Introduzione alla teoria dei controlli feedback per sistemi dinamici

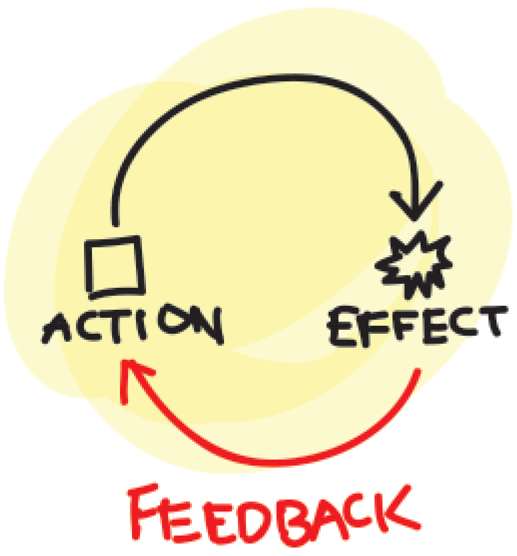
Manuel Pinto, Maddalena Mantovani, Julia Casanueva Diaz, Mattia Boldrini

Sommario

Introduzione alla teoria dei controlli automatici retroazionati;

- Definizione degli elementi principali costituenti un loop di controllo:
  - Plant; Sensore; Controllore; Attuatore; set-point e segnale di errore;
  - Raggiungimento delle proprietà di stabilità e accuratezza;
- Definizione della logica di controllo feedback:
  - Controllo PID (proporzionale-integrale-derivativo)
- Theory to Practice: applicazione della teoria feedback al controllo di un galvo per il puntamento di un laser:
  - Misurazione della plant meccanica del sistema;
  - Disegno e implementazione del controllore feedback;
  - Applicazione sperimentale

Introduzione



Per loop di **controllo feedback** si intende l’insieme delle azioni effettuate su un sistema dinamico, al fine di caratterizzarne l’evoluzione temporale, sulla base di un processo di osservazione di una particolare variabile di interesse (variabile misurata).

L’azione di controllo, deve essere opportunamente «disegnata» con lo scopo finale di ottenere due principali obiettivi: stabilità del sistema e accuratezza di controllo della variabile di interesse.

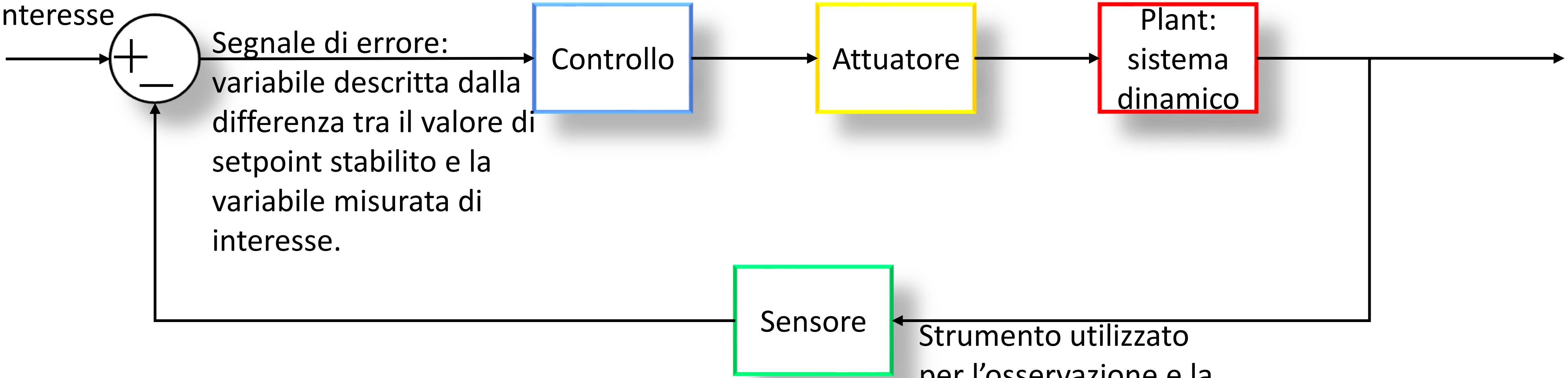
Elementi di un loop di controllo feedback

Setpoint: valore target al quale si desidera mantenere allo stato stazionario la variabile misurata di interesse

Legge dinamica che perturba il sistema al fine di minimizzare il segnale di errore

Strumento utilizzato per applicare l'azione di controllo al fine di condizionare l'evoluzione del sistema dinamico e la variabile misurata di interesse.

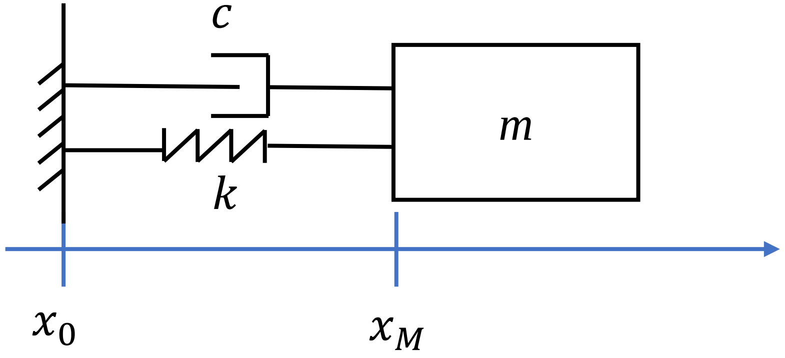
Processo dinamico da controllare e stabilizzare



Segnale di errore: variabile descritta dalla differenza tra il valore di setpoint stabilito e la variabile misurata di interesse.

