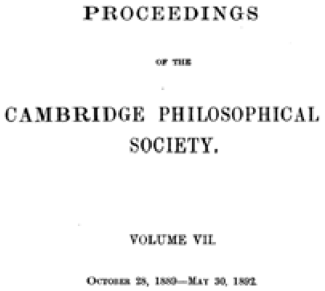
Hemispherical Resonator Gyro per il Sistema di Controllo dei SuperAttenuatori di Virgo

Nicolò Grilli

19 Dicembre 2011

Storia dell'Effetto Bryan

Il fisico inglese G. H. Bryan osservò sperimentalmente l'effetto che porta il suo nome e lo descrisse usando la teoria dell'elasticità nel 1890



PROCEEDINGS

OF THE

CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY.

VOLUME VII.

October 28, 1889—May 30, 1892.

Storia degli HRG

- 1965 - L'idea di Bryan fu riscoperta per la prima volta dal Dr. David Lynch della Delco
- 1969 - Realizzazione del primo prototipo di HRG
- 1980s - Commercializzazione dei primi HRG
- 1996 - Primo HRG utilizzato in una missione spaziale

Storia degli HRG

- 1965 - L'idea di Bryan fu riscoperta per la prima volta dal Dr. David Lynch della Delco
- 1969 - Realizzazione del primo prototipo di HRG
- 1980s - Commercializzazione dei primi HRG
- 1996 - Primo HRG utilizzato in una missione spaziale

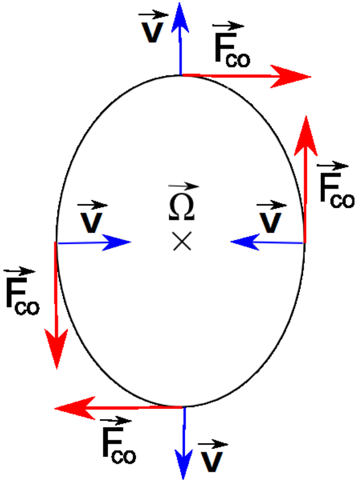
Storia degli HRG

- 1965 - L'idea di Bryan fu riscoperta per la prima volta dal Dr. David Lynch della Delco
- 1969 - Realizzazione del primo prototipo di HRG
- 1980s - Commercializzazione dei primi HRG
- 1996 - Primo HRG utilizzato in una missione spaziale

Storia degli HRG

- 1965 - L'idea di Bryan fu riscoperta per la prima volta dal Dr. David Lynch della Delco
- 1969 - Realizzazione del primo prototipo di HRG
- 1980s - Commercializzazione dei primi HRG
- 1996 - Primo HRG utilizzato in una missione spaziale

Effetto Bryan



$$\vec{F}_{CO} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

La forza di Coriolis crea un momento totale non nullo e fa ruotare il modo di vibrazione

Thin Shell Theory

Ipotesi

Piccole deformazioni: u_x, u_y, u_z

- Teoria lineare
- Tensore degli stress proporzionale alle deformazioni

Mezzo Isotropo:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} u_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{kk} \delta_{ij}$$

Thin Shell Theory

Ipotesi

Piccole deformazioni: u_x, u_y, u_z

- Teoria lineare
- Tensore degli stress proporzionale alle deformazioni

Mezzo Isotropo:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} u_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{kk} \delta_{ij}$$

Thin Shell Theory

Ipotesi

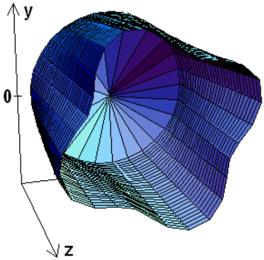
Piccole deformazioni: u_x, u_y, u_z

- Teoria lineare
- Tensore degli stress proporzionale alle deformazioni

Mezzo Isotropo:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} u_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{kk} \delta_{ij}$$

Modello del Cilindro Vibrante

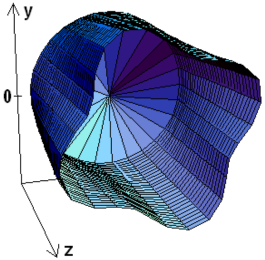


Funzioni Incognite

$u_r, \; u_\theta, \; u_z$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a s \rho \left[\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + 2\Omega(u_r \dot{u}_\theta - \dot{u}_r u_\theta) + 2\Omega a \dot{u}_\theta \right] - \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij}$$

