

Sommario

Il processo di produzione di due pioni in annichilazioni e^+e^- gioca un ruolo cruciale nella determinazioni del contributo adronico al momento magnetico anomalo del muone. Presentiamo un calcolo del canale adronico $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$ all'ordine next-to-leading (NLO) combinato con il Parton Shower (PS). Secondo i recenti sviluppi nella letteratura, particolare attenzione è data alla trattazione della struttura composta del pione nei diagrammi di loop oltre all'approccio sQED comunemente usato con il fattore di forma fattorizzato, così come alla modellazione della radiazione multipla di fotoni con l'algoritmo PS.

Cacolo in sQED and F $\times$ sQED

Il fattore di forma vettoriale del pione $F_\pi(q^2)$ è introdotto per tenere conto della struttura interna dei pioni, definito come

$$\langle \pi^\pm(p') | j_{\text{em}}^\mu(0) | \pi^\pm(p) \rangle = \pm (p' + p)^\mu F_\pi((p' - p)^2)$$

Approssimazione Born

$e^-(p_1) e^+(p_2) \rightarrow \gamma^* \rightarrow \pi^-(p_3) \pi^+(p_4)$

La sezione d'urto all'ordine $\mathcal{O}(\alpha^2)$ è

$$\frac{d\sigma_{\text{LO}}}{d\cos\vartheta} = \frac{\alpha^2 \pi}{4s\beta_e} \beta_\pi^3 (1 - \beta_e^2 \cos^2\vartheta) |F_\pi(s)|^2$$

Correzioni fotoniche NLO

A $\mathcal{O}(\alpha^3)$ la sezione d'urto riceve correzioni fotoniche reali e virtuali, calcolate con il taglio dello spazio delle fasi

$$\sigma_{2\rightarrow 2} = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \int d\Phi_2 |\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 + \int d\Phi_2 2 \text{Re} \left(\mathcal{M}_{\text{LO}}^\dagger \mathcal{M}_V(\lambda) \right) \right\}$$

$$\sigma_{2\rightarrow 3} = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \int_{\lambda \leq \omega \leq \Delta E} d\Phi_3 |\mathcal{M}_{2\rightarrow 3}|^2 + \int_{\omega > \Delta E} d\Phi_3 |\mathcal{M}_{2\rightarrow 3}|^2 \right\}$$

Sezione d'urto NLO

$$\sigma_{\text{NLO}} = \sigma_{2\rightarrow 2} + \sigma_{2\rightarrow 3} = \sigma_{\text{LO}} \left(1 + \delta_{SV}^{\text{ISR}} + \delta_{SV}^{\text{FSR}} + \delta_{SV}^{\text{IFI}} \right) + \sigma_H$$

La sezione d'urto, divisa in sottinsiemi gauge invarianti, riceve contributi dai seguenti diagrammi

Insieme	Diagrammi	$F_\pi(q^2)$
ISR	reali	$F_\pi(m_{\pi\pi}^2)$
	virtuali	$F_\pi(s)$
FSR	reali	$F_\pi(s)$
	virtuali	$F_\pi(s)$
IFI	virtuali	$F_\pi(s)$

Algoritmo di Parton Shower

Il fattore di forma di Sudakov rappresenta la probabilità di emettere fotoni *non visibili* con energia $k_0 < \varepsilon\sqrt{s}/2$

$$\Pi(\varepsilon, Q^2) = \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{1-\varepsilon} dz P(z) \int d\Omega_k \sum_{i,j} \eta_i \eta_j \frac{p_i \cdot p_j}{(p_i \cdot k)(p_j \cdot k)} k_0^2 \right\}$$

$P(z)$ è la funzione di splitting, descrive come si distribuisce l'energia del fotone emesso e dipende dallo spin dell'emettitore

$$I_+^{\text{QED}}(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} dz P_f(z) = -2 \ln \varepsilon - \frac{3}{2} + 2\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

$$I_+^{\text{sQED}}(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} dz P_s(z) = -2 \ln \varepsilon - 2 + 2\varepsilon$$