Strumento utilizzato per l'osservazione e la misurazione della variabile di interesse.

Sistema dinamico: Plant e descrizione analitica



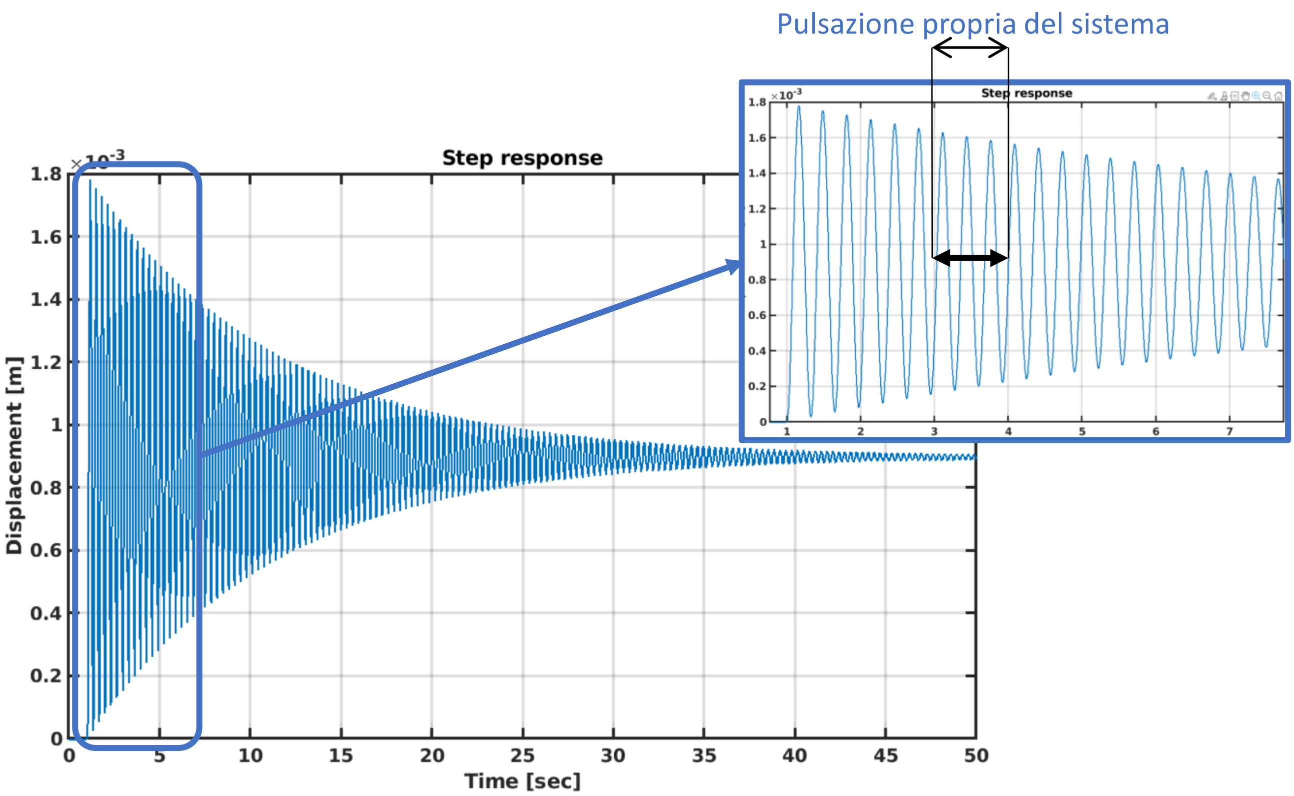
Elemento essenziale per il disegno di logiche di controllo, è il **modello matematico** che descrive la dinamica del processo da controllare.
L'estrazione di tale modello porta alla definizione di quella che in gergo viene chiamata **Plant**.
Il sistema dinamico più «semplice», che sta alla base della rappresentazione di molti processi esistenti in natura, è **l'oscillatore armonico**.

Gli elementi principali dell'oscillatore armonico sono una massa M, collegata ad un riferimento fisso mediante un link elastico caratterizzato da una rigidezza k e uno smorzamento c.
L'equazione del moto caratteristica della massa è definita dall'equazione differenziale:

$$m\ddot{x}_M + k(x_M - x_0) + c(\dot{x}_M - \dot{x}_0) = F(t)$$

$$\ddot{x}_M + \frac{k}{m}(x_M) + \frac{c}{m}(\dot{x}_M) = \frac{F(t)}{m}$$

Il rapporto $\frac{k}{m}$ definisce il cosiddetto «autovalore» del sistema, che rappresenta la pulsazione propria del sistema ω_0^2. La pulsazione si misura in radianti/sec ed è legata alla frequenza in Hz, dalla relazione $\omega = 2\pi f$.