Modello del Cilindro Vibrante

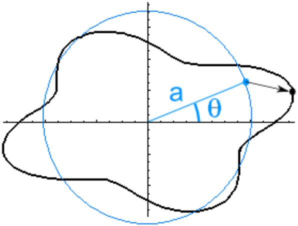


Funzioni Incognite

$u_r\,,\ u_\theta\,,\ u_z$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} a s \rho \left[\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + 2\Omega(u_r \dot{u}_\theta - \dot{u}_r u_\theta) + 2\Omega a \dot{u}_\theta \right] - \frac{1}{2}\sigma_{ij} u_{ij}$$

Soluzione del Cilindro Vibrante



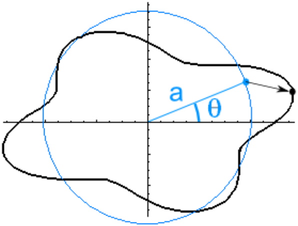
Sviluppo in serie di Fourier in z

Soluzione formalmente simile ad un pendolo di Foucault

$$u_r = -2mA\sin(kz)\sin((\sqrt{\omega^2+\eta^2\Omega^2})t)\cos\left(m\left(\theta-\frac{\eta\Omega t}{m}\right)\right)$$

$$u_\theta = 2A\sin(kz)\sin((\sqrt{\omega^2+\eta^2\Omega^2})t)\sin\left(m\left(\theta-\frac{\eta\Omega t}{m}\right)\right)$$

Soluzione del Cilindro Vibrante



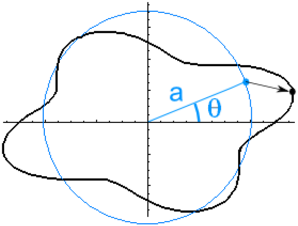
Sviluppo in serie di Fourier in z

Soluzione formalmente simile ad un pendolo di Foucault

$$u_r = -2mA\sin(kz)\sin((\sqrt{\omega^2+\eta^2\Omega^2})t)\cos\left(m\left(\theta - \frac{\eta\Omega t}{m}\right)\right)$$

$$u_\theta = 2A\sin(kz)\sin((\sqrt{\omega^2+\eta^2\Omega^2})t)\sin\left(m\left(\theta - \frac{\eta\Omega t}{m}\right)\right)$$

Soluzione del Cilindro Vibrante



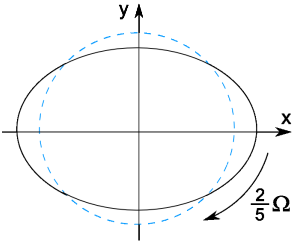
Sviluppo in serie di Fourier in z

Soluzione formalmente simile ad un pendolo di Foucault

$$u_r = -2mA\sin(kz)\sin((\sqrt{\omega^2+\eta^2\Omega^2})t)\cos\left(m\left(\theta - \frac{\eta\Omega t}{m}\right)\right)$$

$$u_\theta = 2A\sin(kz)\sin((\sqrt{\omega^2+\eta^2\Omega^2})t)\sin\left(m\left(\theta - \frac{\eta\Omega t}{m}\right)\right)$$

Parametri dell'Oscillazione

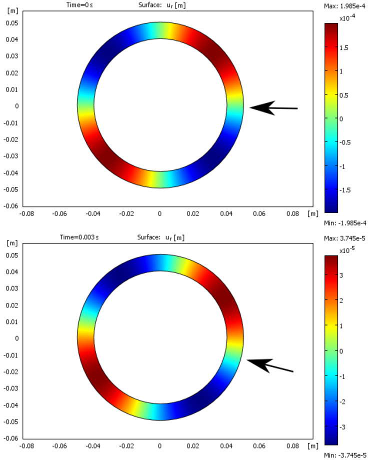


Bryan factor: $\eta = -\frac{2m}{(m^2+1)}$

Velocità angolare dei nodi dell'oscillazione: $\left(-\frac{2\Omega}{(m^2+1)}\right)$

Pulsazione dell'oscillazione: $\omega^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}\left(\frac{1}{a^2}\frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)} + k^2\frac{f(L)}{g(L)}\right)$