La master formula implementata in BabaYaga@NLO è

Parton Shower QED+sQED

$$d\sigma_{\text{NLOPS}} = F_{SV} \Pi(\varepsilon, Q^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{i=1}^n F_{H,i} \right) |\mathcal{M}_n^{\text{PS}}|^2 d\Phi_n$$

dove F_{SV} e $F_{H,i}$ sono i fattori di correzione per bremsstrahlung soft+virtuale e dura

$$F_{SV} = 1 + \frac{d\sigma_{SV}^{\text{NLO}} - d\sigma_{SV}^{\text{PS},\alpha}}{d\sigma_{\text{LO}}}$$

$$F_{H,i} = 1 + \frac{|\mathcal{M}_1^{\text{NLO}}(k_i)|^2 - |\mathcal{M}_1^{\text{PS},\alpha}(k_i)|^2}{|\mathcal{M}_1^{\text{PS},\alpha}(k_i)|^2}$$

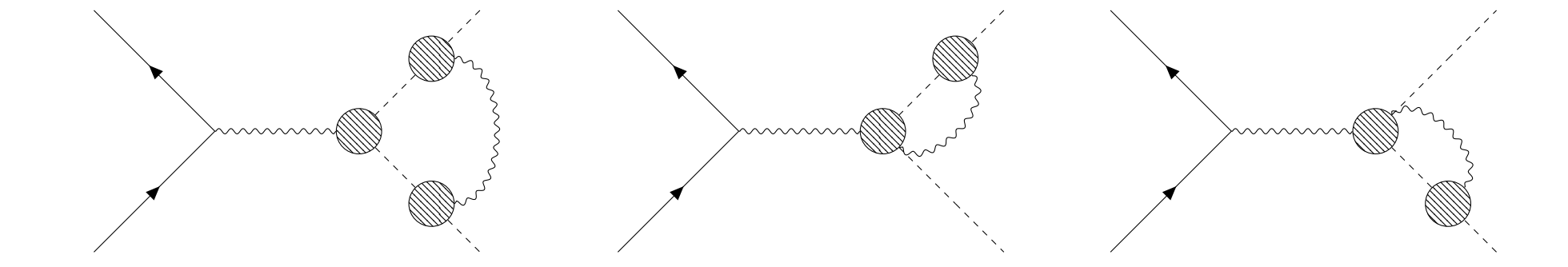
La struttura composta del pione nei loop

Per migliorare l'accuratezza teorica della descrizione dei dati attraverso la generazione di eventi Monte Carlo, $F_\pi(q^2)$ deve essere incluso nelle ampiezze virtuali di loop

$$\delta_{V,\text{FF}}^i(\lambda) = \frac{2 \text{Re} \left\{ F_\pi(s)^* \mathcal{M}_{\text{LO},0}^\dagger \mathcal{M}_{V,\text{FF}}^i(\lambda) \right\}}{|F_\pi(s)|^2 |\mathcal{M}_{\text{LO},0}|^2}, \quad \begin{array}{l} i = \text{FSR, IFI} \\ \text{FF} = \text{GVMD, FsQED} \end{array}$$