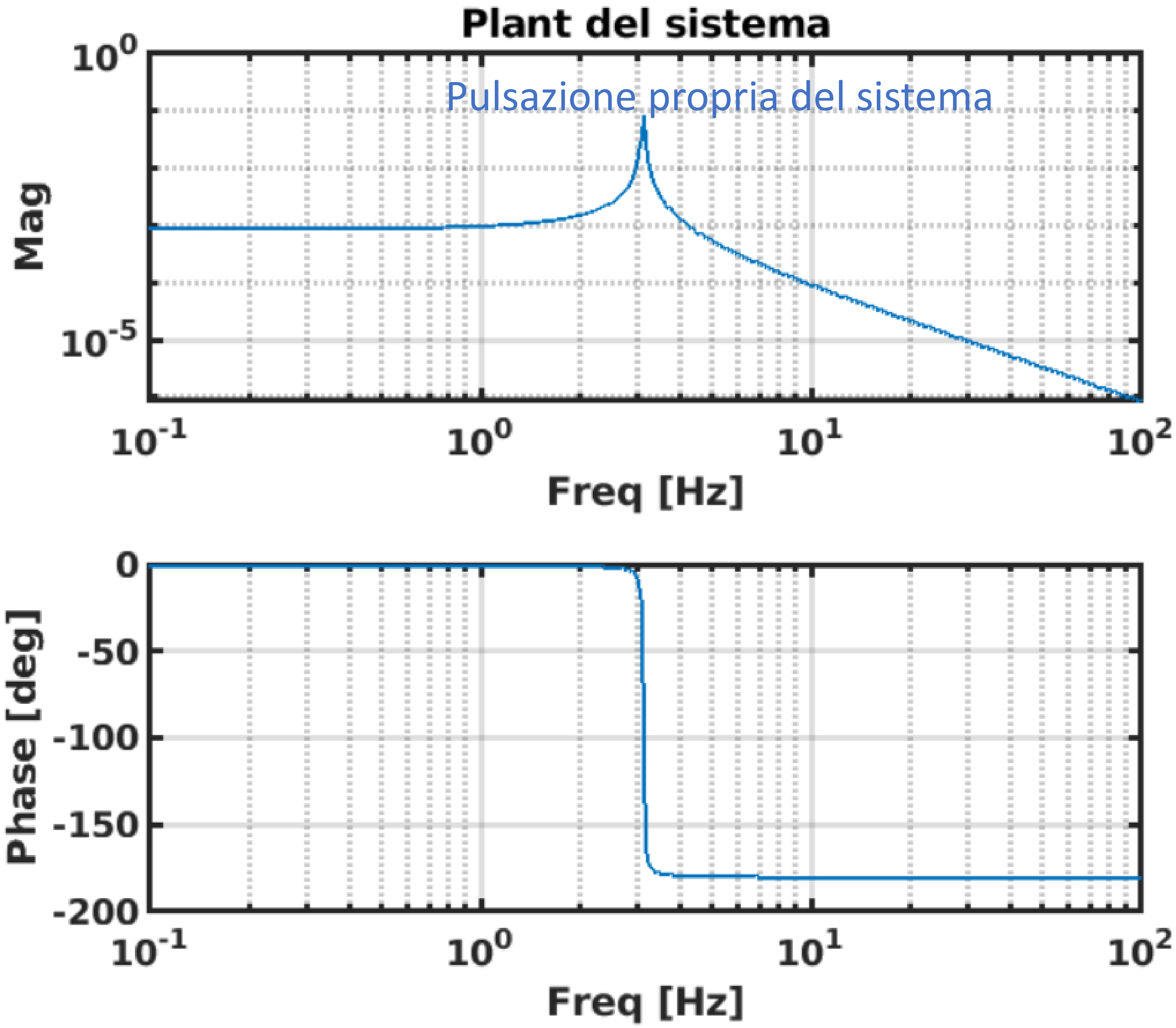
Plant nel dominio della frequenza: funzione di trasferimento

Tipicamente, per il disegno di controllori, è conveniente studiare la risposta del sistema nel dominio delle frequenze, anziché nel dominio del tempo.
La plant del sistema in frequenza è estraibile applicando la **trasformata di Laplace** dell'equazione dinamica differenziale, che ci permette di cambiare sistema di riferimento, passando dalle unità temporali t a quelle della frequenza s, dove $s = j\omega$.

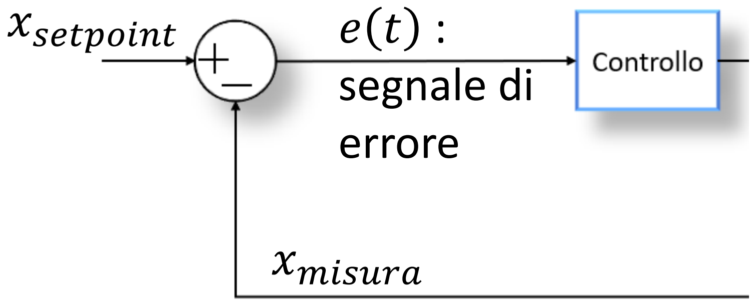
$$-m\omega^2 X e^{j\omega t} + cj\omega X e^{j\omega t} + kX e^{j\omega t} = F e^{j\omega t}$$

Esplicitando il termine $\frac{X}{F}$, si ottiene la relazione che lega la variabile misurata di interesse (in questo caso lo spostamento x), ad una perturbazione applicata al sistema (forzante F). Tale relazione, si definisce «**funzione di trasferimento $H(j\omega)$**». Essa definisce la relazione tra l'output di un sistema per un determinato input applicato.

$$\frac{X_0}{F} = \frac{1}{-m\omega^2 + cj\omega + k} \quad \rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \mathrm{j}2\nu\frac{\omega}{\omega_0}}$$



Controllo Proporzionale-Integrale-Derivativo



Come già introdotto precedentemente, l'obiettivo ultimo di una logica di controllo feedback, è quello di stabilizzare il sistema dinamico in esame, minimizzando una grandezza fondamentale in teoria dei controllo: il **segnale di errore**.
Il segnale di errore è definito dalla differenza tra la variabile misurata dall'hardware costituente i sensori, e un valore di setpoint (target), al quale vogliamo che il sistema si porti nel cosìddetto stato stazionario.
In base al controllo implementato e alle esigenze di processo, il setpoint potrà essere raggiunto intervenendo su diverse variabili di interesse, quali il transitorio (tempo di stabilizzazione), le oscillazioni impulsive (overshoot) e le oscillazioni residue (accuratezza).