Simulazione Numerica dell'Effetto Bryan



L'effetto Bryan è valido anche senza l'approssimazione "Thin Shell"

Joubert, Shatalov, Fay, *"Rotating structures and Bryan's effect"* Am. J. Phys. 77(6) 520-525 (2009)

Fattore di Qualità Q

Alto $Q \Rightarrow$ Basso noise termico

- Raffreddamento e riscaldamento dovuti alla compressione
- Passaggio di calore dalle parti calde a quelle fredde
  $\Rightarrow$ Aumento dell'entropia
- Fenomeno più evidente a basse frequenze

Fattore di Qualità Q

Alto $Q \Rightarrow$ Basso noise termico

- Raffreddamento e riscaldamento dovuti alla compressione
- Passaggio di calore dalle parti calde a quelle fredde
  $\Rightarrow$ Aumento dell'entropia
- Fenomeno più evidente a basse frequenze

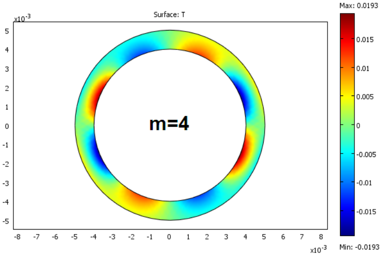
Fattore di Qualità Q

Alto $Q \Rightarrow$ Basso noise termico

- Raffreddamento e riscaldamento dovuti alla compressione
- Passaggio di calore dalle parti calde a quelle fredde
  $\Rightarrow$ Aumento dell'entropia
- Fenomeno più evidente a basse frequenze

Fattore di Qualità Q

Alto $Q \Rightarrow$ Basso noise termico



- Raffreddamento e riscaldamento dovuti alla compressione
- Passaggio di calore dalle parti calde a quelle fredde
  $\Rightarrow$ Aumento dell'entropia
- Fenomeno più evidente a basse frequenze

Descrizione Matematica della Termoelasticità

Funzioni incognite

u_i, T

Legge di Newton + Primo principio della termodinamica

$$\rho \ddot{u}_i = -\frac{E\alpha}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}$$

$$k\nabla^2 T = \frac{E\alpha T_0}{(1-2\nu)}\frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_l} + \rho C_v \dot{T}$$

Descrizione Matematica della Termoelasticità

Funzioni incognite

u_i, T

Legge di Newton + Primo principio della termodinamica

$$\rho \ddot{u}_i = -\frac{E\alpha}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}$$

$$k\nabla^2 T = \frac{E\alpha T_0}{(1-2\nu)}\frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_l} + \rho C_v \dot{T}$$

Calcolo Numerico della Dissipazione Termoelastica

Impongo soluzioni del tipo:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \tilde{u}_x(x,y,z)e^{\lambda t} \\
u_y &= \tilde{u}_y(x,y,z)e^{\lambda t} \\
u_z &= \tilde{u}_z(x,y,z)e^{\lambda t} \\
T &= \tilde{T}(x,y,z)e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

Autovalore

$\lambda = -\mu + i\omega$

Fattore di Qualità:

$$Q = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{\mu}$$

Calcolo Numerico della Dissipazione Termoelastica

Impongo soluzioni del tipo:

$$\begin{aligned} u_x &= \tilde{u}_x(x,y,z)e^{\lambda t} \\ u_y &= \tilde{u}_y(x,y,z)e^{\lambda t} \\ u_z &= \tilde{u}_z(x,y,z)e^{\lambda t} \\ T &= \tilde{T}(x,y,z)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

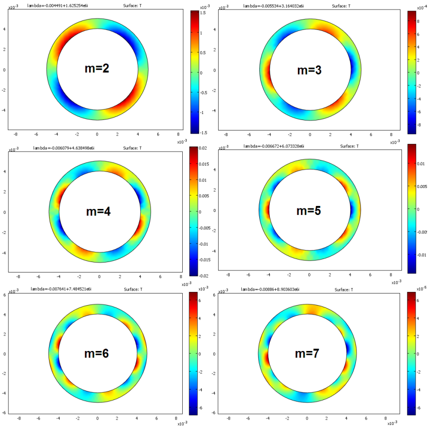
Autovalore

$\lambda = -\mu + i\omega$

Fattore di Qualità:

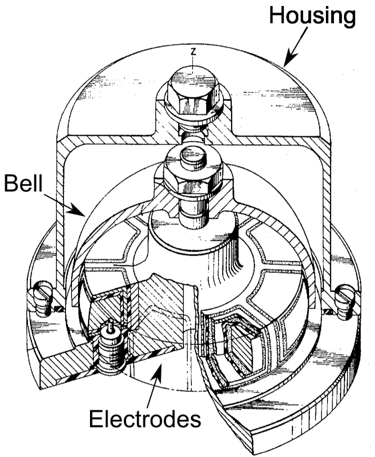
$$Q = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{\mu}$$

Calcolo Numerico della Dissipazione Termoelastica



m	$Q\ (\cdot\ 10^7)$
2	5.76
3	9.10
4	12.1
5	14.5
6	15.6
7	16.0

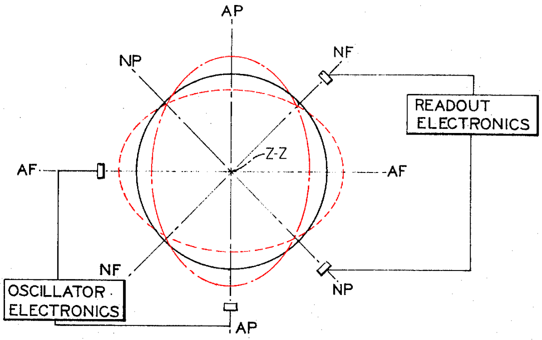
Brevetto del Dr. Lynch



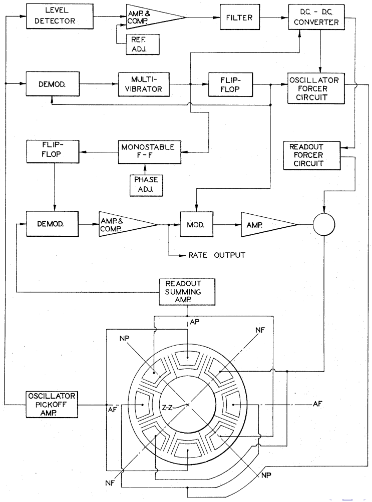
- Campana realizzata in quarzo fuso
- Medium Vacuum all'interno (~ 1 Pa)
- 8 elettrodi

Schema degli Elettrodi

- AF = anti-nodal forcer
- AP = anti-nodal pickoff
- NP = nodal pickoff
- NF = nodal forcer



Funzionamento



Pregi dell'HRG

- Nessuna parte rotante
- Tempo di vita molto lungo
- Ortogonalità dei modi indotti in AF e NF
- Idealmente i modi in AF e in NF sono degeneri
- Modi nodali indotti dall'input disaccoppiati dai modi anti-nodali
- Linearità dell'output

Pregi dell'HRG

- Nessuna parte rotante
- Tempo di vita molto lungo
- Ortogonalità dei modi indotti in AF e NF
- Idealmente i modi in AF e in NF sono degeneri
- Modi nodali indotti dall'input disaccoppiati dai modi anti-nodali
- Linearità dell'output

Pregi dell'HRG

- Nessuna parte rotante
- Tempo di vita molto lungo
- Ortogonalità dei modi indotti in AF e NF
- Idealmente i modi in AF e in NF sono degeneri
- Modi nodali indotti dall'input disaccoppiati dai modi anti-nodali
- Linearità dell'output

Pregi dell'HRG

- Nessuna parte rotante
- Tempo di vita molto lungo
- Ortogonalità dei modi indotti in AF e NF
- Idealmente i modi in AF e in NF sono degeneri
- Modi nodali indotti dall'input disaccoppiati dai modi anti-nodali
- Linearità dell'output