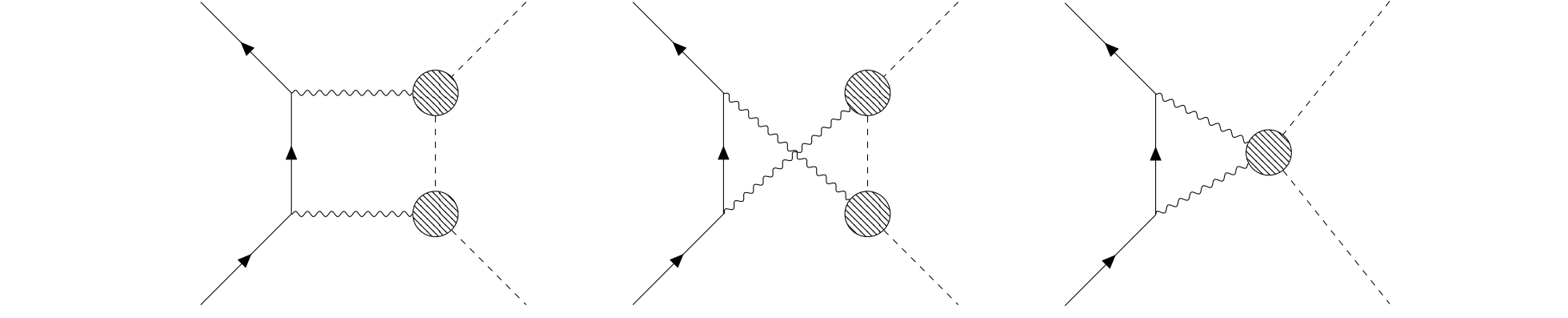
La **radiazione di stato finale** rinormalizzata si modifica come

$$\delta_{V,\text{FF}}^{\text{FSR}} = \delta_{V,0}^{\text{FSR}} + \text{IR-finiti}$$



L'inserimento del fattore di forma nell'**interferenza inizio-fine** è equivalente a scambiare fotoni con massa effettiva s'

$$\bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(s', s'') = \frac{2 \mathcal{M}_{\text{LO},0}^\dagger \mathcal{M}_{V,0}^{\text{IFI}}(s', s'')}{|\mathcal{M}_{\text{LO},0}|^2}$$



La divergenza IR dei diagrammi IFI diagrams deve cancellarsi con il contributo soffic

$$\delta_{S,\text{IR}}^{\text{IFI}} + \delta_{V,\text{IR}}^{\text{IFI}} = \mathcal{C}_{\text{IR}}^{\text{IFI}} \left(\log \frac{4\Delta E^2}{\lambda^2} + \log \frac{\lambda^2}{s} \right) = \text{finite}$$

Calcolo NLO con il modello GVMD

Il fattore di forma viene approssimato come la somma di n_r funzioni di Breit-Wigner

$$F_\pi^{\text{BW}}(q^2) = \sum_{v=1}^{n_r} F_{\pi,v}^{\text{BW}}(q^2) = \frac{1}{c_t} \sum_{v=1}^{n_r} c_v \frac{\Lambda_v^2}{\Lambda_v^2 - q^2} \quad \Lambda_v^2 = M_v^2 - i\Gamma_v M_v$$

$$\text{Diagram with a pion loop} = \text{Diagram with a photon} \times F_\pi^{\text{BW}}(q^2)$$

che modificano il vertice e la correzione IFI come

$$\delta_{V,\text{GVMD}}^{\text{IFI}}(\lambda) = \sum_{v=1}^{n_r} \sum_{w=1}^{n_r} \text{Re} \left\{ \frac{c_v c_w}{c_t^2 F_\pi(s)} \Delta_{V,\text{GVMD}}^{\text{IFI}}(\Lambda_v^2, \Lambda_w^2) \right\}$$

con

$$\Delta_{V,\text{GVMD}}^{\text{IFI}}(\Lambda_v^2, \Lambda_w^2) = \bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(\lambda^2, \lambda^2) - \bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(\Lambda_v^2, \lambda^2) - \bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(\lambda^2, \Lambda_w^2) + \bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(\Lambda_v^2, \Lambda_w^2)$$

Calcolo NLO con l'approccio FsQED

Si basa sulle proprietà di analiticità del fattore di forma

Relazione di dispersione

$$F_\pi(q^2) = 1 - \frac{q^2}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds' \text{Im} F_\pi(s')}{s' (q^2 - s')}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \text{Im} F_\pi(s') = 1$$