Le azioni di controllo si dividono in 3 categorie principali:

- **Proporzionale**: include l'applicazione di una costante al segnale di errore: tanto più il segnale di errore è lontano dallo «zero», tanto più forte sarà l'azione di controllo:

$$K_P(t) = g_P \cdot e(t)$$

tale azione da sola non è sufficiente per il raggiungimento del setpoint; di conseguenza è necessario sommare un secondo contributo.

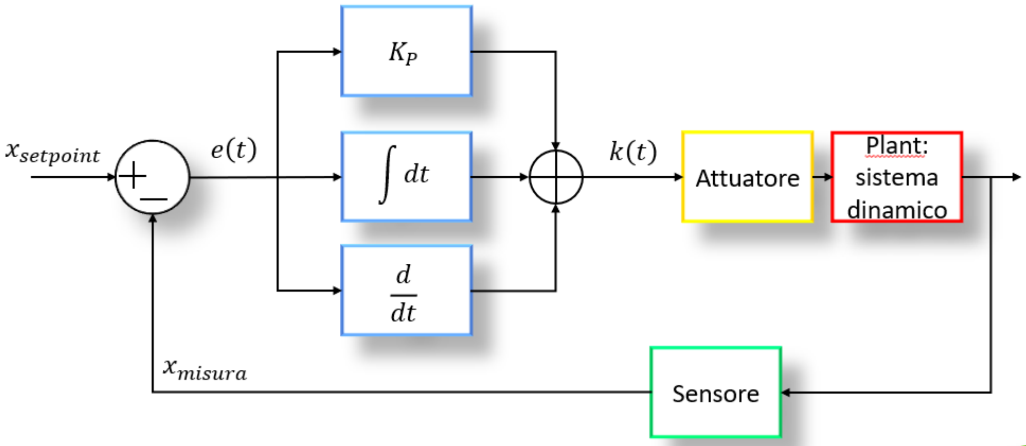
- **Integrale**: questo contributo effettua istante per istante l'integrale del segnale di errore, e permette di tenere memoria della «storia» evolutiva del segnale di errore. La sua applicazione aiuta a raggiungere il valore di setpoint in tempi più o meno brevi, in base al guadagno applicato:

$$K_I(t) = g_I \cdot \int_0^t e(t)\, dt$$

- **Derivativo**: per aumentare la risposta del sistema, quindi la velocità con cui il sistema raggiunge lo stato stazionario, si applica un terzo contributo, l'azione derivativa. Essa consiste nel valutare istante per istante la rapidità con cui il segnale di errore evolve nel tempo, ovvero si calcola la sua derivata prima nel tempo:

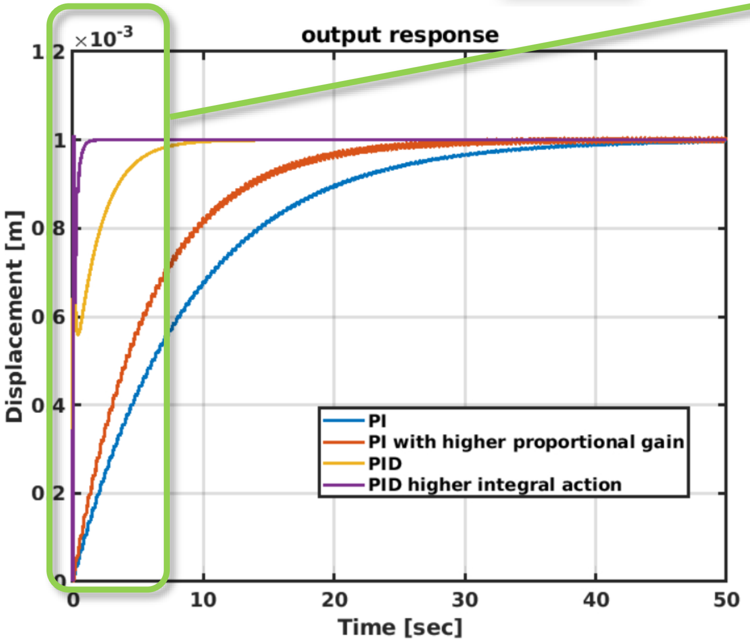
$$K_D(t) = g_D \cdot \frac{d}{dt} e(t)$$