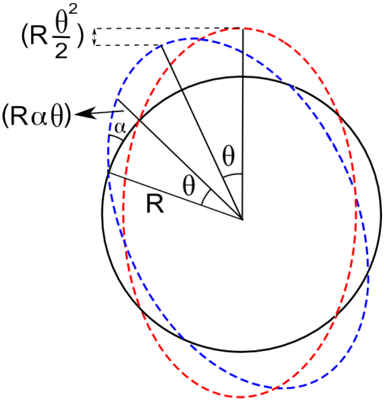
Pregi dell'HRG

- Nessuna parte rotante
- Tempo di vita molto lungo
- Ortogonalità dei modi indotti in AF e NF
- Idealmente i modi in AF e in NF sono degeneri
- Modi nodali indotti dall'input disaccoppiati dai modi anti-nodali
- Linearità dell'output

Pregi dell'HRG

- Nessuna parte rotante
- Tempo di vita molto lungo
- Ortogonalità dei modi indotti in AF e NF
- Idealmente i modi in AF e in NF sono degeneri
- Modi nodali indotti dall'input disaccoppiati dai modi anti-nodali
- Linearità dell'output

Linearità dell'Output



- Lo spostamento del punto nodale è lineare in θ
- Lo spostamento del punto anti-nodale è quadratico in θ

Non idealità

- Modi non degeneri ($\sim 10^{-3}$ Hz)
- Centro di massa non fisso
- Forze applicate sulla campana
- Dissipazione sugli elettrodi

Non idealità

- Modi non degeneri ($\sim 10^{-3}$ Hz)
- Centro di massa non fisso
- Forze applicate sulla campana
- Dissipazione sugli elettrodi

Non idealità

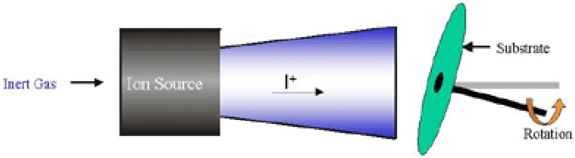
- Modi non degeneri ($\sim 10^{-3}$ Hz)
- Centro di massa non fisso
- Forze applicate sulla campana
- Dissipazione sugli elettrodi

Non idealità

- Modi non degeneri ($\sim 10^{-3}$ Hz)
- Centro di massa non fisso
- Forze applicate sulla campana
- Dissipazione sugli elettrodi

Fabbricazione

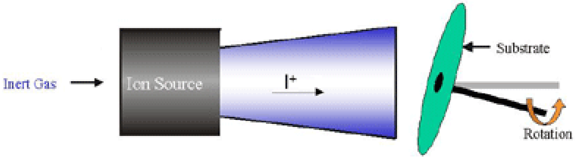
La campana in quarzo viene fabbricata utilizzando l'ion beam etching:



- una sorgente di ioni viene prodotta partendo da un gas neutro
- essa viene collimata da opportuni elettrodi
- il raggio di ioni è in grado di incidere il materiale con precisione nanometrica

Fabbricazione

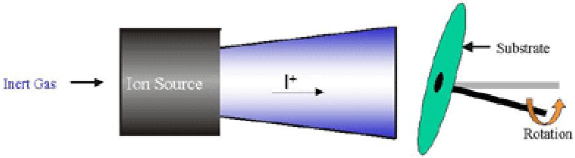
La campana in quarzo viene fabbricata utilizzando l'ion beam etching:



- una sorgente di ioni viene prodotta partendo da un gas neutro
- essa viene collimata da opportuni elettrodi
- il raggio di ioni è in grado di incidere il materiale con precisione nanometrica

Fabbricazione

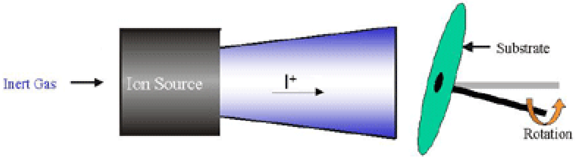
La campana in quarzo viene fabbricata utilizzando l'ion beam etching:



- una sorgente di ioni viene prodotta partendo da un gas neutro
- essa viene collimata da opportuni elettrodi
- il raggio di ioni è in grado di incidere il materiale con precisione nanometrica

Fabbricazione

La campana in quarzo viene fabbricata utilizzando l'ion beam etching:



- una sorgente di ioni viene prodotta partendo da un gas neutro
- essa viene collimata da opportuni elettrodi
- il raggio di ioni è in grado di incidere il materiale con precisione nanometrica

Precisione Raggiunta

- Precisione della superficie della campana dell'ordine dei nm
- Possibilità di rimuovere masse di 10^{-7} g da un punto preciso della superficie
- Modi non degeneri: $\Delta f < 0.005$ Hz

