



TECNICHE DI STIMA E FILTRAGGIO PER GYROSCOPI LASER

*Alessandro Beghi, Jacopo Belfi, Bachir Boundaef, Davide Cuccato, Angela
di Virgilio, Antonello Ortolan, Fabio Stefani*





Sommario

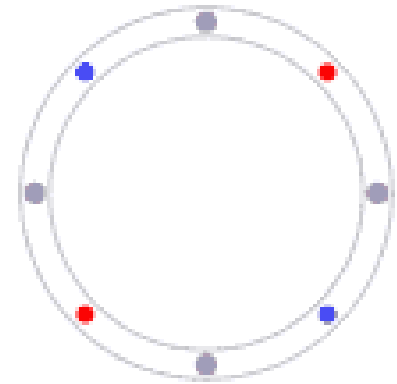
La dinamica di un gyrolaser è descritta da equazioni non lineari ottenute dallo studio dell'interazione tra gli atomi del mezzo attivo e la luce laser in una cavità ad anello. Mediante l'identificazione dei parametri di tali equazioni è possibile costruire un filtro di Kalman in grado di cancellare effetti sistematici sulla misura della frequenza di rotazione dovuti alla dinamica del laser. Vengono presentati alcuni risultati ottenuti per G-PISA e le prospettive per aumentare sensibilità e stabilità nel tempo di un gyrolaser.



Effetto Sagnac e Gyrolaser



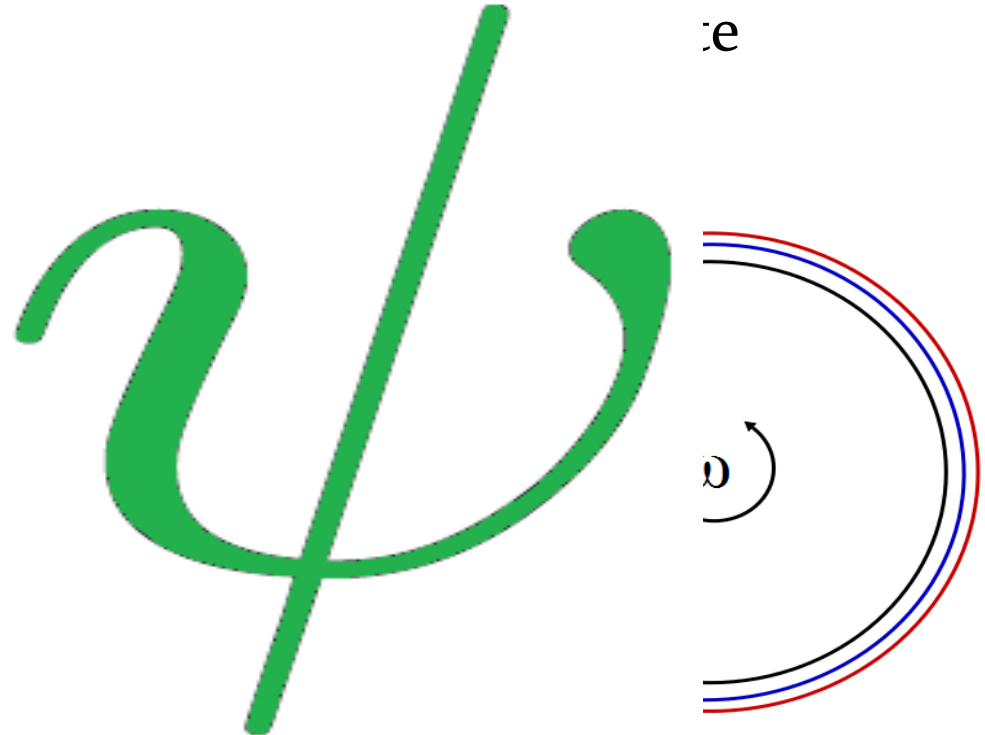
- Effetto Relativistico
- Misura puramente circonferenziale.



- I
- F
- C



una cavi
ra i due
yrolase

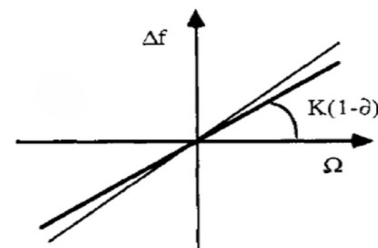
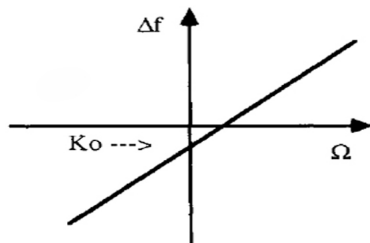
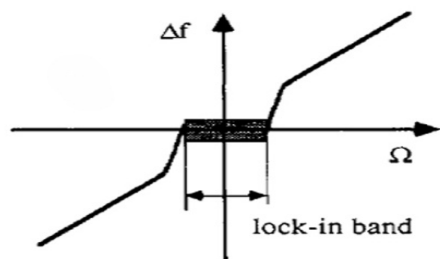
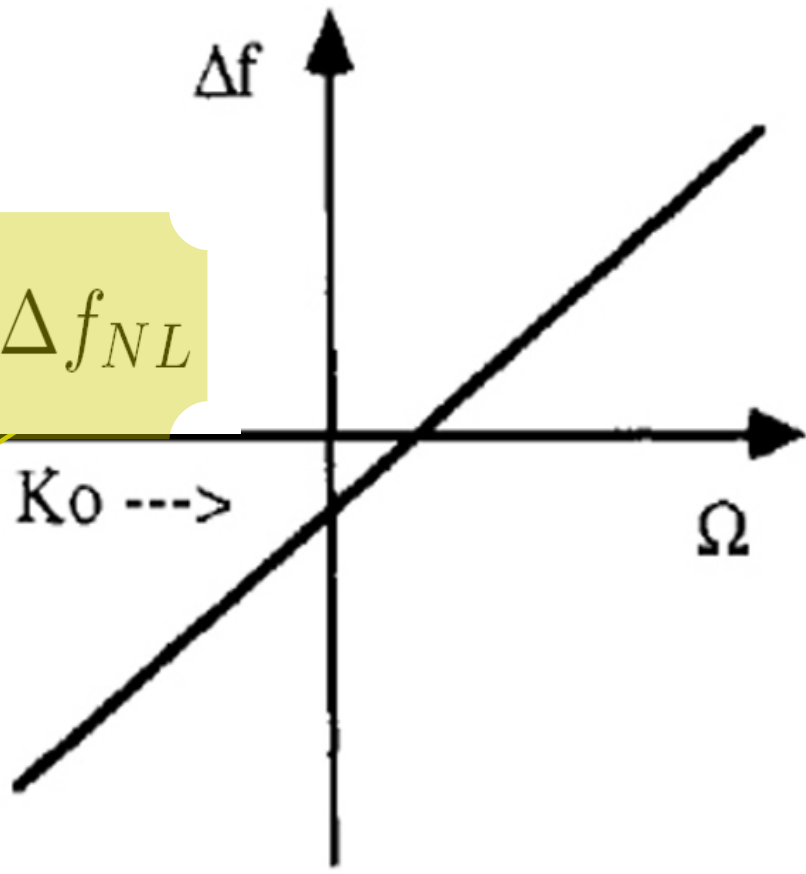
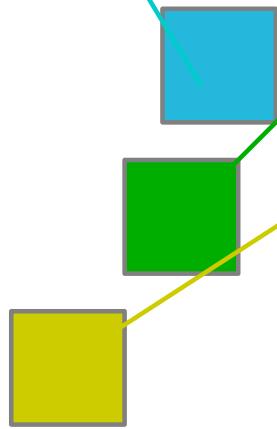