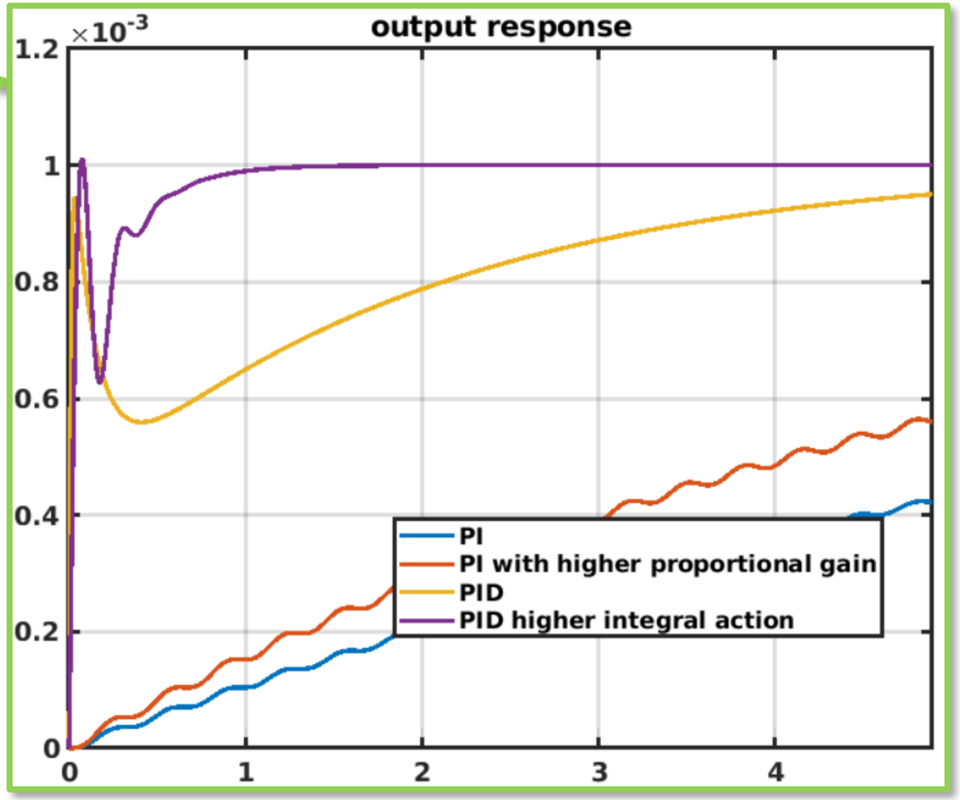
Controllo Proporzionale-Integrale-Derivativo



L'azione di controllo finale sarà data dalla somma dei singoli contributi:

$$k(t) = g_P \cdot e(t) + g_I \cdot \int_0^t e(t)\,dt + g_D \cdot \frac{d}{dt} e(t)$$





Trasformata di Laplace

Nell'analisi di sistemi dinamici, è spesso conveniente svolgere lo studio del processo nel dominio delle frequenze. Lo strumento matematico che permette di effettuare tale cambio di coordinate è la trasformata di Laplace.
Essa è un operatore lineare che associa una funzione di variabili reali, una seconda funzione di variabili complesse.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Il vantaggio di tale rappresentazione risiede nella più immediata facilità di risoluzione in quanto da equazione differenziale si passa ad un polinomio lineare:

$$\ddot{x}_M + \frac{c}{m}(\dot{x}_M) + \frac{k}{m}(x_M) = 0$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\frac{1}{2\xi}\omega \cdot s + \omega^2}}$$

Un generico polinomio di Laplace (funzione di trasferimento) può essere descritto nella seguente forma:

$$L(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{Z_L(s)}{P_L(s)}$$

In cui n identifica l'ordine della funzione di trasferimento, m determina la cosiddetta condizione di stabilità (o di realizzabilità), per cui il sistema risulta esistere: $n > m$

In tale polinomio, si identificano due categorie di elementi di estrema importanza, ovvero le radici del polinomio al numeratore $Z_L(s)$, e le radici del polinomio al denominatore $P_L(s)$.
Questi elementi vengono chiamati rispettivamente **zeri** e **poli** della funzione di trasferimento.
Tipicamente in un sistema dinamico, i poli corrispondono alle risonanze del sistema (autovalori, corrispondenti a frequenze ad alto contenuto energetico), mentre gli zeri identificano le anti-risonanze (frequenza a basso contenuto energetico) .

Controllore PID in coordinate di Laplace

$$k(t) = g_P \cdot e(t) + g_I \cdot \int_0^t e(t)\,dt + g_D \cdot \frac{d}{dt} e(t) = g \cdot \left(e(t) + \int_0^t e(t)\,dt + \frac{d}{dt} e(t) \right)$$

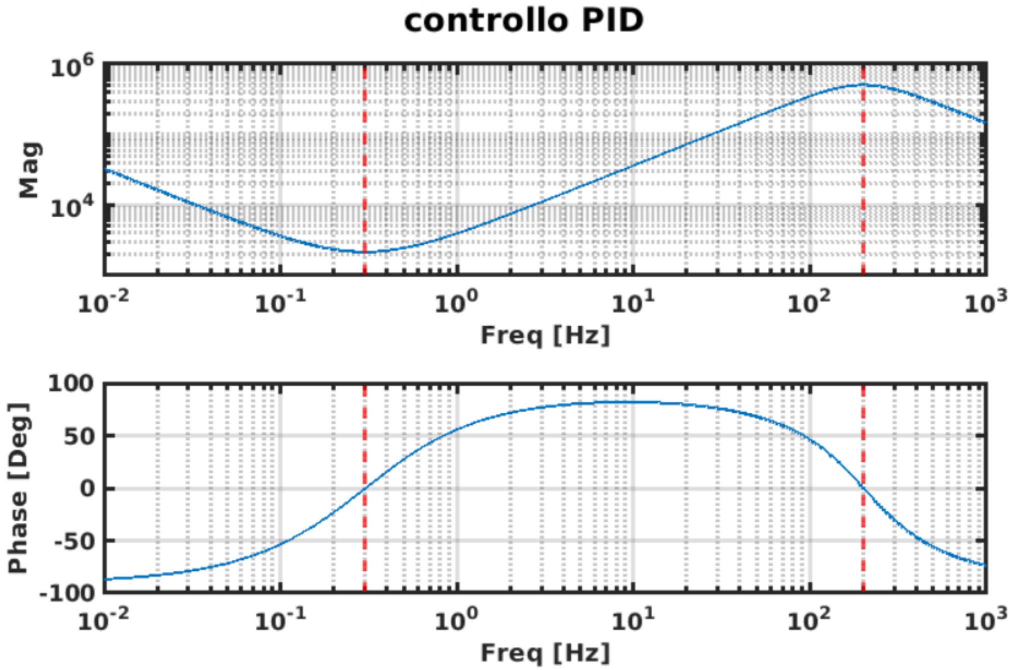
$$k(s) = \boxed{g} \cdot \boxed{\frac{1}{s}} \cdot \boxed{\frac{s^2 + 2 \cdot \frac{1}{2\xi_D} \cdot \omega_D \cdot s + \omega_D^2}{\omega_D^2}} \cdot \boxed{\frac{\omega_{LP}^2}{s^2 + 2 \cdot \frac{1}{2\xi_{LP}} \cdot \omega_{LP} \cdot s + \omega_{LP}^2}}$$

