

# (un po' di) ottica in Virgo

Camilla De Rossi

15 Ottobre 2024



# laser

**L**ight

**A**mplification by

**S**timulated

**E**mission of

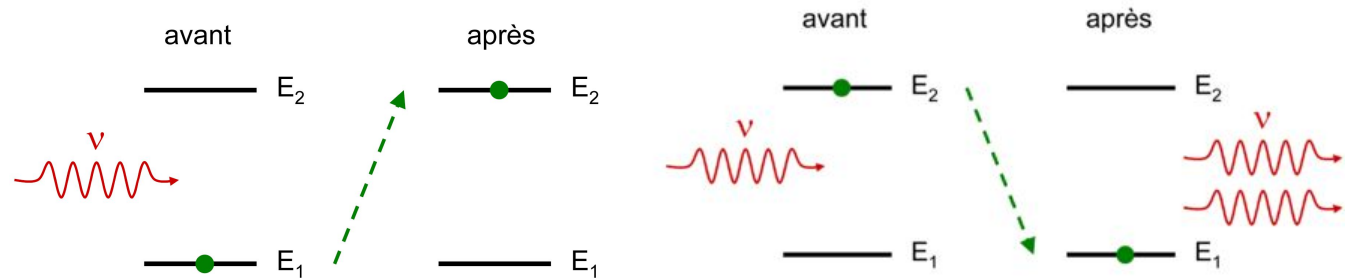
**R**adiation

1919 - Einstein emissione stimolata

1954 - maser (microonde)

1958 - Schawlow e Townes studiarono la possibilità di usare il principio del maser per l'amplificazione della luce

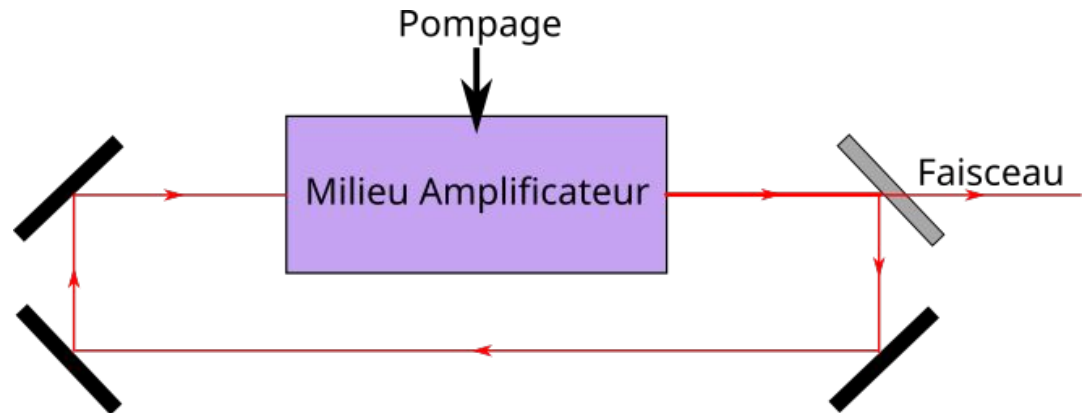
1960 - laser



# laser

I laser sono dei risuonatori ottici. Sono composti da tre elementi:

- un mezzo attivo (solido Nd:YAG, fibra, gas HeNe, liquido)
- un sistema di pompaggio
- una cavità risonante



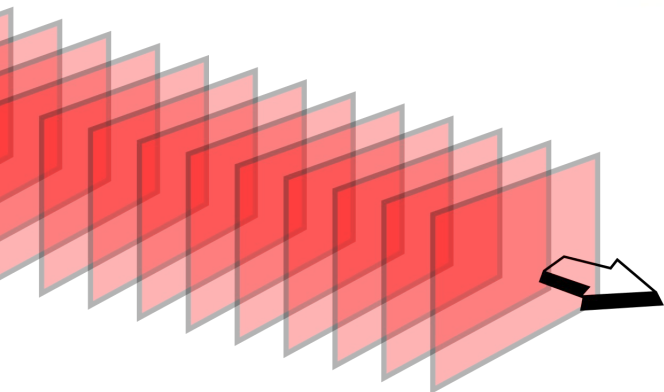
# onde piane

Il campo elettromagnetico di un laser è descritto dalle equazioni di Maxwell. Considerando che nelle nostre applicazioni è polarizzato, si può descrivere in termini di ampiezza e fase

$$\Psi = Ae^{i\phi}$$

La propagazione nel vuoto si può esprimere in termini di onde piane di frequenza data dalla lunghezza d'onda del laser