Precisione Raggiunta

- Precisione della superficie della campana dell'ordine dei nm
- Possibilità di rimuovere masse di 10^{-7} g da un punto preciso della superficie
- Modi non degeneri: $\Delta f < 0.005$ Hz

Precisione Raggiunta

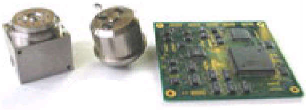
- Precisione della superficie della campana dell'ordine dei nm
- Possibilità di rimuovere masse di 10^{-7} g da un punto preciso della superficie
- Modi non degeneri: $\Delta f < 0.005$ Hz

Caratteristiche Tecniche della Campana

Frequenza di operazione	8 kHz
Diametro	30 mm
Altezza	32 mm
Fattore di qualità	$1.5 \cdot 10^7$

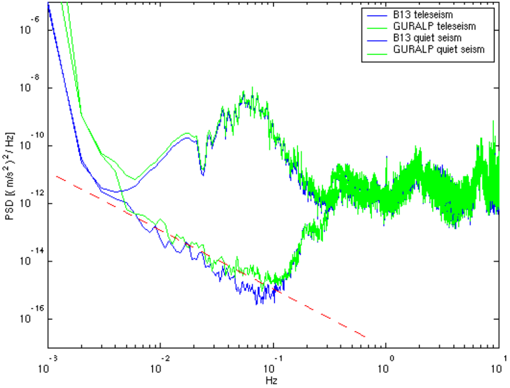
Caratteristiche Tecniche HRG

Dimensione caratteristica	40 mm
Potenza dissipata	1.5 W
Life Time	15 anni



Sensibilità richiesta

Ground acceleration power spectrum density



$$S_a(f) = \frac{10^{-17}}{f^2} \, \frac{(m/s^2)^2}{Hz}$$

$$S_\theta(f) = \frac{S_a(f)}{g^2} \approx \frac{10^{-19}}{f^2} \frac{(rad)^2}{Hz}$$

Sensibilità HRG

- Noise bianco nella velocità angolare
- Random walk angolare: $\Delta\theta \propto \sqrt{t}$

Per i giroscopi HRG della miglior qualità in commercio:

$$S_\omega(f) = 1 \cdot 10^{-16} \; \frac{(rad/s)^2}{Hz}$$

$$S_\theta(f) = \frac{2.5 \cdot 10^{-18}}{f^2} \; \frac{(rad)^2}{Hz}$$

Sensibilità HRG

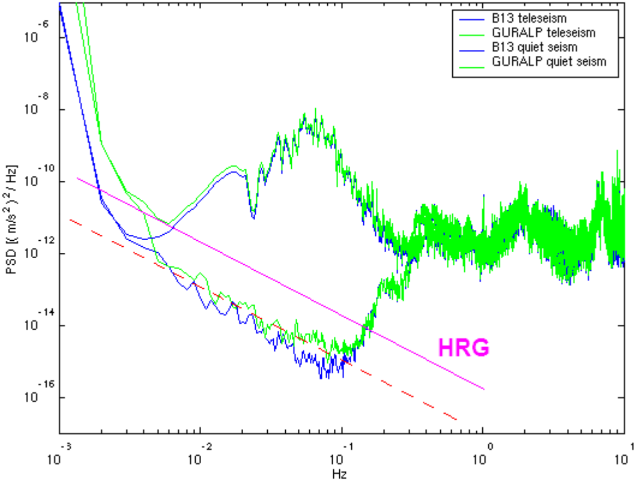
- Noise bianco nella velocità angolare
- Random walk angolare: $\Delta\theta \propto \sqrt{t}$

Per i giroscopi HRG della miglior qualità in commercio:

$$S_\omega(f) = 1 \cdot 10^{-16} \ \frac{(rad/s)^2}{Hz}$$

$$S_\theta(f) = \frac{2.5 \cdot 10^{-18}}{f^2} \ \frac{(rad)^2}{Hz}$$

Sensibilità HRG



Conclusione

I giroscopi HRG potrebbero essere una soluzione per realizzare un sistema di controllo del ground tilt nei superattenuatori di Virgo