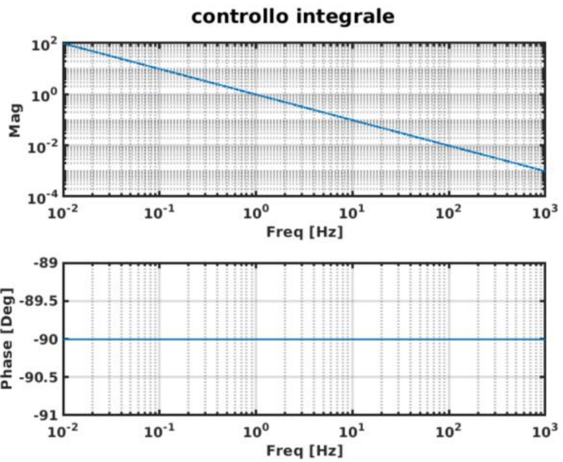
Guadagno globale che include l'azione proporzionale

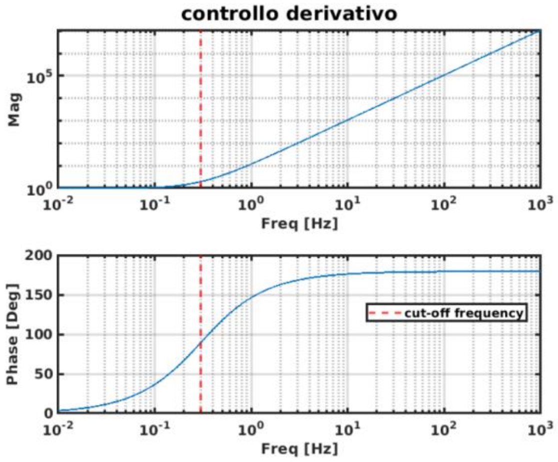
Azione integrale

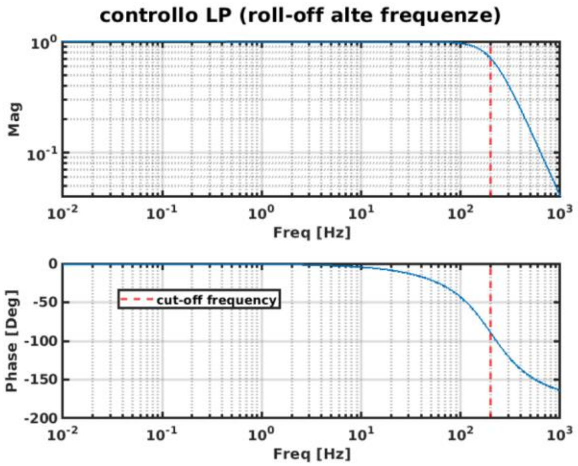
Azione derivativa

Polinomio compensativo (Low-Pass) stabilizzare il numero di poli al denominatore del polinomio globale.



