_i
v^y_i
v^z_i
a^x_i
a^y_i
a^z_i

Following Matrix

Δt_{i+1}	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i+1}	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i+1}	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i+1}	…	…	…	…	z_{i+N}
v^x_{i+1}	…	…	…	…	v^x_{i+N}
v^y_{i+1}	…	…	…	…	v^y_{i+N}
v^z_{i+1}	…	…	…	…	v^z_{i+N}
a^x_{i+1}	…	…	…	…	a^x_{i+N}
a^y_{i+1}	…	…	…	…	a^y_{i+N}
a^z_{i+1}	…	…	…	…	a^z_{i+N}

CURRENT EVENT

OUTPUT

Predicted Timestamp
x_i
y_i
z_i
v_i^x
v_i^y
v_i^z

Predicted Following Matrix					
x_{i+1}	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i+1}	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i+1}	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i+1}^x	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i+1}^y	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i+1}^z	…	…	…	…	v_{i+N}^z

CURRENT OUTPUT

TRAINING EVENT

Previous Matrix					
Δt_{i-N}	…	…	…	…	Δt_{i-1}
x_{i-N}	…	…	…	…	x_{i-1}
y_{i-N}	…	…	…	…	y_{i-1}
z_{i-N}	…	…	…	…	z_{i-1}
v^x_{i-N}	…	…	…	…	v^x_{i-1}
v^y_{i-N}	…	…	…	…	v^y_{i-1}
v^z_{i-N}	…	…	…	…	v^z_{i-1}
a^x_{i-N}	…	…	…	…	a^x_{i-1}
a^y_{i-N}	…	…	…	…	a^y_{i-1}
a^z_{i-N}	…	…	…	…	a^z_{i-1}

t_i
x_i
y_i
z_i
v^x_i
v^y_i
v^z_i
a^x_i
a^y_i
a^z_i

Following Matrix					
Δt_{i+1}	…	…	…	…	Δt_{i+N}
x_{i+1}	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i+1}	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i+1}	…	…	…	…	z_{i+N}
v^x_{i+1}	…	…	…	…	v^x_{i+N}
v^y_{i+1}	…	…	…	…	v^y_{i+N}
v^z_{i+1}	…	…	…	…	v^z_{i+N}
a^x_{i+1}	…	…	…	…	a^x_{i+N}
a^y_{i+1}	…	…	…	…	a^y_{i+N}
a^z_{i+1}	…	…	…	…	a^z_{i+N}

TRAINING EVENT

Previous Matrix					
Δt_i	…	…	…	…	Δt_{i+N-1}
x_i	…	…	…	…	x_{i+N-1}
y_i	…	…	…	…	y_{i+N-1}
z_i	…	…	…	…	z_{i+N-1}
v_i^x	…	…	…	…	v_{i+N-1}^x
v_i^y	…	…	…	…	v_{i+N-1}^y
v_i^z	…	…	…	…	v_{i+N-1}^z
a_i^x	…	…	…	…	a_{i+N-1}^x
a_i^y	…	…	…	…	a_{i+N-1}^y
a_i^z	…	…	…	…	a_{i+N-1}^z

t_{i+N}
x_{i+N}
y_{i+N}
z_{i+N}
v_{i+N}^x
v_{i+N}^y
v_{i+N}^z
a_{i+N}^x
a_{i+N}^y
a_{i+N}^z

Following Matrix					
Δt_{i+N+1}	…	…	…	…	Δt_{i+2N}
x_{i+N+1}	…	…	…	…	x_{i+2N}
y_{i+N+1}	…	…	…	…	y_{i+2N}
z_{i+N+1}	…	…	…	…	z_{i+2N}
v_{i+N+1}^x	…	…	…	…	v_{i+2N}^x
v_{i+N+1}^y	…	…	…	…	v_{i+2N}^y
v_{i+N+1}^z	…	…	…	…	v_{i+2N}^z
a_{i+N+1}^x	…	…	…	…	a_{i+2N}^x
a_{i+N+1}^y	…	…	…	…	a_{i+2N}^y
a_{i+N+1}^z	…	…	…	…	a_{i+2N}^z