Errori Sistematici

$$\Delta f = K(1 + K_A)n \cdot \Omega + \Delta f_0 + \Delta f_{NL}$$

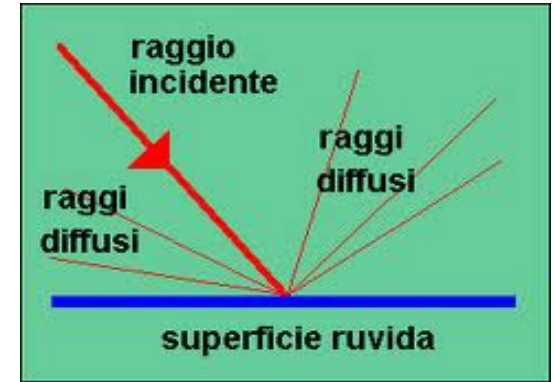
- Scale Factor
- Null Shift
- Lock-in



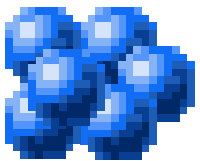
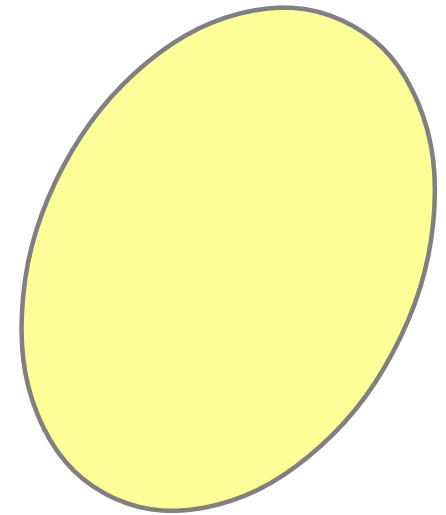


Back-Scattering

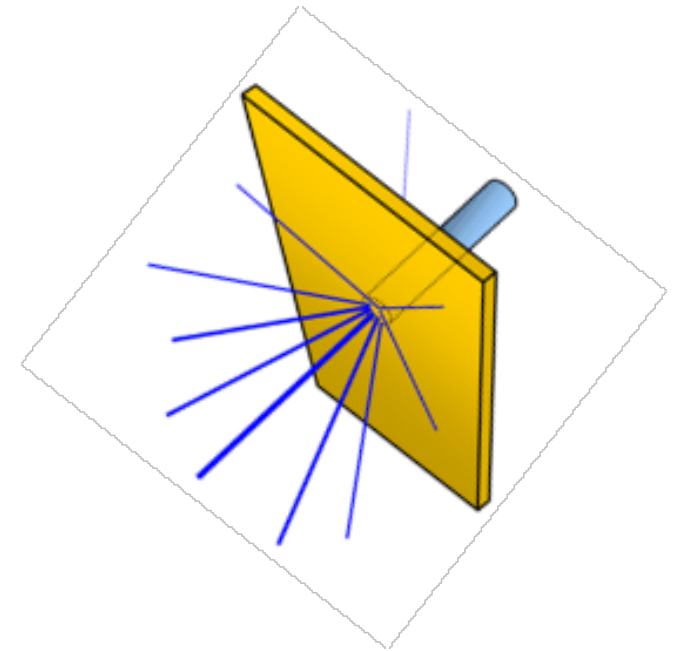
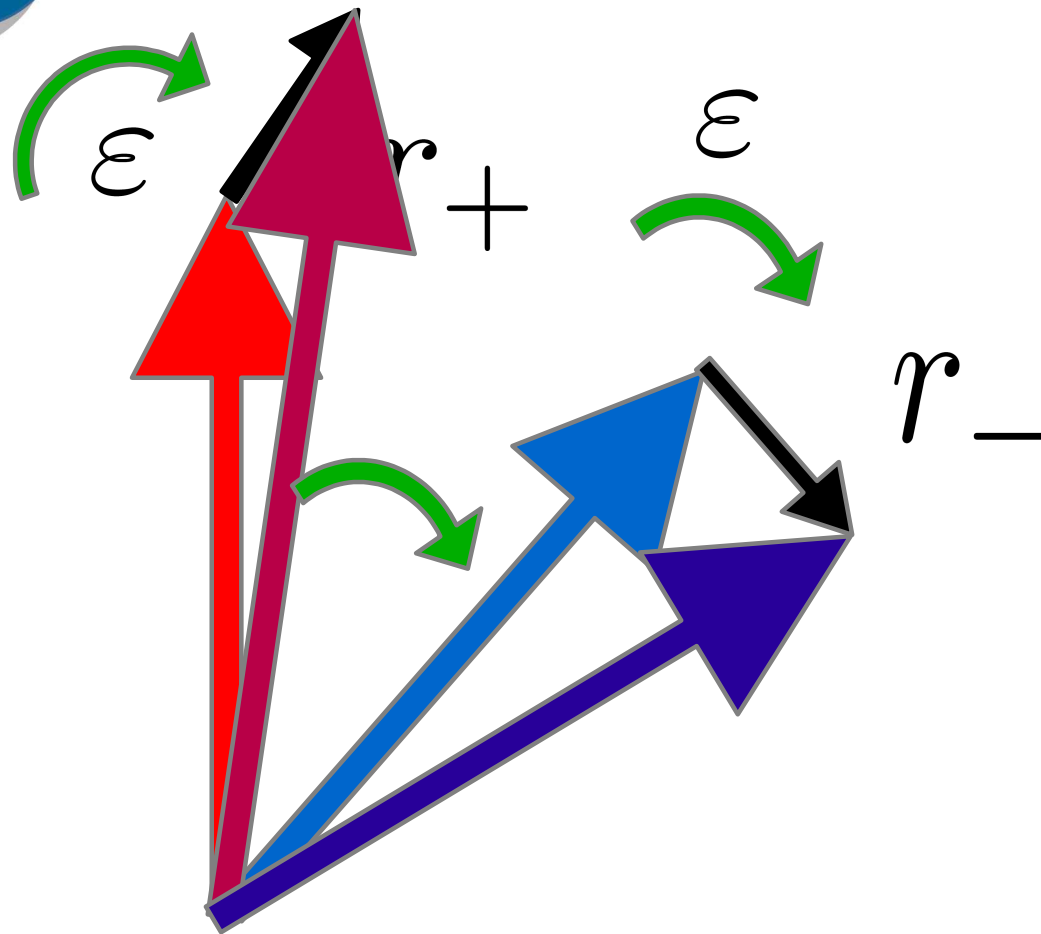
A causa di imperfezioni degli specchi parte della luce incidente viene diffusa, la porzione di luce retro-diffusa si ricombina con la luce che si propaga nel verso opposto.