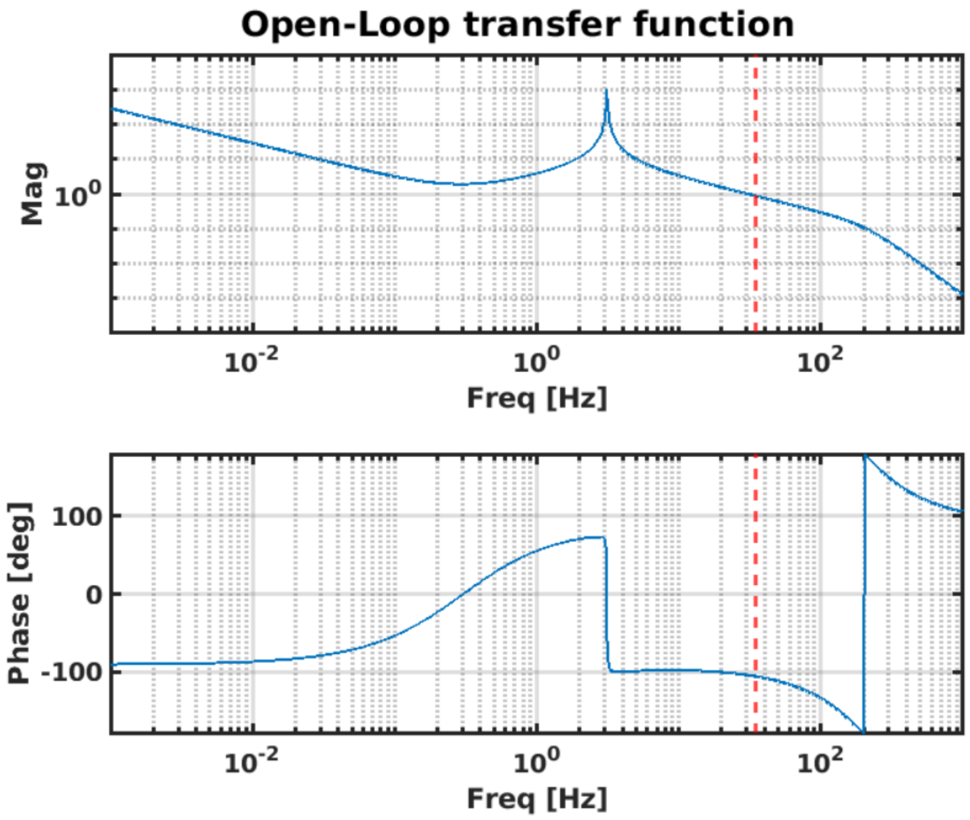


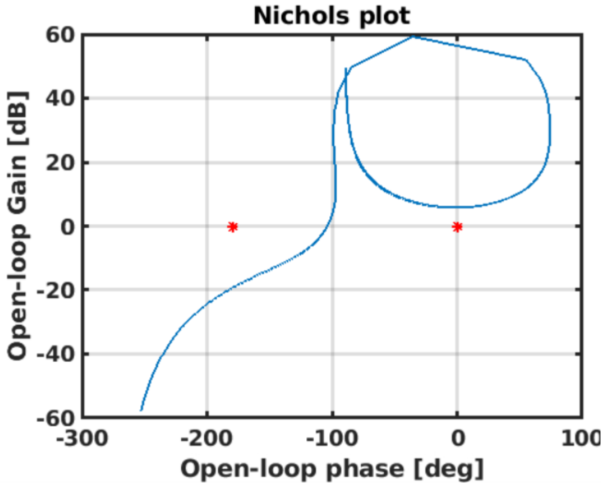


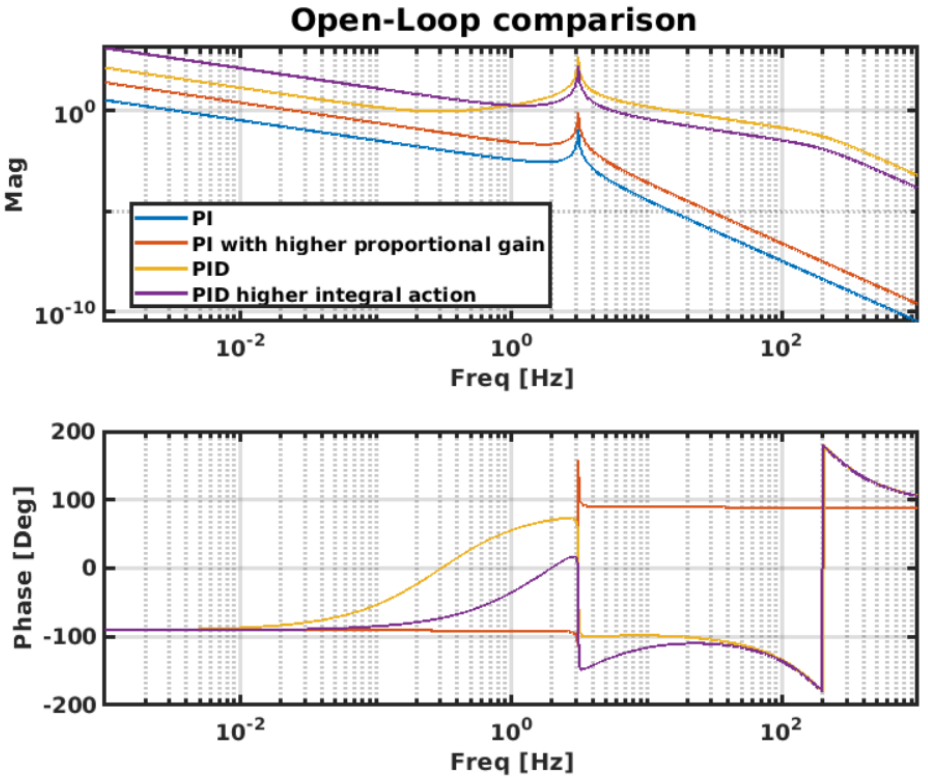


Funzione di trasferimento Open-Loop

$$OLTF(s) = gain \cdot K(s) \cdot G(s)$$

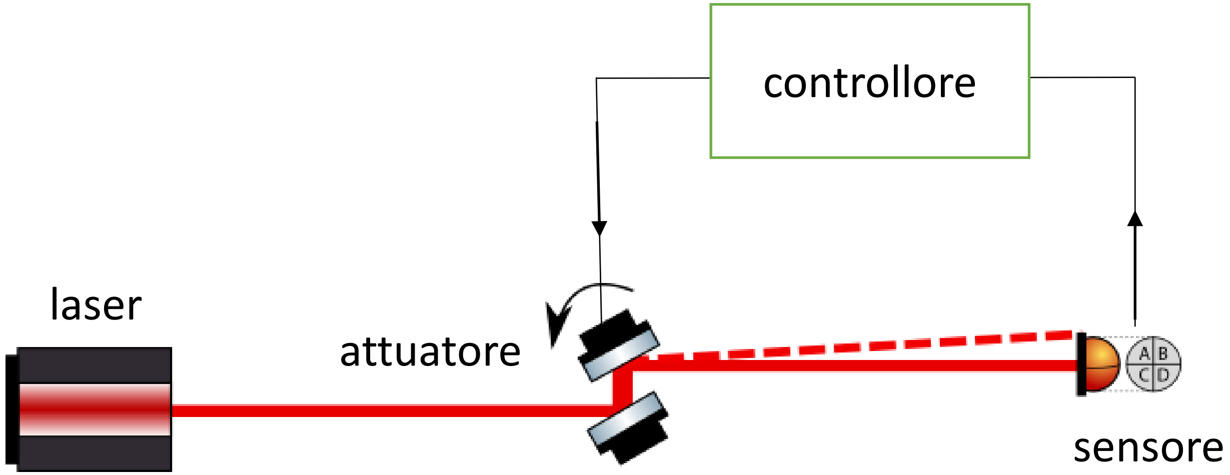


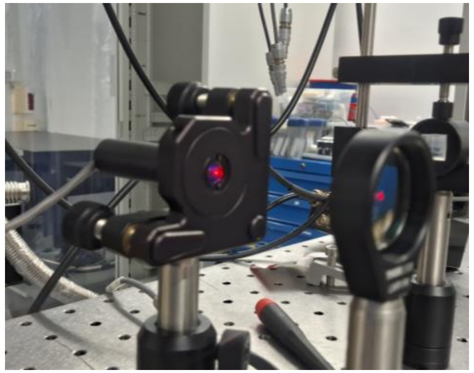