NEXT EVENT

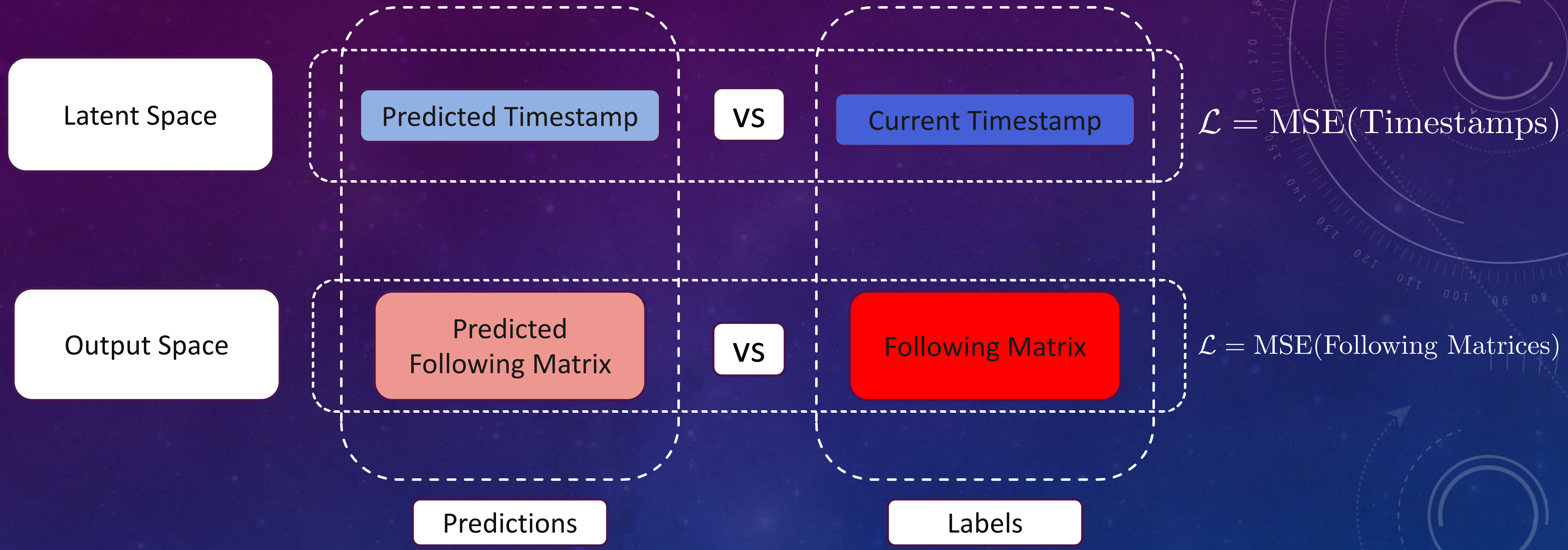
OUTPUT

Predicted Timestamp
x_{i+N}
y_{i+N}
z_{i+N}
v^x_{i+N}
v^y_{i+N}
v^z_{i+N}

PredictedFollowing Matrix					
x_{i+N+1}	…	…	…	…	x_{i+2N}
y_{i+N+1}	…	…	…	…	y_{i+2N}
z_{i+N+1}	…	…	…	…	z_{i+2N}
v^x_{i+N+1}	…	…	…	…	v^x_{i+2N}
v^y_{i+N+1}	…	…	…	…	v^y_{i+2N}
v^z_{i+N+1}	…	…	…	…	v^z_{i+2N}

NEXT OUTPUT

TRAINING LOSS



$$\mathcal{L}_{\mathrm{tot}} = \mathrm{MSE}(\mathrm{Timestamps}) + \mathrm{MSE}(\mathrm{Following\ Matrices})$$