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \text{e vettore d'onda} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$



$$\Psi(t, z) = \Psi_0 e^{i\omega t - ikz}$$

n.b.: non corrisponde ad alcun fenomeno fisico equivalente in senso stretto, è utilizzata per approssimare il caso in cui la sorgente dell'onda è posta a distanza infinita dal punto di osservazione del fronte d'onda considerato

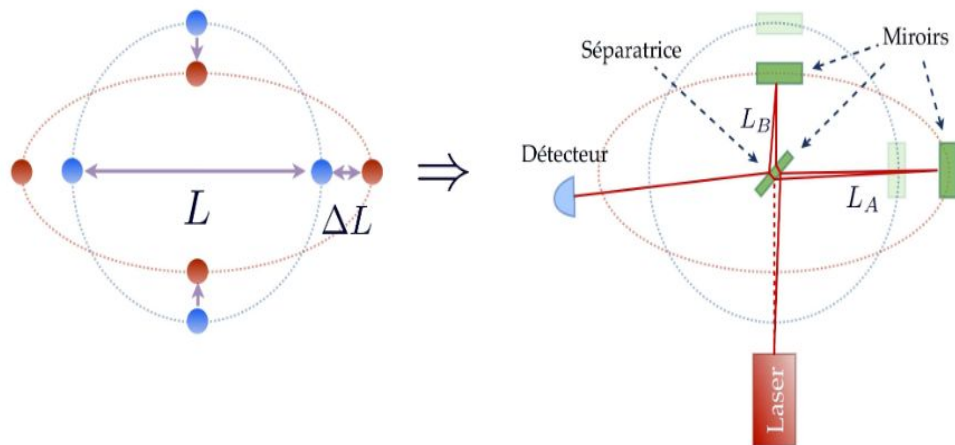
# differenza di cammino ottico e fase

Il passaggio di un'onda gravitazionale crea una variazione differenziale nella distanza tra le test masses (in caduta libera)

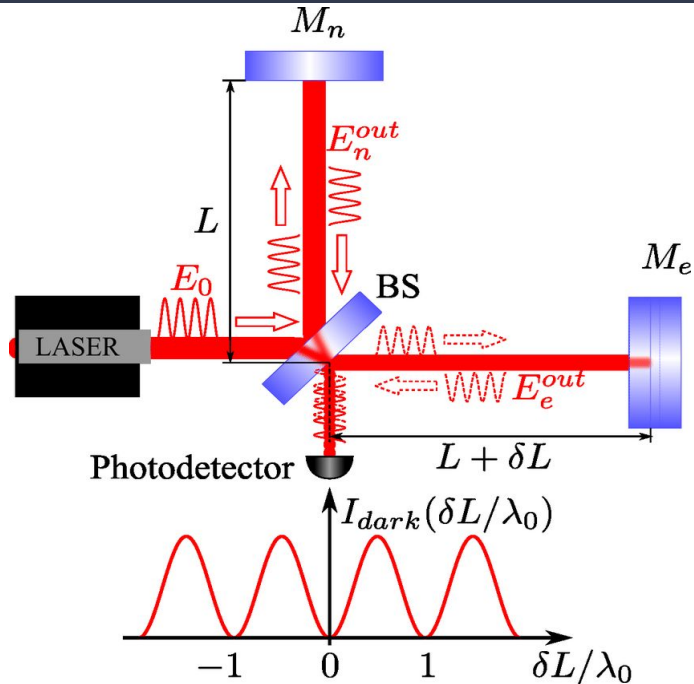
$$\delta L = \pm h L$$

Gli interferometri convertono una variazione di cammino ottico in una variazione di fase