Specchio



Modello di Back-Scattering



Sfruttando la natura ondulatoria della luce, è facile spiegare il fenomeno con l'ausilio del formalismo dei fasori.





Vogliamo stimare ω

$$\dot{I}_+ = \frac{c}{L} \alpha_+ I_+ - \beta_+ I_+^2 - \theta_+ I_+ - r_- \sqrt{I_+ I_-} \cos(\Psi - \varepsilon)$$

$$\dot{I}_- = \frac{c}{L} \alpha_- I_- - \beta_- I_-^2 - \theta_- I_- + r_+ \sqrt{I_+ I_-} \cos(\Psi - \varepsilon)$$

$\psi = \omega_s + \tau$ β è noto

$$\sqrt{\frac{I_+}{I_-} \sin(\psi - \varepsilon) + r_-} \sqrt{\frac{I_-}{I_+} \sin(\psi - \varepsilon) + r_+}$$

α

r

ε

parameter		
α		$1.3 \cdot 10^6$
β		$1.13 \cdot 10^6$
θ		0
σ		10^{-6}
τ	0	0
r	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$





Struttura Equazioni

● Equazioni Logistiche



$$\dot{I}_{\pm}(t) = \alpha_{\pm}I_{\pm} - \beta_{\pm}I_{\pm}^2 + \theta_{\mp\pm}I_{+}I_{-}$$

● Back-scattering



$$\omega_{BS} = -\frac{c}{L} \left(r_{+} \sqrt{\frac{I_{+}}{I_{-}}} \sin(\psi - \varepsilon) + r_{-} \sqrt{\frac{I_{-}}{I_{+}}} \sin(\psi + \varepsilon) \right)$$

● Offset e Scale-Factor



$$\sigma_{-} - \sigma_{+} + \tau_{\mp}I_{+} - \tau_{\pm}I_{-}$$

$$\dot{I}_{+} = \frac{c}{L} \left(\alpha_{+}I_{+} - \beta_{+}I_{+}^2 - \theta_{\pm}I_{+}I_{-} + 2r_{-} \sqrt{I_{+}I_{-}} \cos(\Psi + \varepsilon) \right)$$

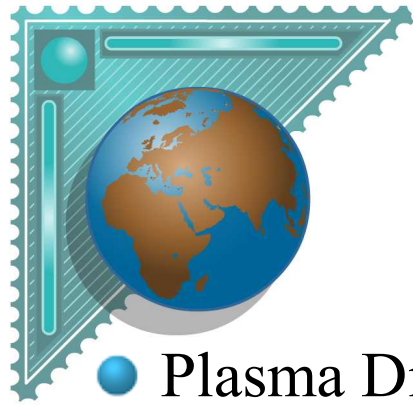
$$\dot{I}_{-} = \frac{c}{L} \left(\alpha_{-}I_{-} - \beta_{-}I_{-}^2 - \theta_{\mp}I_{+}I_{-} + 2r_{+} \sqrt{I_{+}I_{-}} \cos(\Psi - \varepsilon) \right)$$

$$\dot{\psi} = \omega_s + \sigma_{-} - \sigma_{+} + \tau_{\mp}I_{+} - \tau_{\pm}I_{-} -$$

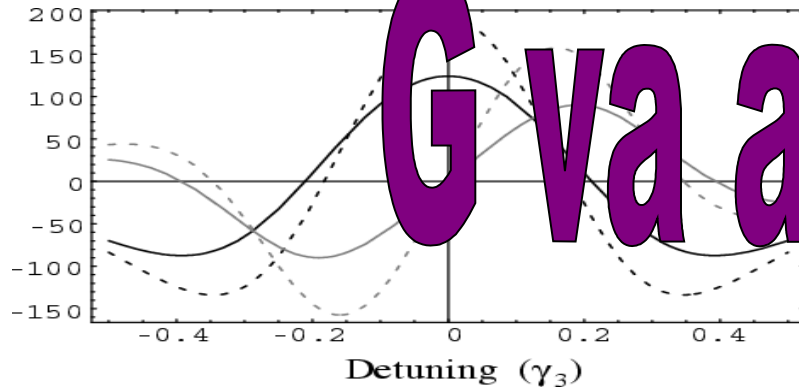
$$- \frac{c}{L} \left(r_{+} \sqrt{\frac{I_{+}}{I_{-}}} \sin(\psi - \varepsilon) + r_{-} \sqrt{\frac{I_{-}}{I_{+}}} \sin(\psi + \varepsilon) \right) .$$



Parametri delle Equazioni



● Plasma Dispersion Function



$$Z(\xi) = 2i \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2\eta x - 2i\xi x} dx$$

$$\xi_{\pm} = (\omega_{\pm} - \omega_0) / \Gamma_D$$

$$\omega_+ \simeq \omega_0, \quad \omega_- = \omega_S - \omega_0$$

G va acquisito!