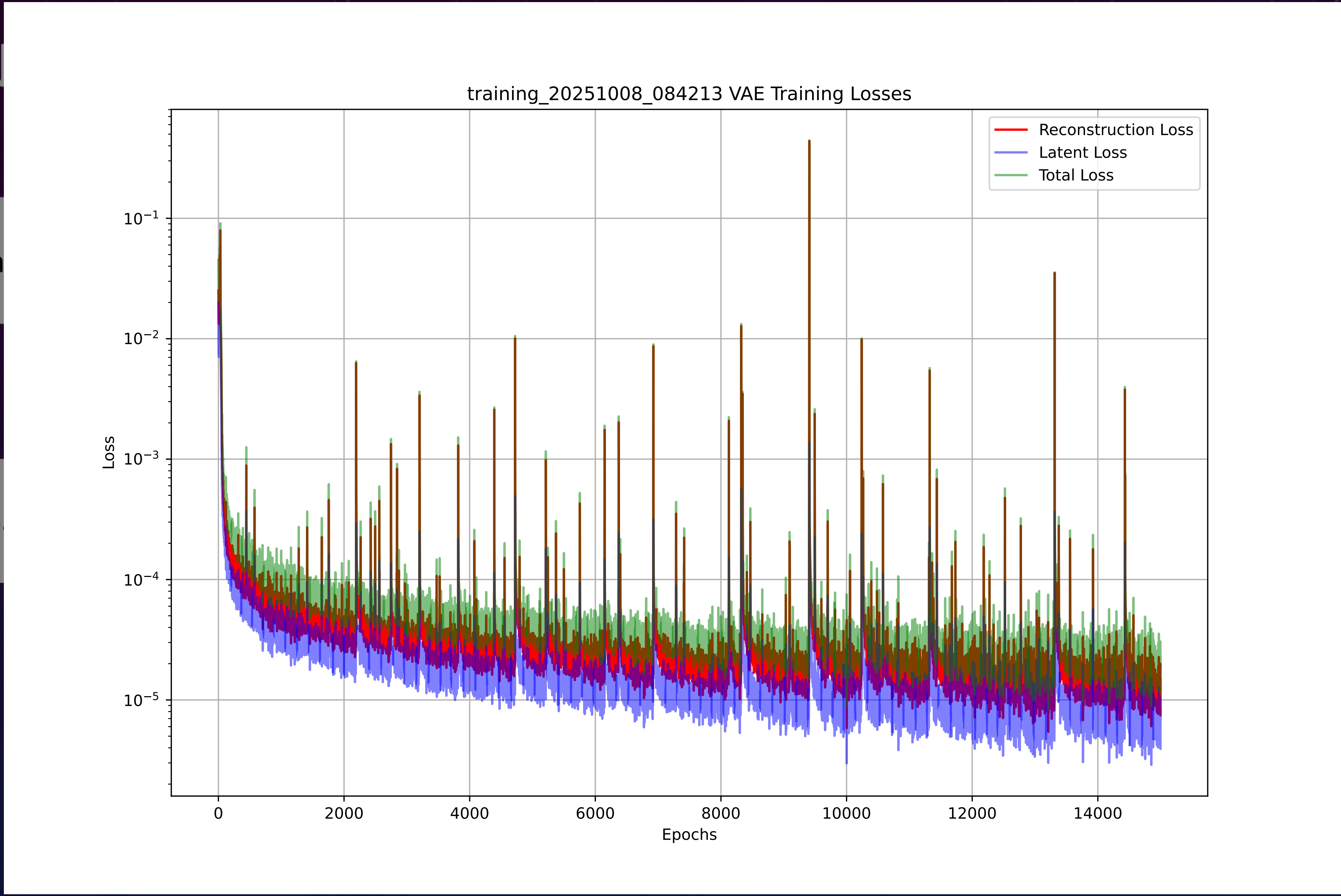
TRAININ

Latent Spa

Output Sp

Timestamps)

owing Matrices)