$$\delta\phi = G \delta L$$



# interferometro di Michelson



ref: Quantum Measurement Theory in Gravitational-Wave Detectors -  
[https://www.researchgate.net/figure/Scheme-of-a-Michelson-interferometer-When-the-end-mirrors-of-the-interferometer-arms-M\\_fig1\\_221672918/actions#reference](https://www.researchgate.net/figure/Scheme-of-a-Michelson-interferometer-When-the-end-mirrors-of-the-interferometer-arms-M_fig1_221672918/actions#reference)

# specchi: riflessione e trasmissione

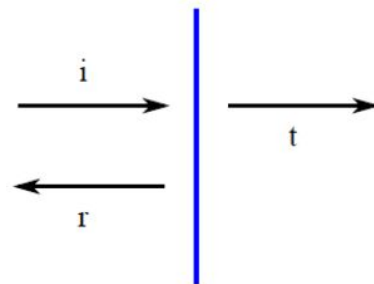
**Un interferometro è fatto di specchi semi-trasparenti.**

La riflettività e trasmittività degli specchi devono soddisfare il principio di conservazione dell'energia

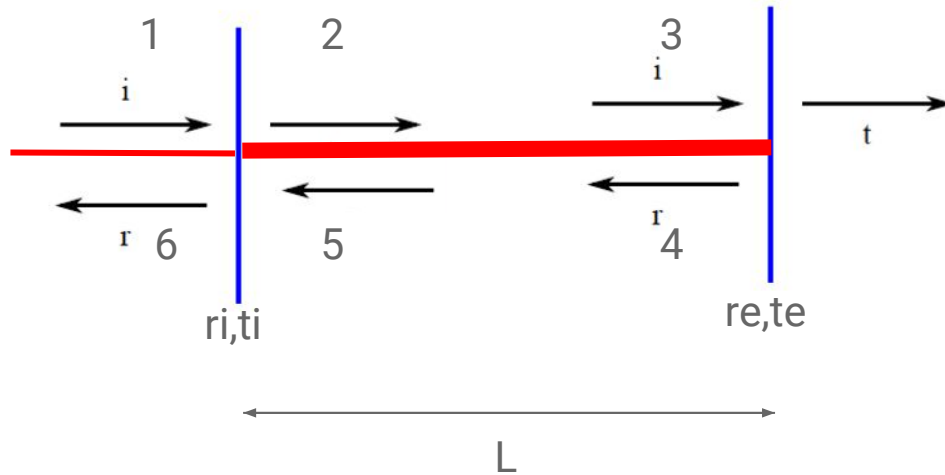
$$\begin{aligned} |\Psi_r| &= r|\Psi_i| & r^2 + t^2 &= 1 - L \\ |\Psi_t| &= t|\Psi_i| \end{aligned}$$

Si può scegliere la fase del campo riflesso e trasmesso

$$\begin{aligned} \Psi_r &= ir\Psi_i \\ \Psi_t &= t\Psi_i \end{aligned}$$



# cavità ottica: Fabry-Perot



se il fascio subisce multiple riflessioni e trasmissioni i campi intracavità e quello riflesso si possono scrivere così:

$$\Psi_{cav} = \frac{t_i}{1 + r_i r_e e^{-2ikL}} \Psi_1$$
$$\Psi_{ref} = i \frac{r_i + r_e (t_i^2 + r_i^2) e^{-2ikL}}{1 + r_i r_e e^{-2ikL}} \Psi_1$$