μ

$$\alpha_{\pm} = G \cdot \frac{Z_I(\xi_{\pm})}{Z_I(0)} - \mu_{\pm}$$

$$\beta_{\pm} = \frac{f_0}{2} \cdot \frac{Z_R(\xi_{\pm})}{Z_I(0)}$$

$$\theta_{\pm} = \beta_{-} \cdot \frac{1}{1 + (\xi_{+}/\eta)^2}$$

$$= \beta_{+} \cdot \frac{1}{1 + (\xi_{-}/\eta)^2}$$

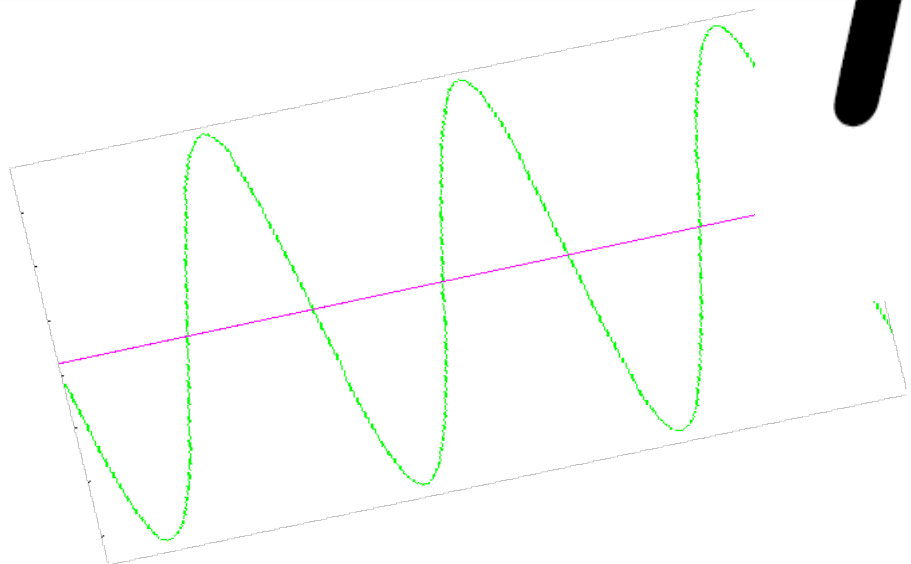
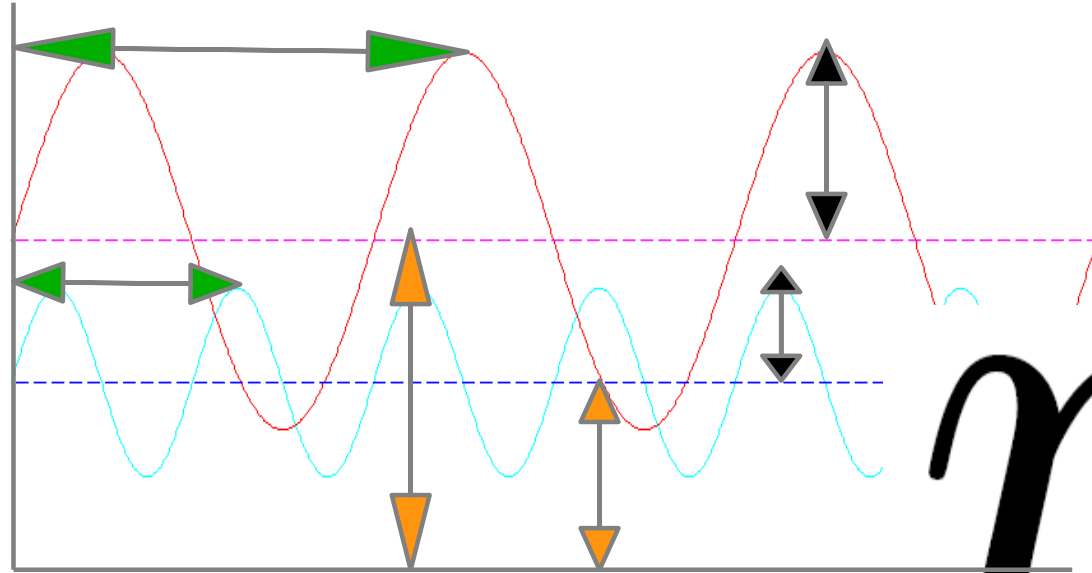
$$= \frac{f_0}{2} \cdot \frac{\xi_{+}}{\eta} \cdot \theta_{\pm}$$

$$= \frac{f_0}{2} \cdot \frac{\xi_{-}}{\eta} \cdot \theta_{\mp}$$





Soluzioni Approssimate



α

\pm

r

\pm

ϵ



Filtraggio Statistico

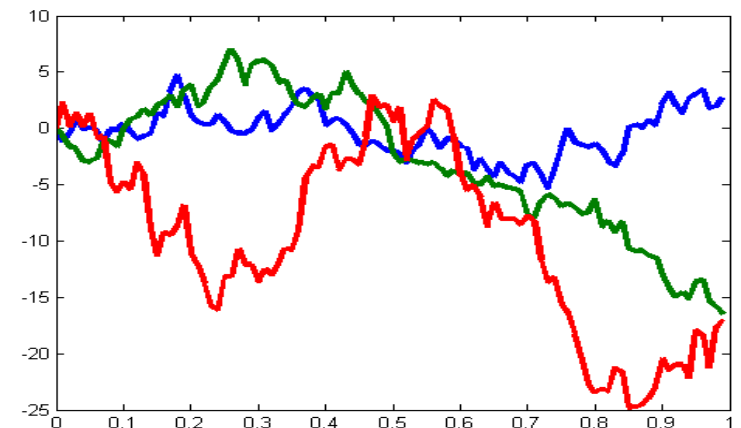
Stimare le proprietà di un processo stocastico $Y(t,w)$
(anche non stazionario!)

Descrizione di $Y(t,w)$ processo misurato

- Vettore di stato X in R^n
- Modello $M(X,t,w)$

Calcolo della densità di probabilità $p(X,t)$

Criterio di Stima X_s da $p(X,t)$





Descrizione in Spazio di Stato

- Tempo continuo o a tempo discreto?
- Punto geometrico sulla retta (cinematica):

$$\mathbf{X}(t) = [s(t) , v(t)]$$

- G-PISA :

$$\mathbf{X}(t) = [I_+(t) , I_-(t) , \varphi(t)]$$





Descrizione in Spazio di Stato

Descrizione completa di un processo vettoriale

- Modello Parametrico $M(X, \theta, u, t)$ θ = parametri!
- Modello Non Parametrico Kernel, Wavelet, ecc.

Punto geometrico sulla retta:

$$s' = 0 s + 1 v + 0 w$$

$$v' = 0 s + 0 v + 1 w$$

G-PISA:

- Equazioni RLG Lamb-Aronowitz (Intensità, fase Sagnac)
- Equazioni RLG di Mandell (Ampiezza campi elettrici)



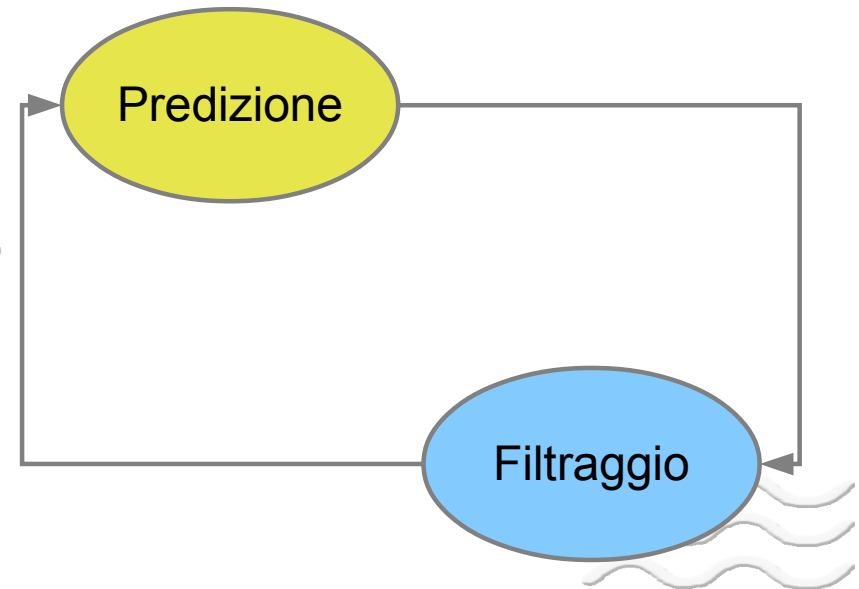


Calcolo di $p(\mathbf{X},t)$

Bayes: calcolo iterativo di $p(\mathbf{X},t)$, regola della probabilità condizionata

$$p(a) = \int p(a|b)p(b) db$$

- Predizione:
 - $p(\mathbf{X},t|t) \rightarrow p(\mathbf{X},t+1|t)$
 - Usa il modello!
- Filtraggio:
 - $p(\mathbf{X},t+1|t) \rightarrow p(\mathbf{X},t+1|t+1)$
 - Usa la misura corrente ($t+1$)
- Condizioni Iniziali $p(\mathbf{X}_0,0|-1)$