La divergenza IR è sparpagliata tra parte reale e immaginaria

$$\delta_{V,\text{FsQED}}^{\text{IFI}} = \frac{1}{|F_\pi(s)|^2} \left[\text{Re} F_\pi(s) \text{Re} \Delta_{V,\text{FsQED}}^{\text{IFI}} + \text{Im} F_\pi(s) \text{Im} \Delta_{V,\text{FsQED}}^{\text{IFI}} \right]$$

data dai contributi polari-dispersivi

$$\Delta_{V,\text{FsQED}}^{\text{IFI}} = \bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(\lambda^2, \lambda^2) - \frac{2}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \text{Im} F_\pi(s') \left[\bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(s', \lambda^2) \right]$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int \int \frac{ds' ds''}{s' s''} \text{Im} F(s') \text{Im} F(s'') \bar{\delta}_V^{\text{IFI}}(s', s'').$$

La divergenza IR viene ricostruita come

$$\delta_{V,\text{FsQED}}^{\text{IFI}} \Big|_{\text{IR}} = \left(\frac{|\text{Re} F_\pi(s)|^2}{|F_\pi(s)|^2} \mathcal{C}_{\text{IR}} + \frac{|\text{Im} F_\pi(s)|^2}{|F_\pi(s)|^2} \mathcal{C}_{\text{IR}} \right) \log \frac{\lambda^2}{s}$$

Paticolare attenzione è data alla parte immaginaria a causa della

Singularità di punto finale

$$\mathcal{I}_{1/s'}(x) = \text{Im} \int_{4m_\pi^2}^s \frac{ds'}{s'} \mathcal{D}_0^{e,\pi}(x, s', s'') = \frac{1}{4s} \mathcal{L}(x) + \mathcal{I}_2(x)$$

$$\mathcal{I}_{s'/s'}(x) = \text{Im} \int_{4m_\pi^2}^s ds' \mathcal{D}_0^{e,\pi}(x, s', s'') = \frac{1}{4} \mathcal{L}(x)$$

dove $\mathcal{L}(x)$, $x = t, u$ sono gli integrali iconali di 't-Hooft e Veltman.

Risultati numerici

Per ottenere risultati numerici realistici utilizziamo dei criteri di selezione di eventi ispirati ai tagli cinematici di CMD-3