# cavità ottica: Fabry-Perot

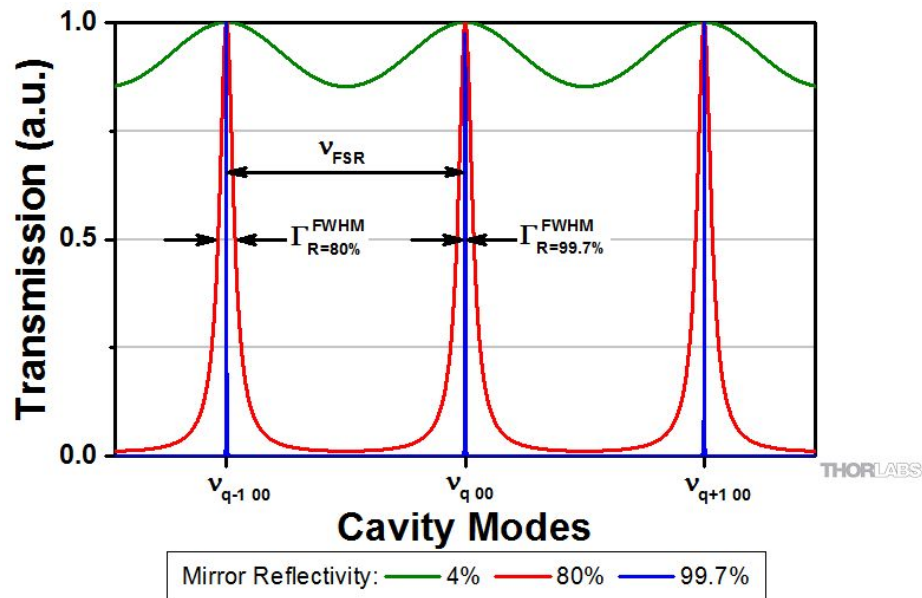
$\Psi_{cav}$  è massimo se  $e^{-2ikL} = -1$

Si ha risonanza ogni:

$\Delta L = \lambda/2$  oppure  $\Delta \nu = c/2L$  (free spectral range)

e si definiscono due parametri: la half width half maximum e la finesse

$$\delta L_{HWHM} = \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \quad \mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_i r_e}}{1 - r_i r_e}$$

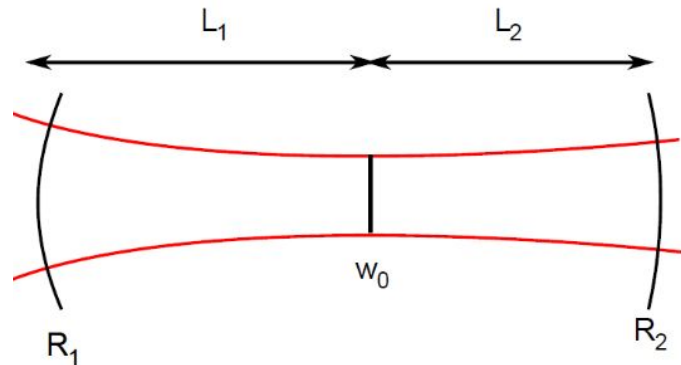


# cavità Fabry-Perot

se gli specchi hanno raggi di curvatura  $R_1$  e  $R_2$ .

In questo tipo di cavità si forma un'onda stazionaria.

Il cammino ottico  $d$  è la distanza percorsa dalla luce su un andata-ritorno nella cavità moltiplicata per l'indice di rifrazione visto dalla luce.