Criteri di Stima:

- Maximum Likelihood (ML):

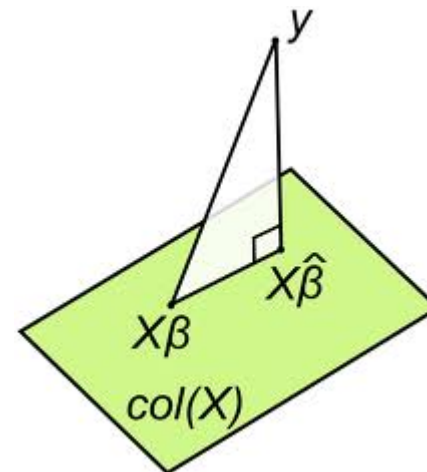
$$\mathbf{X}_s(t) = \text{media di } p(\mathbf{X}, t|t)$$

Minimi quadrati su sistemi lineari

- Maximum A Posteriori Probability (MAP):

$$\mathbf{X}_s(t) = \text{moda di } p(\mathbf{X}, t|t)$$

Telecomunicazioni





Processi Gaussiani

- $p(\mathbf{X},t)$ è completamente definita dai suoi primi due momenti
- Kalman: Calcolo ad ogni iterazione:

$\mathbf{X}(t|t)$: miglior stima al tempo corrente (media)

$P(t|t)$: misura dell'incertezza sulla stima (cov. matriciale)

- Ottimo nel caso di dinamiche lineari o non lineari con piccole fluttuazioni
- computazionalmente efficiente





Extended Kalman Filter

Sistemi non lineari

Step di predizione → Integrazione Numerica

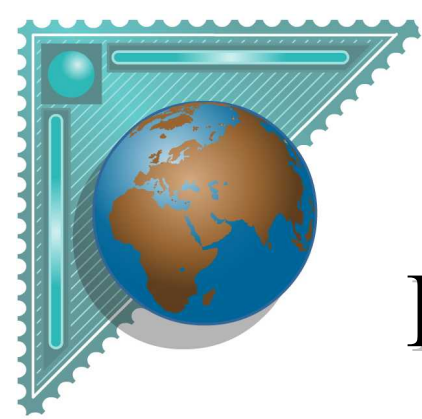
- RK4
- Metodi Geometrici

Linearizza solo le fluttuazioni della parte aleatoria, non la dinamica deterministica.

Parametri EKF:

- Q , matrice di covarianza del rumore di modello
- R , matrice di covarianza del rumore di misura





Identificazione dei Parametri

I modelli parametrici:

- modello della dinamica: $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{X}(t+1)$

Eq. Diff. – Eq. Langevin

- modello di misura: $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{Y}(t)$

Modello Statico

Se i parametri θ variano come quantità aleatorie nel tempo occorre identificarli!





Identificazione G-PISA

I parametri rilevanti per G-PISA (con feedback perimetro e intensità +) sono:

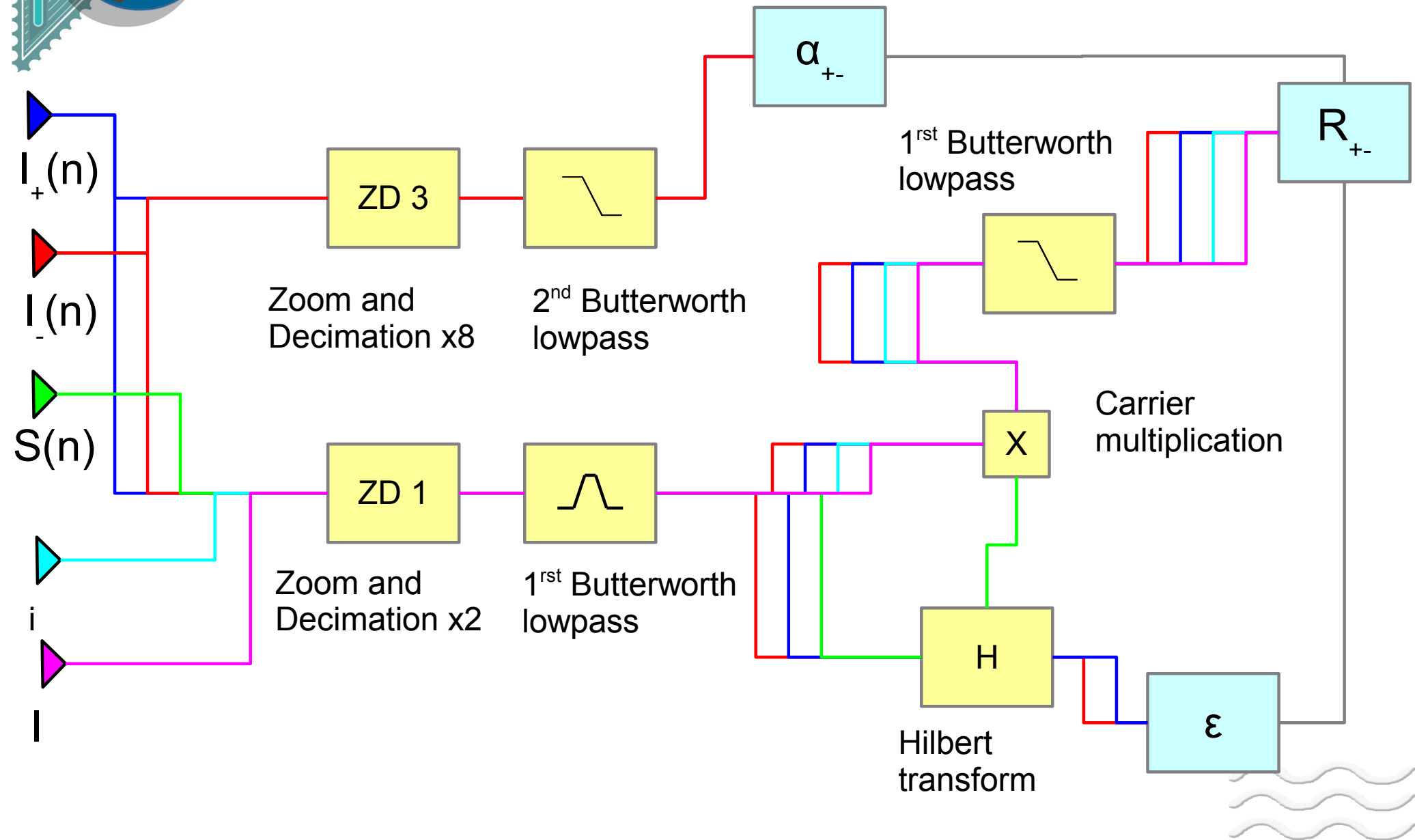
- G guadagno del gyrolaser
- $\mu_{+,-}$ perdite dei singoli fasci
- $r_{+,-}$ parametri di back-scattering