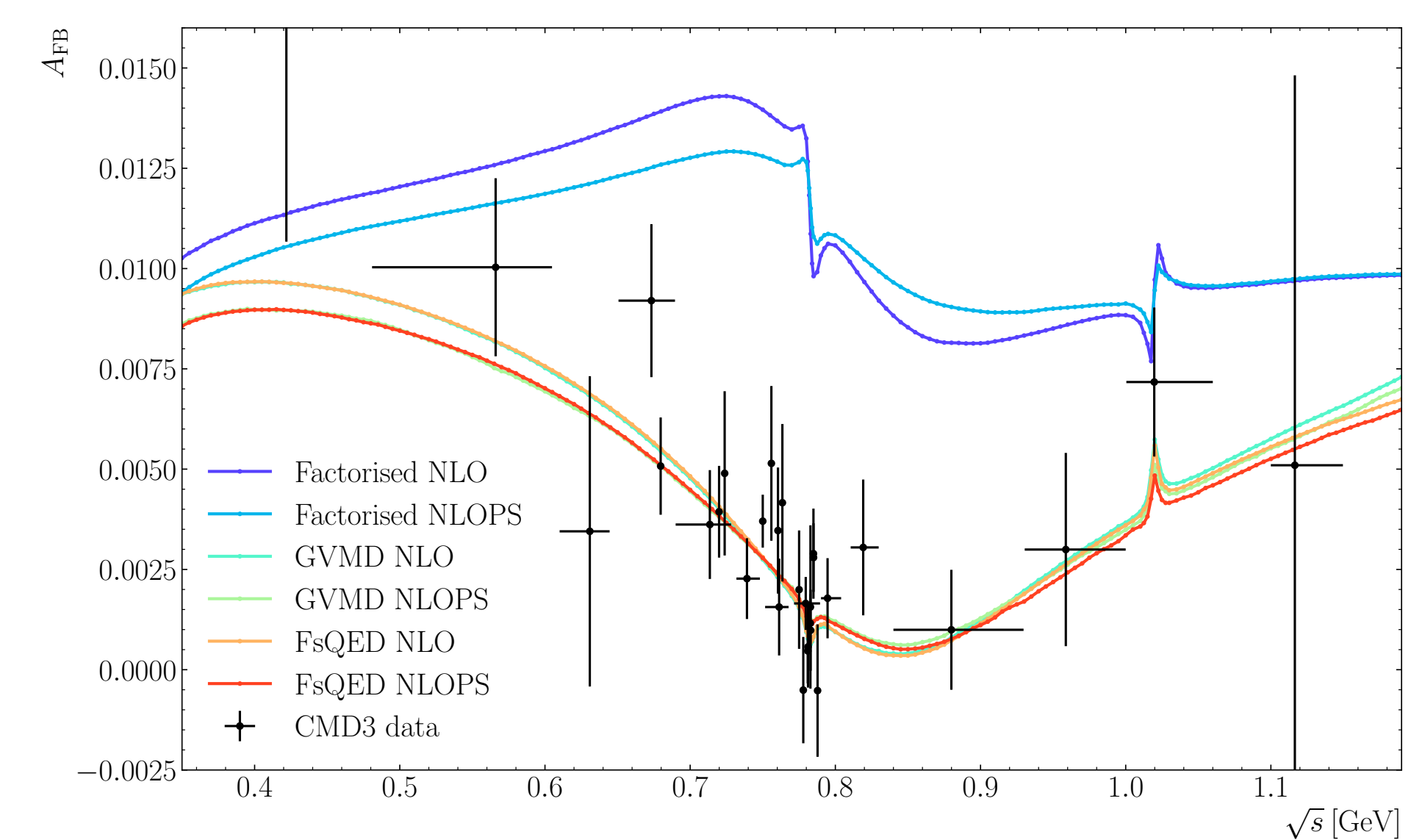
$$p^\pm \equiv |\mathbf{p}^\pm| > 0.45E, \quad \vartheta_{\text{avg}} \equiv \frac{1}{2}(\pi - \vartheta^+ + \vartheta^-) \in [1, \pi - 1],$$

$$\delta\vartheta \equiv |\vartheta^+ + \vartheta^- - \pi| < 0.25 \quad \delta\phi \equiv |\phi^+ - \phi^- - \pi| < 0.15$$