$$R_1 = L_1 \left( 1 + \frac{z_R^2}{L_1^2} \right)$$

$$R_2 = L_2 \left( 1 + \frac{z_R^2}{L_2^2} \right)$$

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

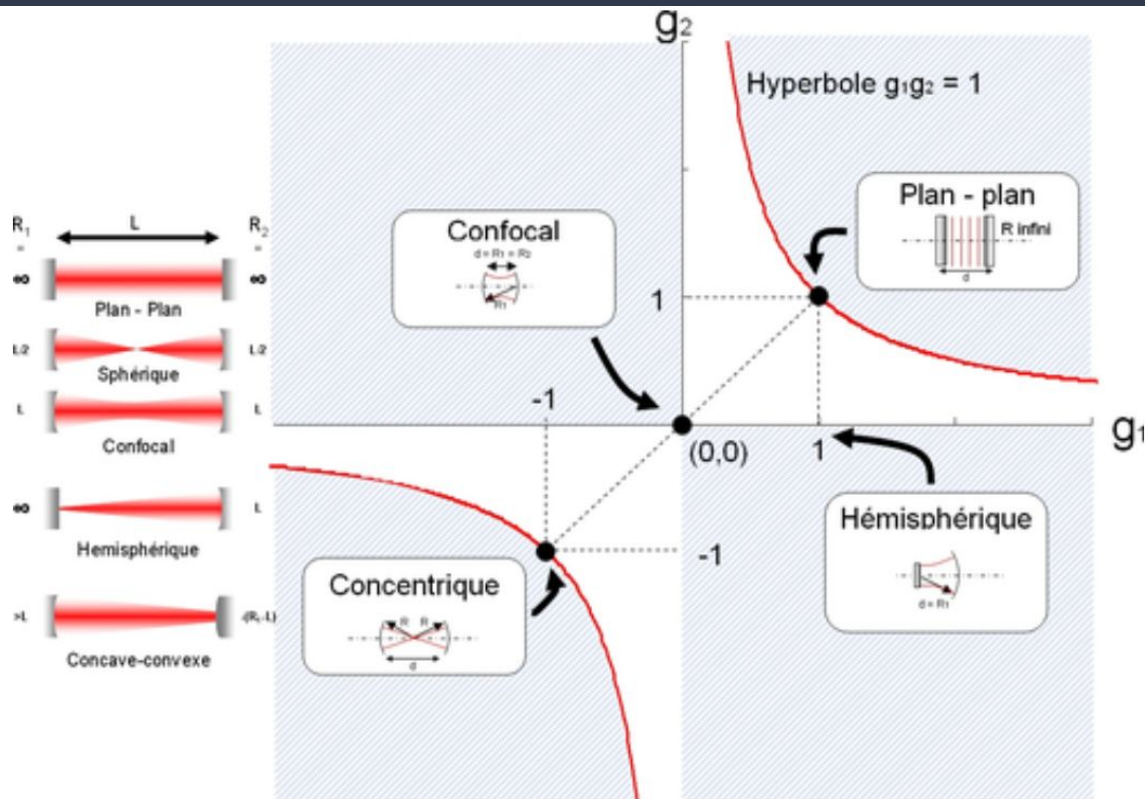
$$L_1 = \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} L$$

$$L_2 = \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} L$$

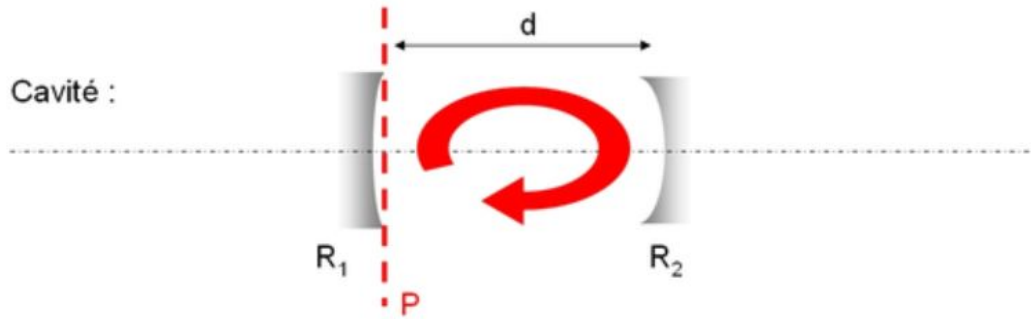
# stabilità di una cavità ottica

Diagramma dello spazio  $g_1(g_2)$ : la condizione di stabilità è rappresentata da due iperboli (zone rigate = instabilità)