Da questi parametri si calcolano gli altri parametri precedentemente menzionati

($\xi_{+,-}$ detuning delle frequenze laser, può essere rilevante per G-GRANSASSO)

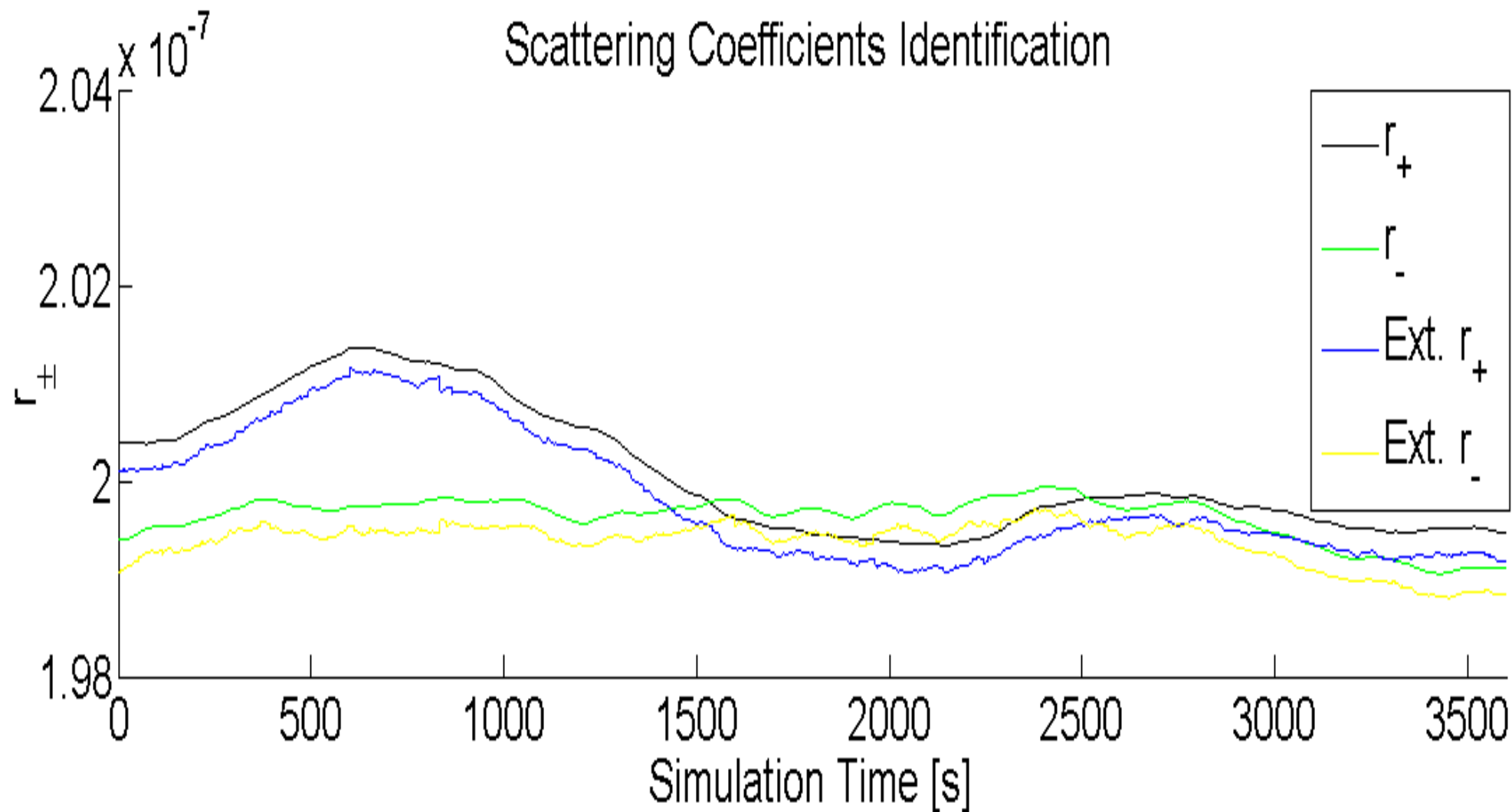


Schema Identificazione G-PISA



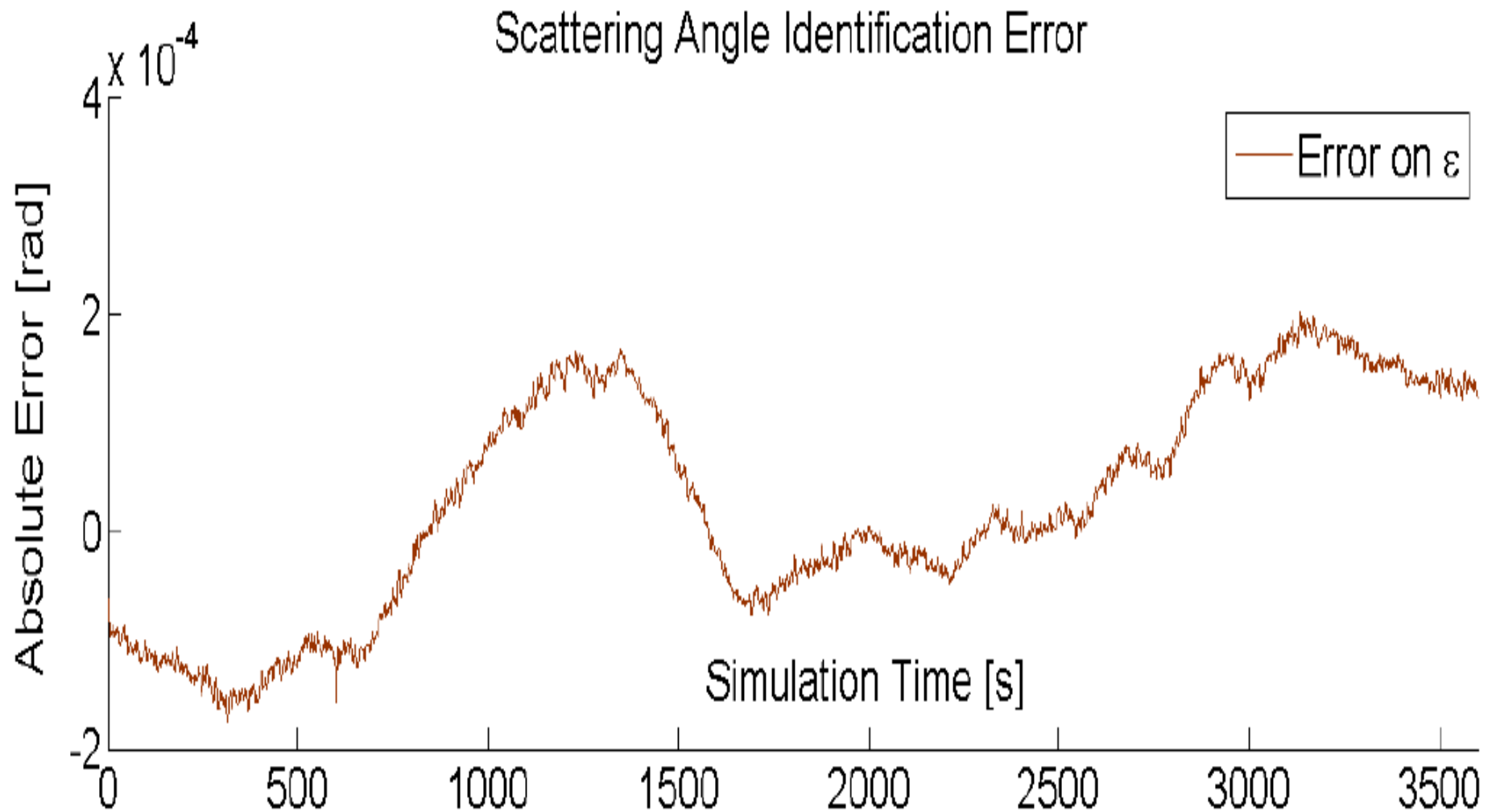


Risultati Identificazione



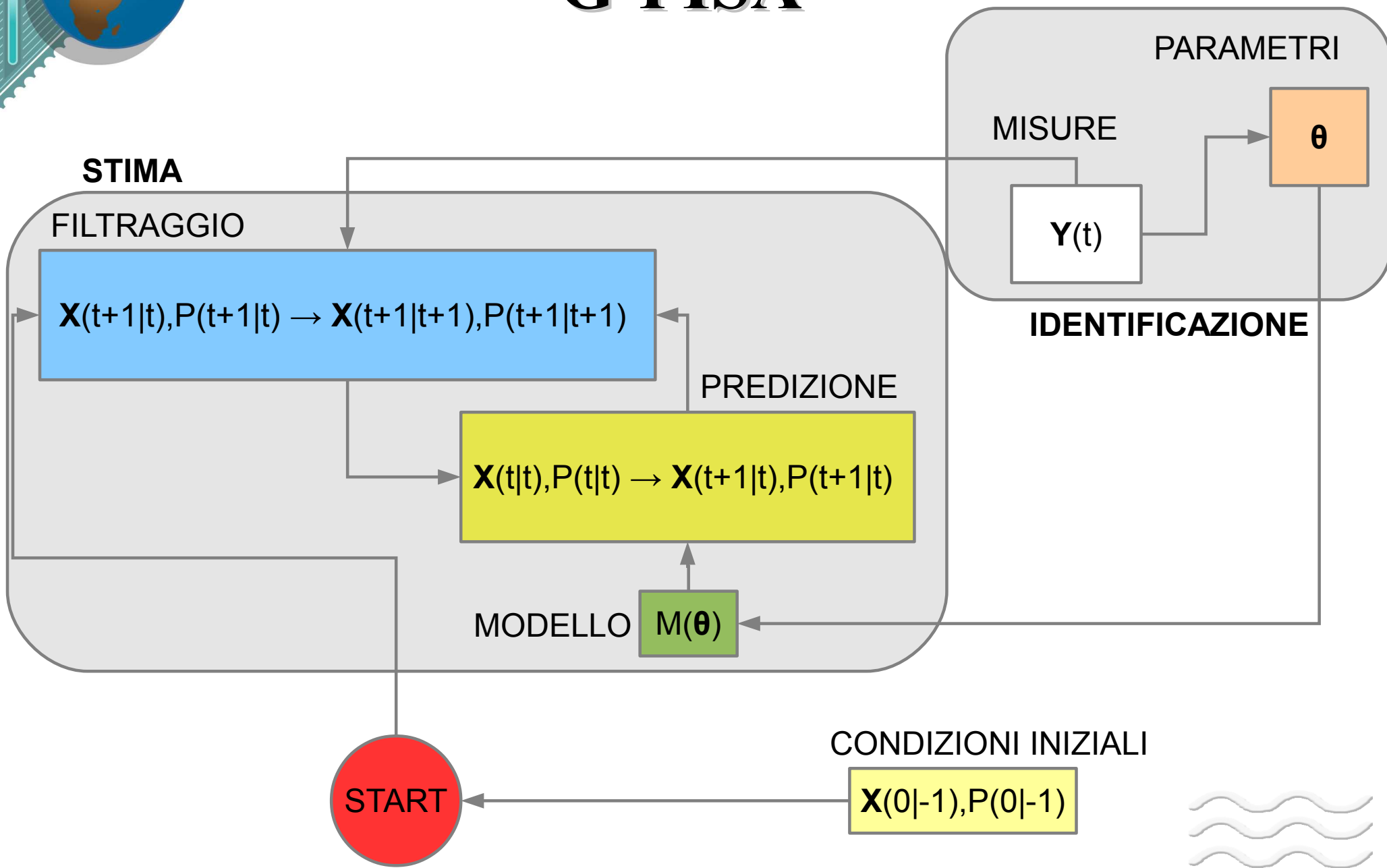