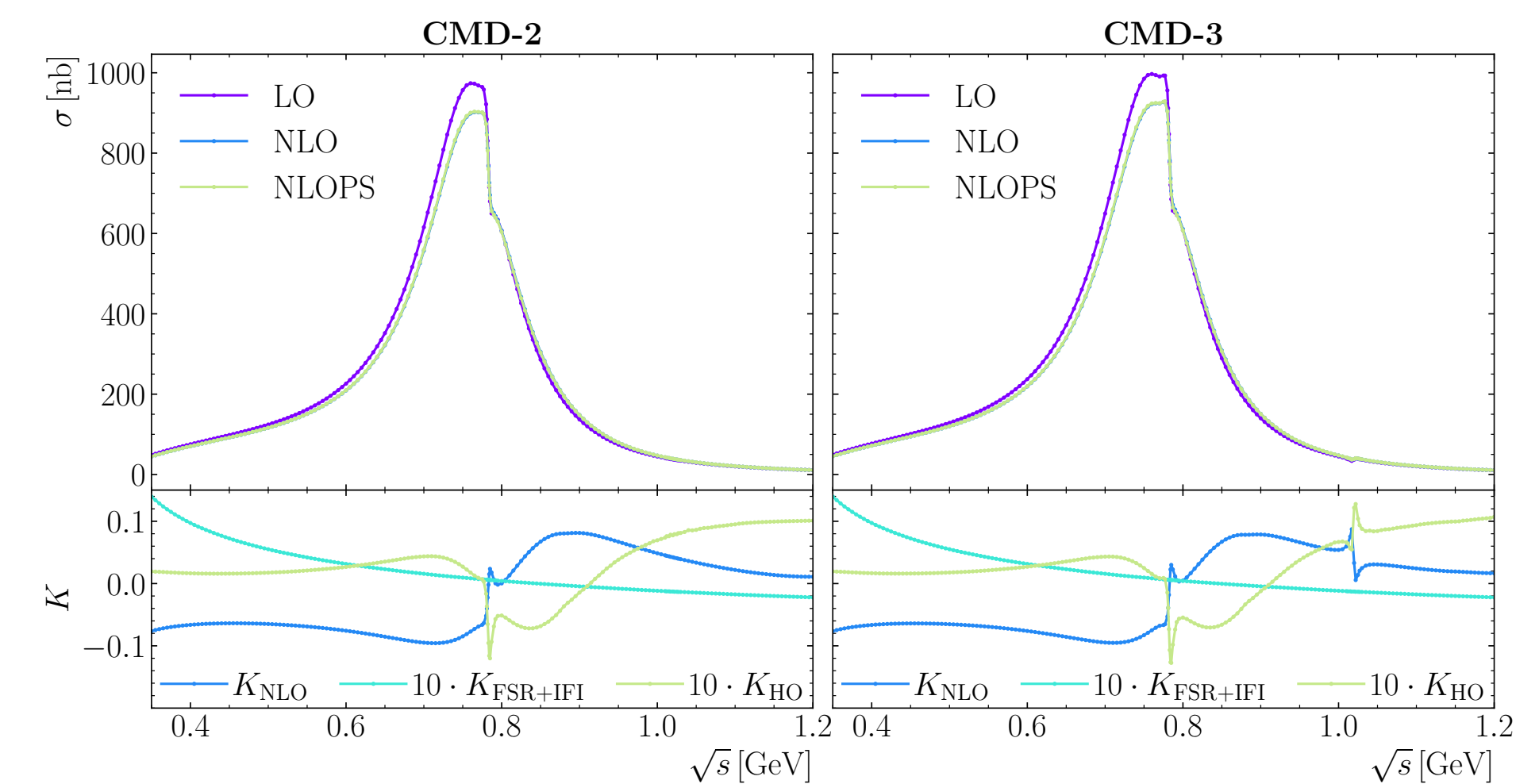
Asimmetria di carica

Riceve contributi solo dai diagrammi IFI, è un test dell'approccio per la descrizione di F_π

$$A_{\text{FB}}(\sqrt{s}) = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B}$$