$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \text{MSE}(\text{Timestamps}) + \text{MSE}(\text{Following Matrices})$$

TRAINING LOSS

Latent Space

Predicted Timestamp vs Current Timestamp

Output Space

Predicted Following Matrix vs Following Matrix

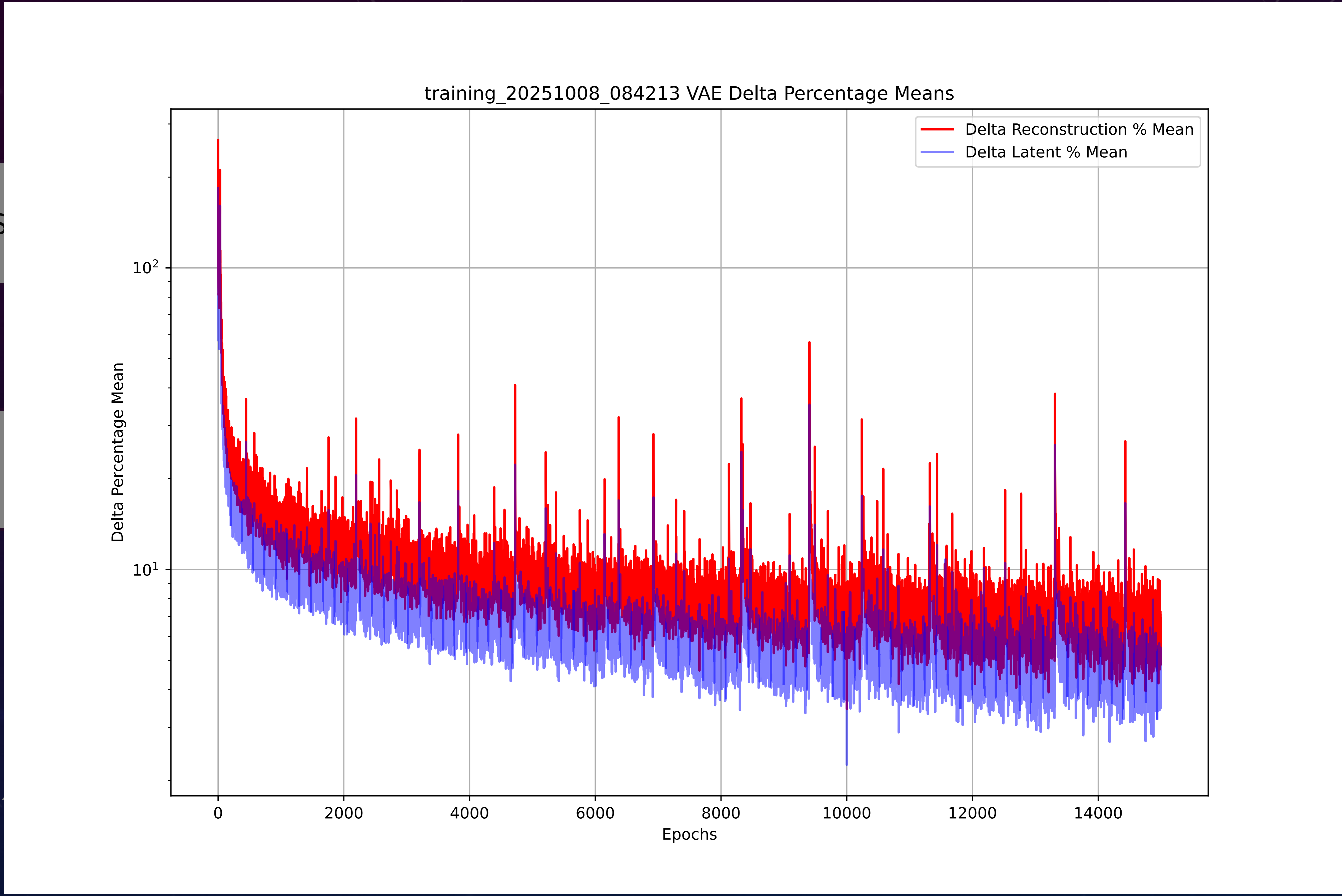
Predictions

Labels

TRAINI

Latent S

Output



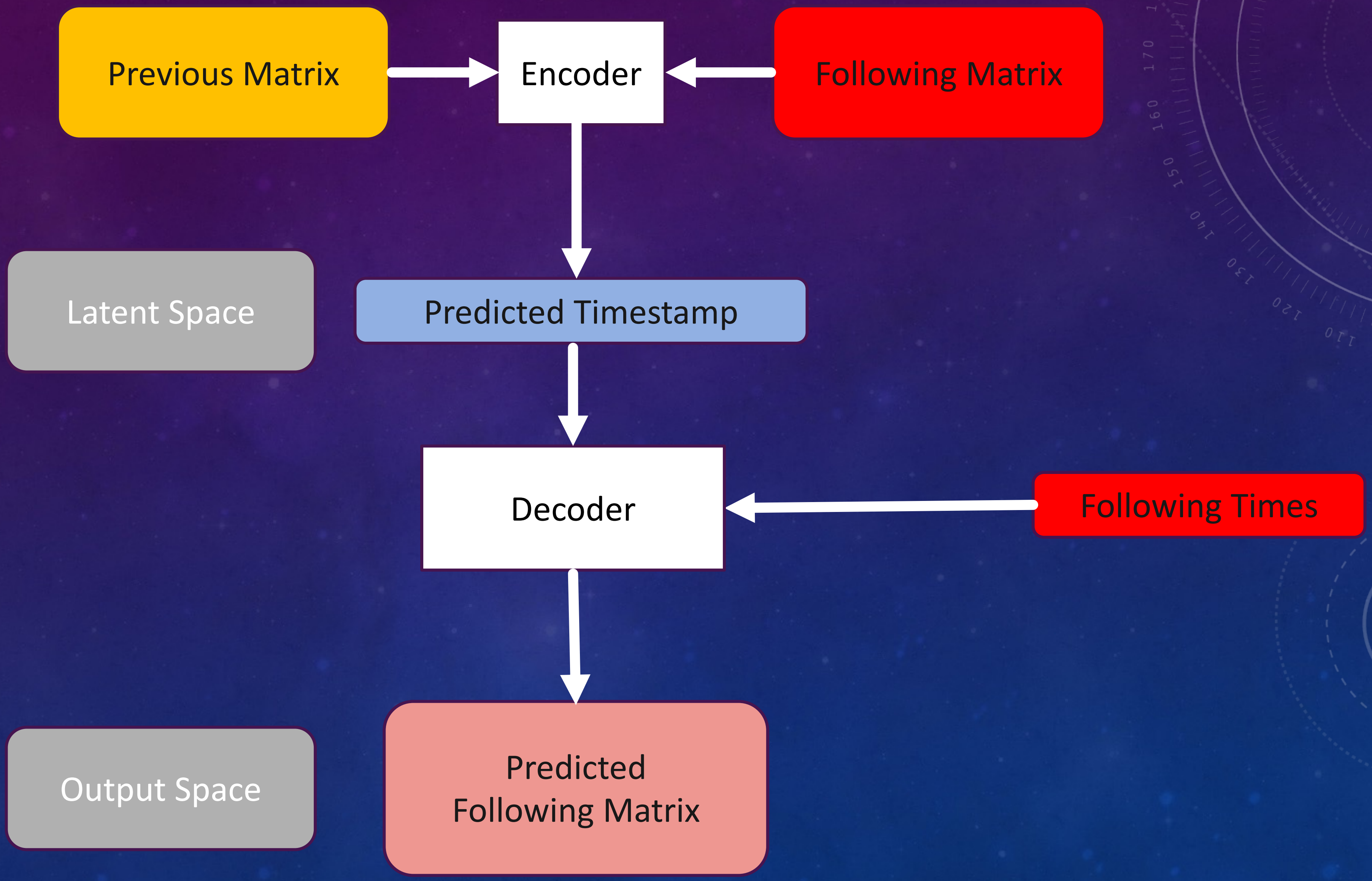
mestamps)

ing Matrices)