Risultati Identificazione





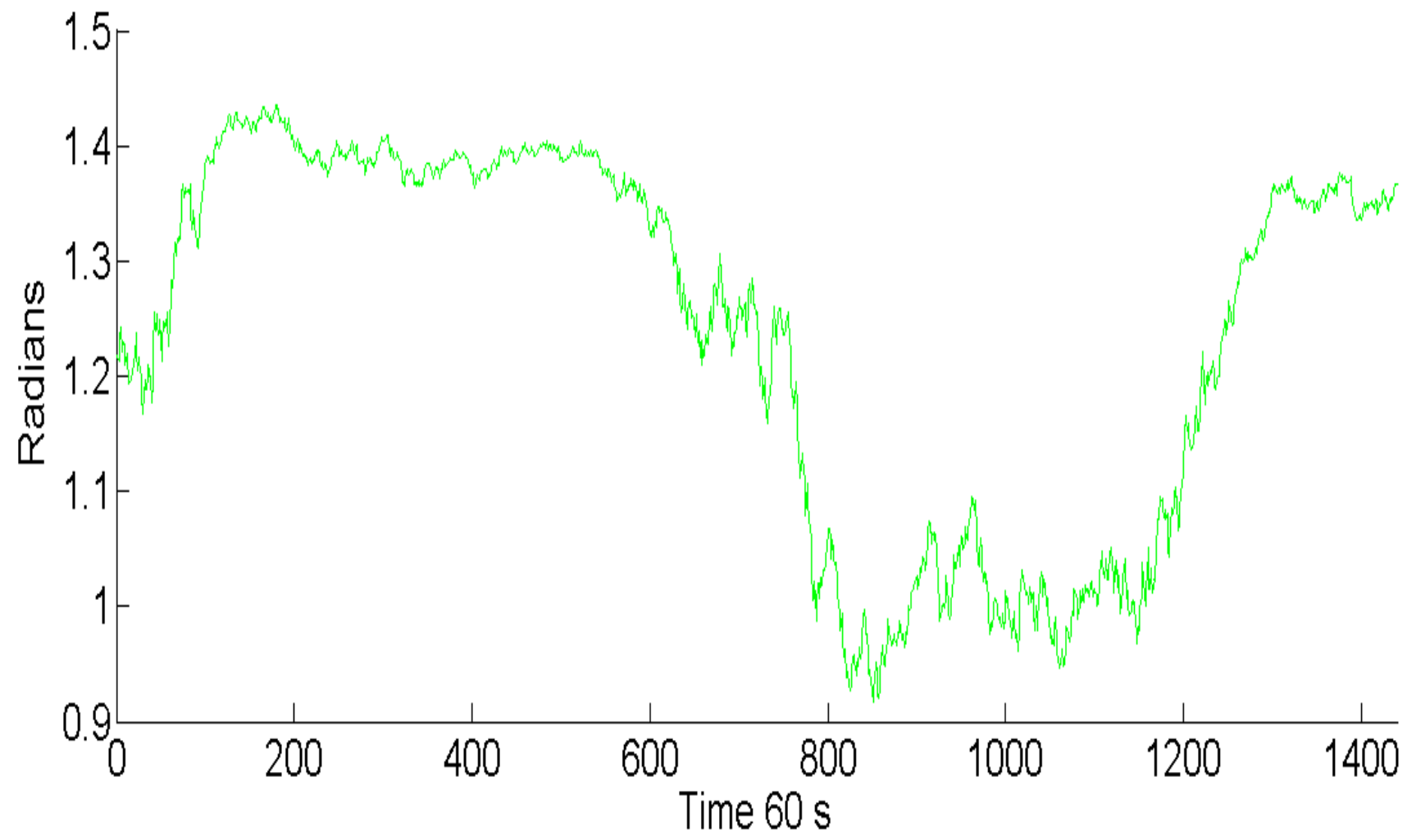
Identificazione e filtro di Kalman per G-PISA





Risultati Identificazione

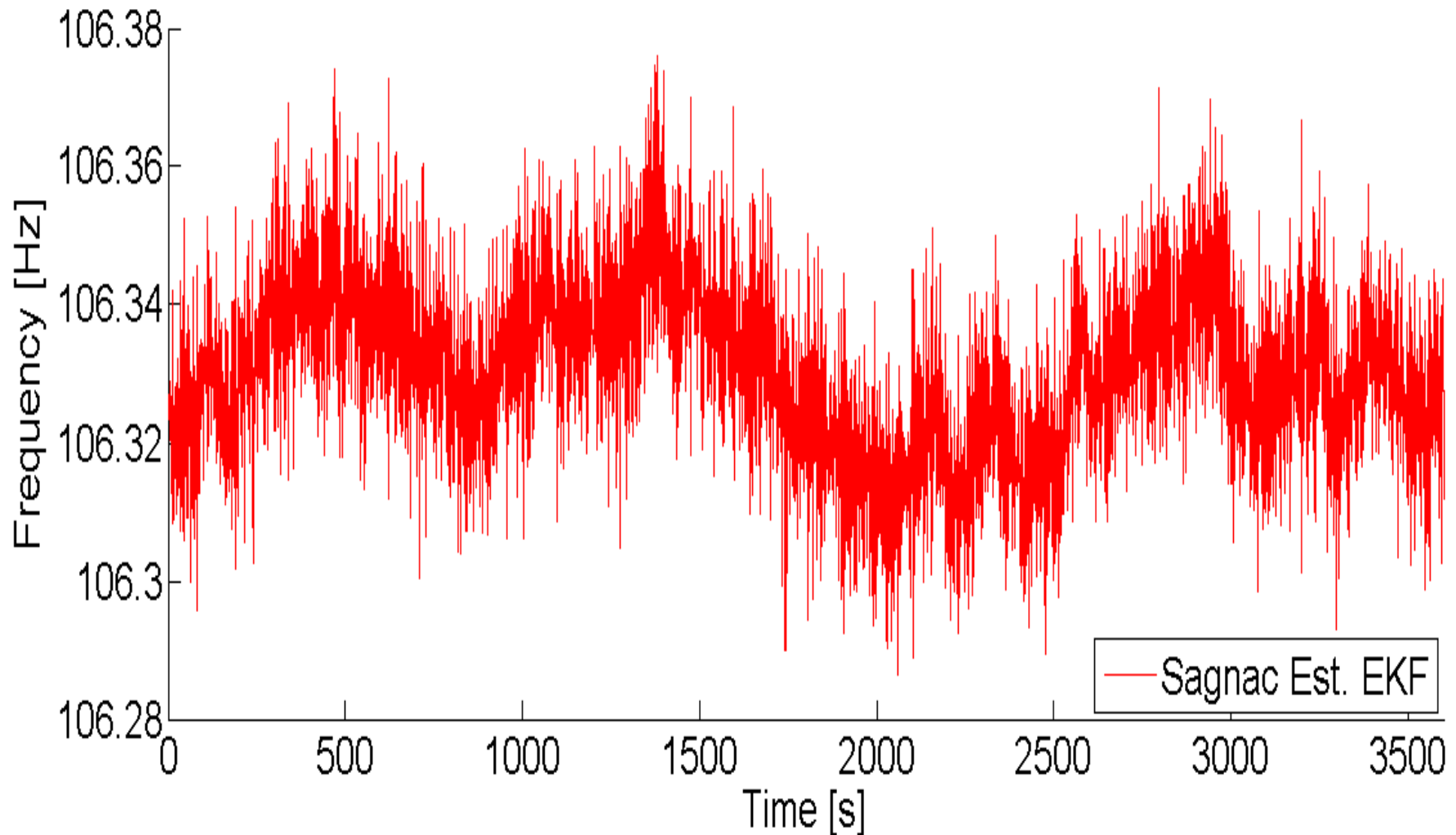
Identified ε





Risultati Filtraggio

Identified Sagnac Frequency using EKF





Conclusioni e Prospettive

Conclusioni: Errore relativo medio

- 10^{-2} → Identificazione Parametri
- 10^{-4} → Stima Frequenza

Questioni Aperte:

- Incorporare l'informazione contenuta nei canali filtrati nell'identificazione? (PEM)
- Identificare ω_s nella procedura d'identificazione? (Stima di frequenza)
- Sfruttare le simmetrie delle equazioni?
 - Generalized EKF
 - Symmetry preserving EKF