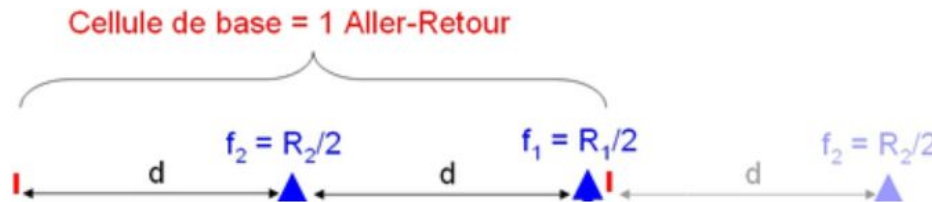
- sull'iperbole  $g_1g_2=1$ :  $L=R_1+R_2$ , sono le cavità concentriche.
- Le rette  $g_1=1$  e  $g_2=1$  corrispondono a cavità dove uno degli specchi è piano (raggio di curvatura infinito). La cavità Fabry-Pérot è con  $g_1=g_2=1$
- $R_1 = R_2 = L$  ( $g_1 = g_2 = 0$ ), si ha una cavità « confocale »



# stabilità di una cavità ottica

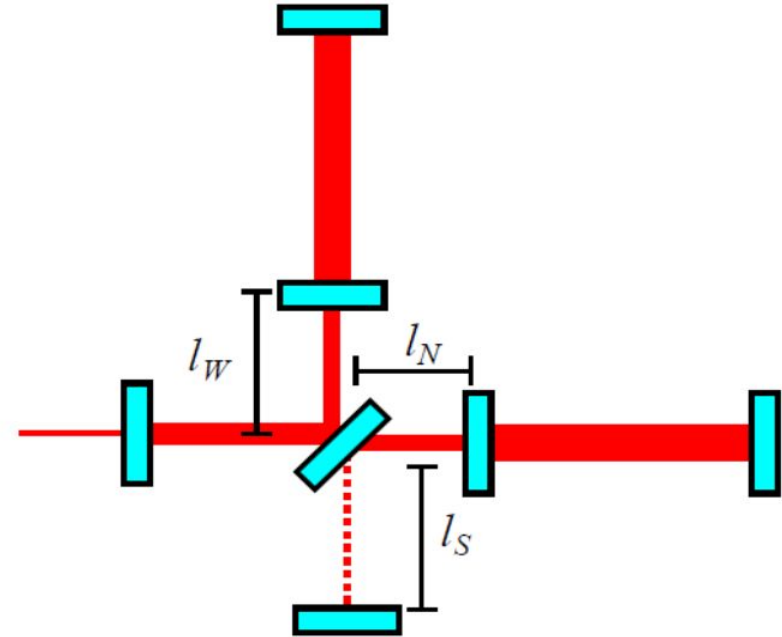
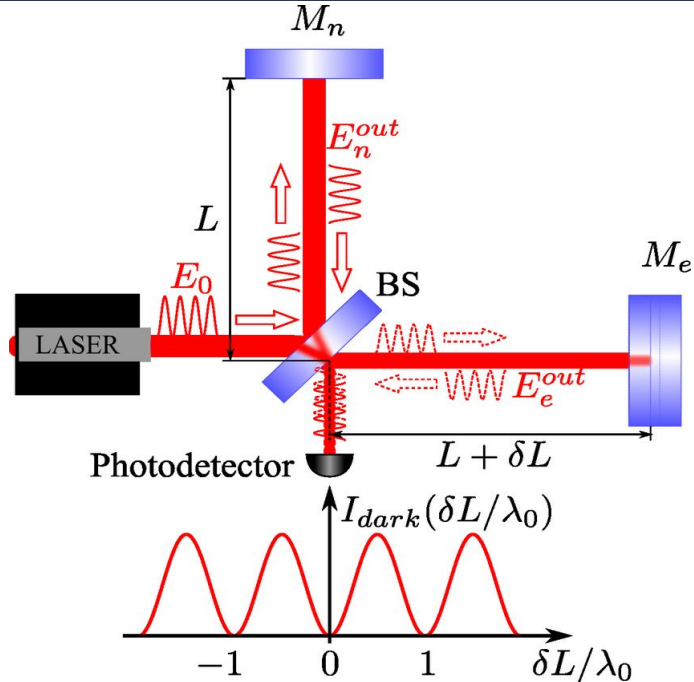