TRAINING LOSS

	Predictions		Labels	
Latent Space	Predicted Timestamp	vs	Current Timestamp	~3.13%
Output Space	Predicted Following Matrix	vs	Following Matrix	~3.92%

PREDICTION: CONSTRUCTION OF THE TRAJECTORY



PREDICTION: CONSTRUCTION OF THE TRAJECTORY

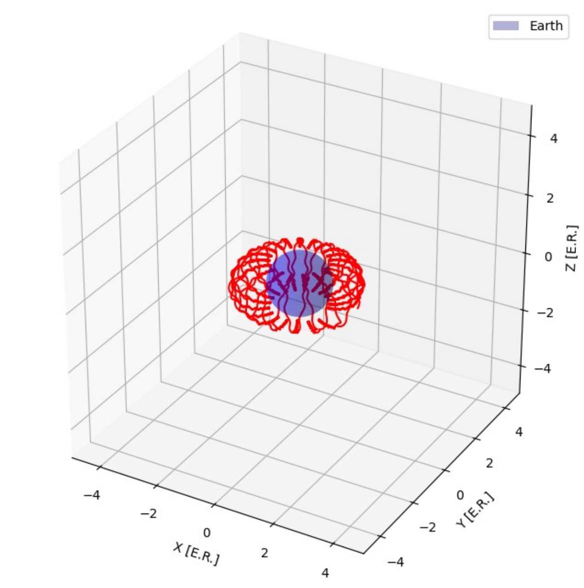
x_i	y_i	z_i	v_i^x	v_i^y	v_i^z

Meseured particle
x_0
y_0
z_0
v_0^x
v_0^y
v_0^z
a_0^x
a_0^y
a_0^z

Following Times					
Δt_{i+1}	…	…	…	…	Δt_{i+N}

Decoder

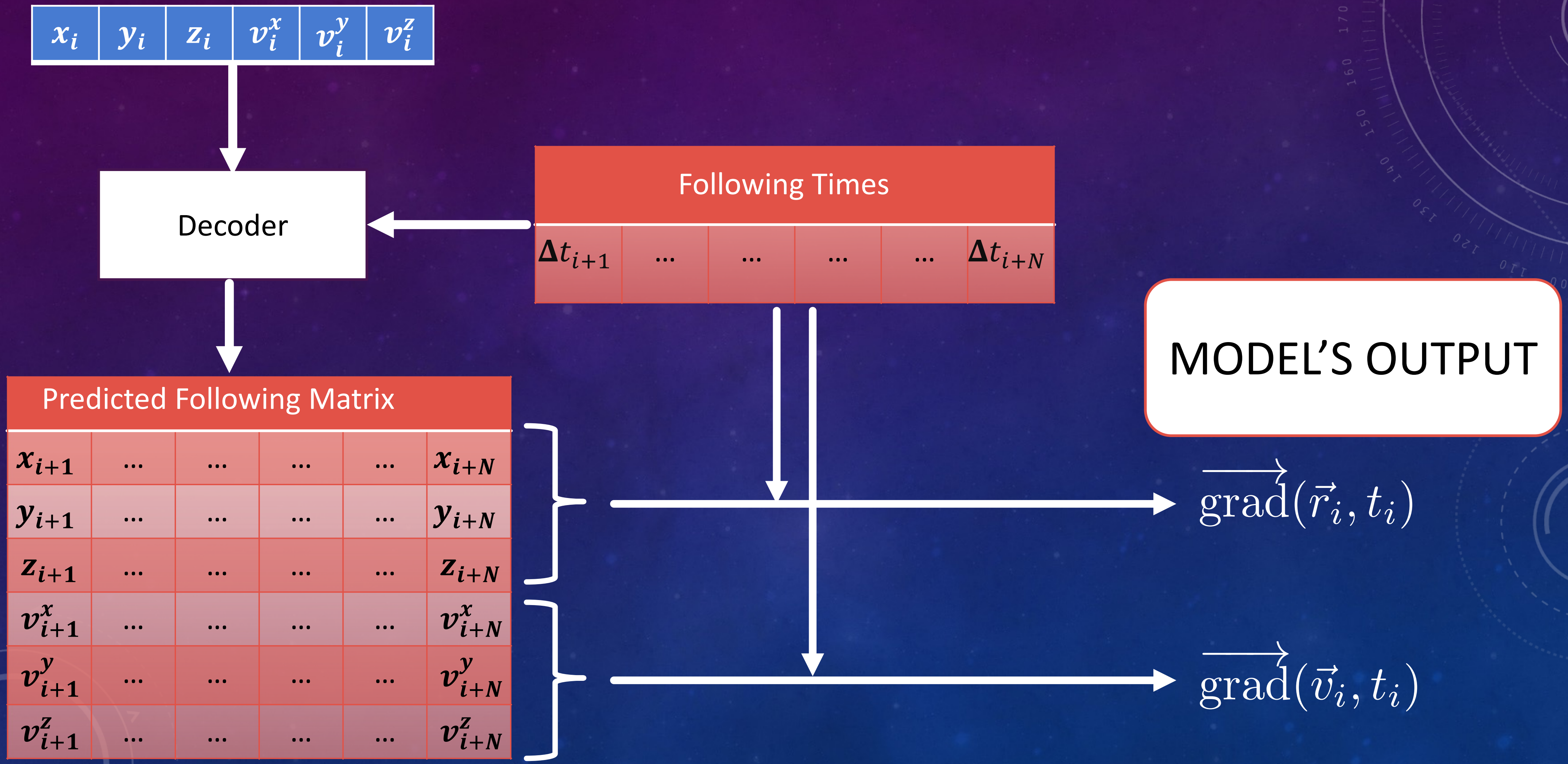
Predicted Following Matrix					
x_{i+1}	…	…	…	…	x_{i+N}
y_{i+1}	…	…	…	…	y_{i+N}
z_{i+1}	…	…	…	…	z_{i+N}
v_{i+1}^x	…	…	…	…	v_{i+N}^x
v_{i+1}^y	…	…	…	…	v_{i+N}^y
v_{i+1}^z	…	…	…	…	v_{i+N}^z



PHISICALLY INFORMED NEURAL NETWORKS (PINNs)

- Automatic differentiation: Neural networks are able to keep track of the gradient of outputs with respect to inputs
- Training means tuning the parameters and therefore tuning the outputs and also their gradients
- PINNs are based on training a network in order to have specific output gradients to solve differential equations