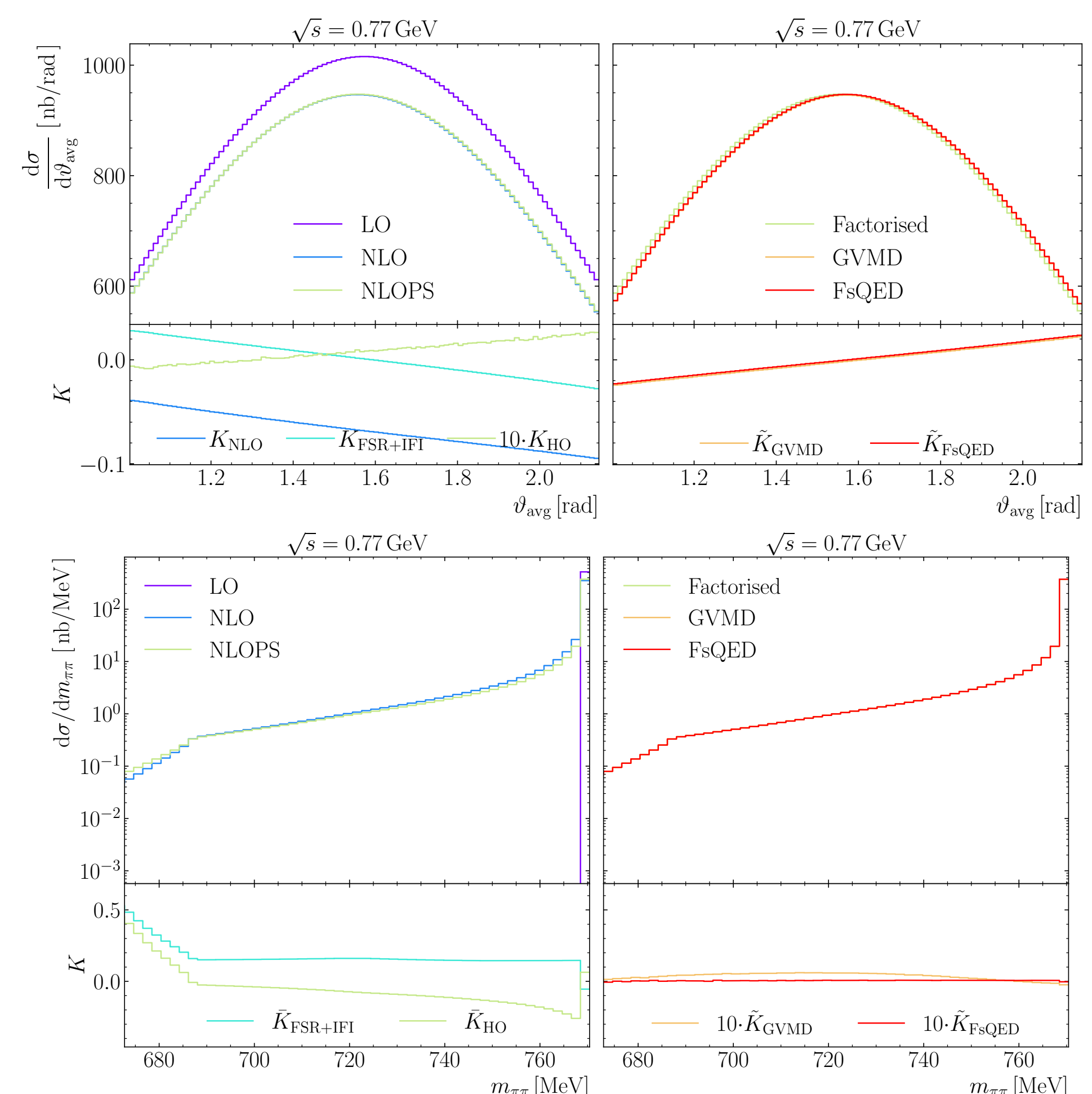


Sezioni d'urto integrate



Sezioni d'urto differenziali

$$\tilde{K}_{\text{FF}} = \left(\frac{d\sigma_{\text{FF}}}{d\vartheta_{\text{avg}}} \right) \left(\frac{d\sigma_{\text{Factorised}}}{d\vartheta_{\text{avg}}} \right)^{-1} - 1$$



Conclusioni

Si mostra perfetto accordo tra gli approcci GVMD e FsQED, rimuovendo la discrepanza presente in letteratura

Referenze

- G. Balossini, C. M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicosini, and F. Piccinini. Matching perturbative and parton shower corrections to the Bhabha process at flavour factories. *Nucl. Phys.*, B758:227–253, 2006.
- Gilberto Colangelo, Martin Hoferichter, Joachim Monnard, and Jacobo Ruiz de Elvira. Radiative corrections to the forward-backward asymmetry in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$. *JHEP*, 08:295, 2022.
- Fedor Ignatov and Roman N. Lee. Charge asymmetry in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ process. *Phys. Lett. B*, 833:137283, 2022.

arXiv:2409.03469