Cavité dépliée:



Un raggio che fa andata - ritorno nella cavità può essere “spiegato” lungo l’asse  $z$  e la luce è come se attraversasse delle lenti di focale  $f=R/2$  invece di specchi di raggio di curvatura  $R$

# interferometro di Michelson



# fasci gaussiani

Le onde piane non sono adatte a descrivere il campo in una cavità, perchè l'intensità decresce allontanandosi dall'asse ottico e perchè il fronte d'onda deve adattarsi al raggio di curvatura degli specchi.

Cercando altre soluzioni possibili delle equazioni di Maxwell, dall'equazione d'onda scalare

$$(\Delta + k^2) \mathcal{E}_k(x, y, z) = 0$$

con l'approssimazione parassiale (raggi "confinati" lungo z)

$$\mathcal{E}(x, y, z) = e^{ikz} \Psi(x, y, z) \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \ll k \Psi$$

si ottiene

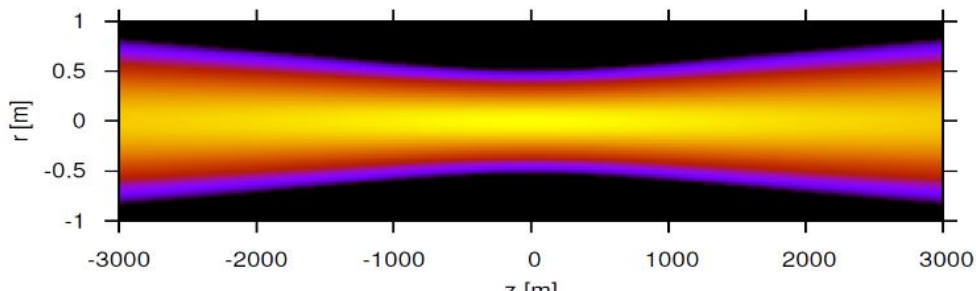
$$(2ik\partial_z + \partial_x^2 + \partial_y^2) \Psi = 0$$

# modo fondamentale gaussiano

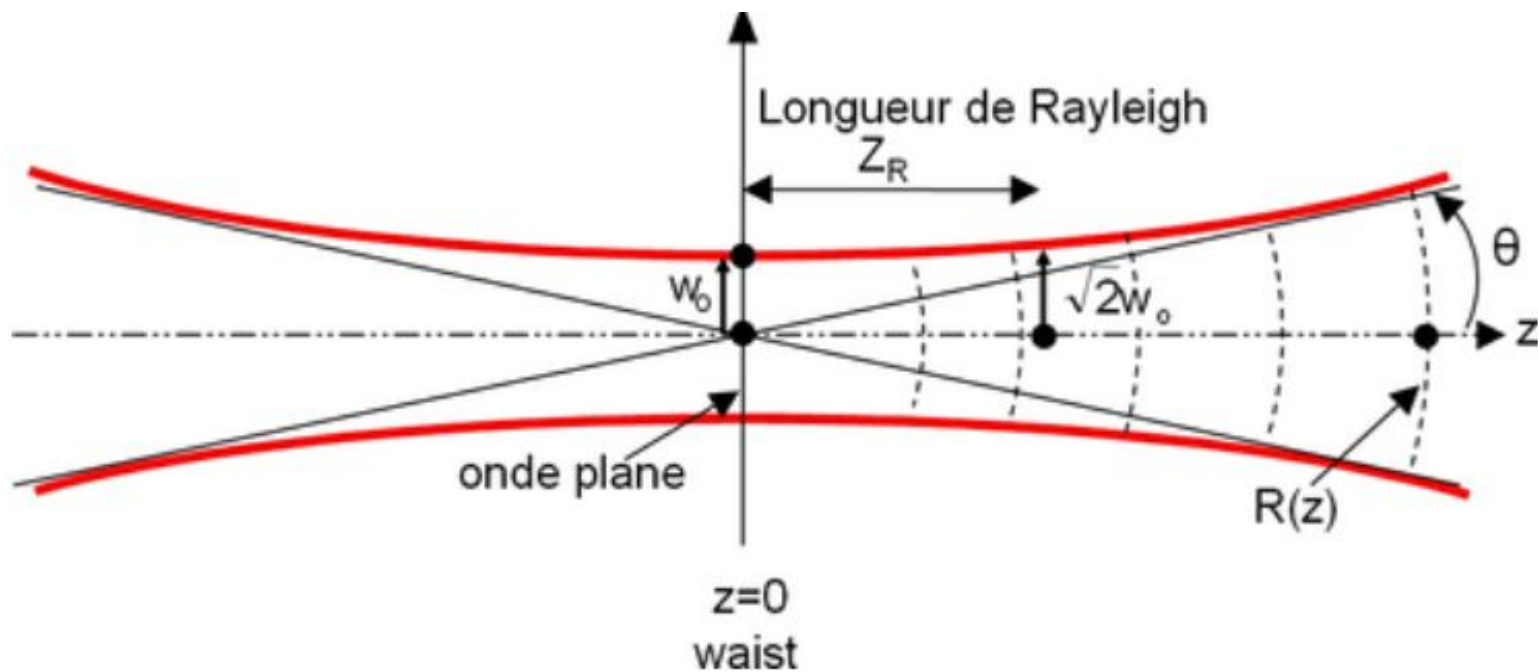
Assumendo simmetria cilindrica lungo l'asse, una soluzione è il modo fondamentale gaussiano