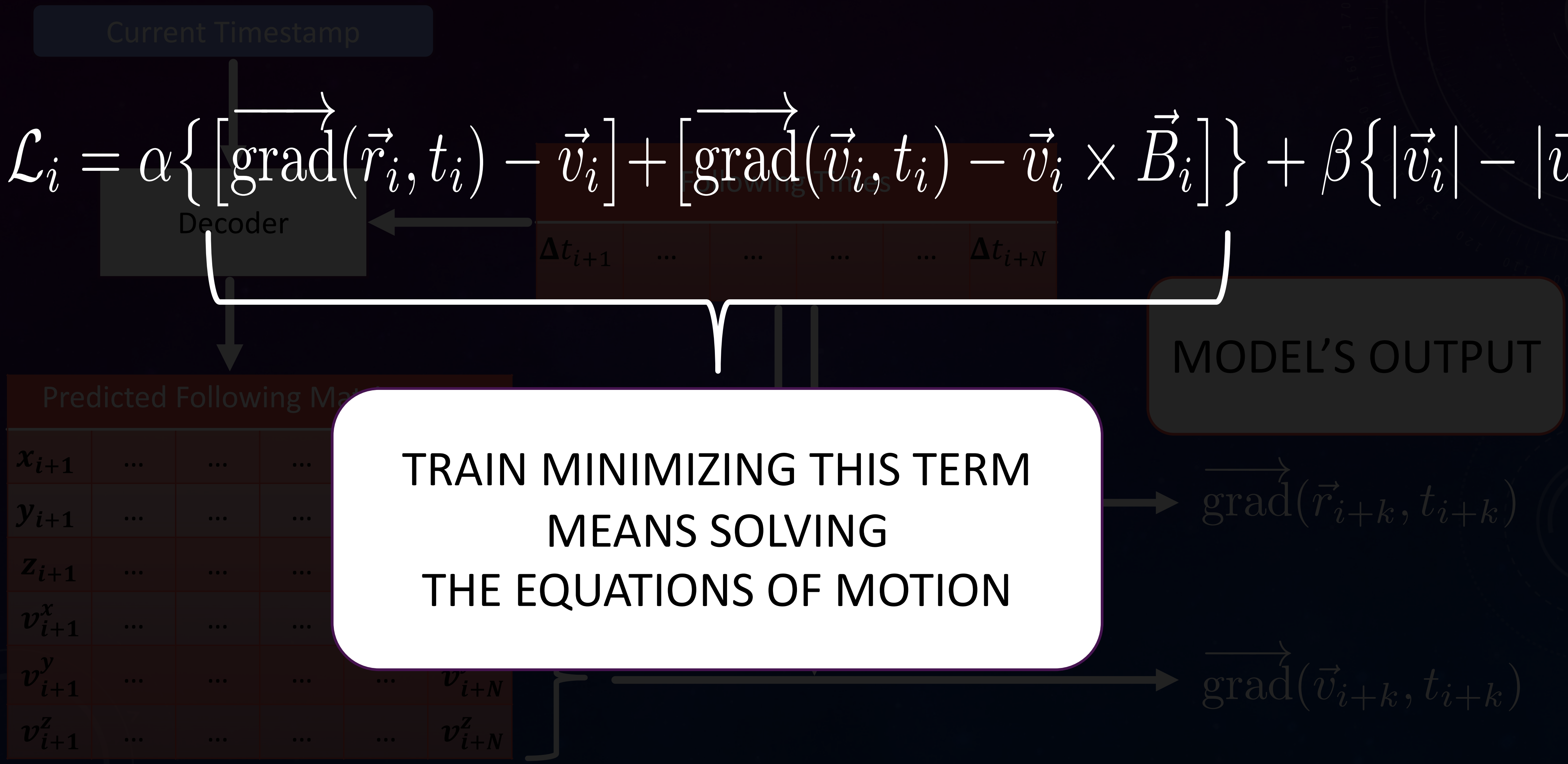
RE-TRAINING: PINN



RE-TRAINING: PINN

$$\mathcal{L}_i = \alpha\left\{\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{r}_i, t_i) - \vec{v}_i\right] + \left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{v}_i, t_i) - \vec{v}_i \times \vec{B}_i\right]\right\} + \beta\left\{|\vec{v}_i| - |\vec{v}_0|\right\}$$

TRAIN MINIMIZING THIS TERM
MEANS SOLVING
THE EQUATIONS OF MOTION



RE-TRAINING: PINN

$$\mathcal{L}_i = \alpha\left\{\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{r}_i, t_i) - \vec{v}_i\right] + \left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{v}_i, t_i) - \vec{v}_i \times \vec{B}_i\right]\right\} + \beta\left\{|\vec{v}_i| - |\vec{v}_0|\right\}$$

TRAIN MINIMIZING THIS TERM MEANS CONSERVING THE ENERGY