$$\Psi(r, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{i \arctan \frac{z}{z_R}} e^{-ikz}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad R(z) = z \left( 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad z_R = \frac{kw_0^2}{2}$$



# modo fondamentale gaussiano

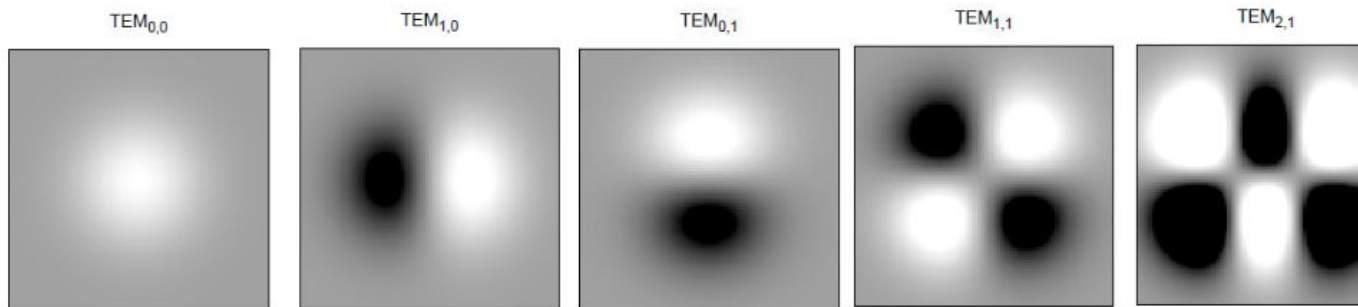




# modi di Hermite-Gauss

togliendo la condizione sulla simmetria cilindrica si ottengono gli altri modi

$$TEM_{mn}(x, y, z) = N_{mn}(z) e^{ikz} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-i(n+m+1) \arctan(z/z_R)} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$$



# Bibliografia

- slides del corso “Interferometer configurations”, VESF School on Advanced Gravitational Wave Detectors 2012, Gabriele Vajente
- sito del corso di ottica, università Parigi 13, Sebastien Forget  
[http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI\\_fr\\_M01\\_C03/co/OPI\\_fr\\_M01\\_C03\\_web.html](http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI_fr_M01_C03/co/OPI_fr_M01_C03_web.html)

# Hermite - Gauss vs Laguerre - Gauss