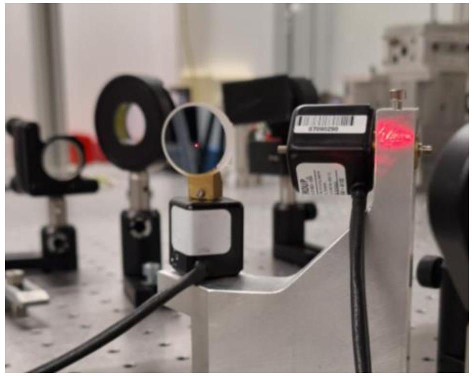


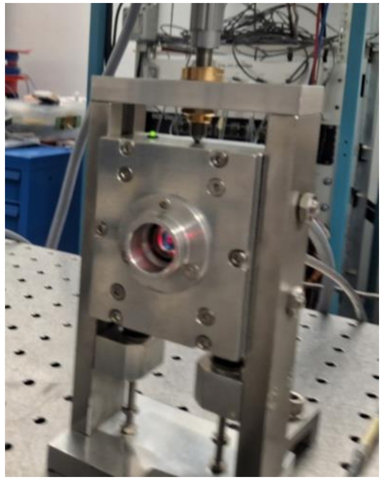
Set-up sperimentale

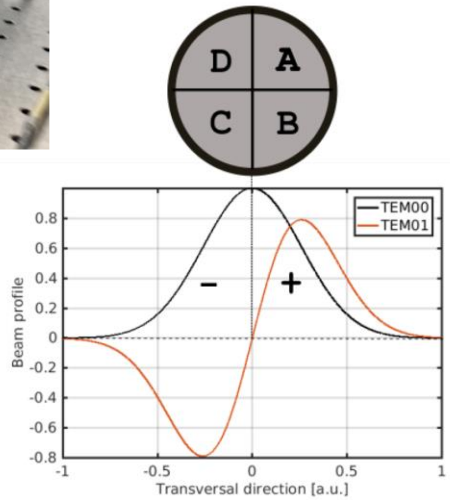
Il target del laboratorio è implementare un loop di controllo per centrare automaticamente il fascio laser sul fotodiodo a quadrante





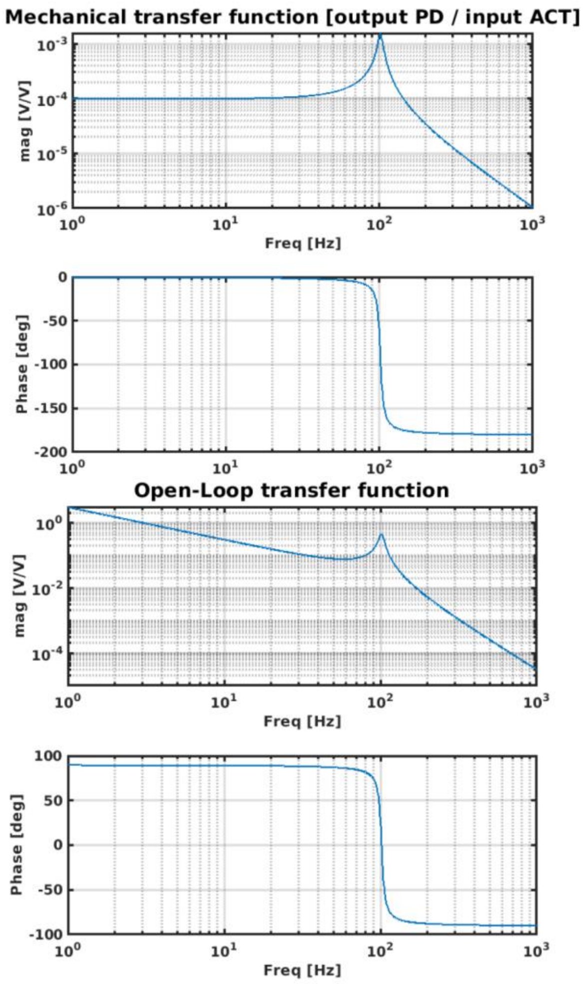


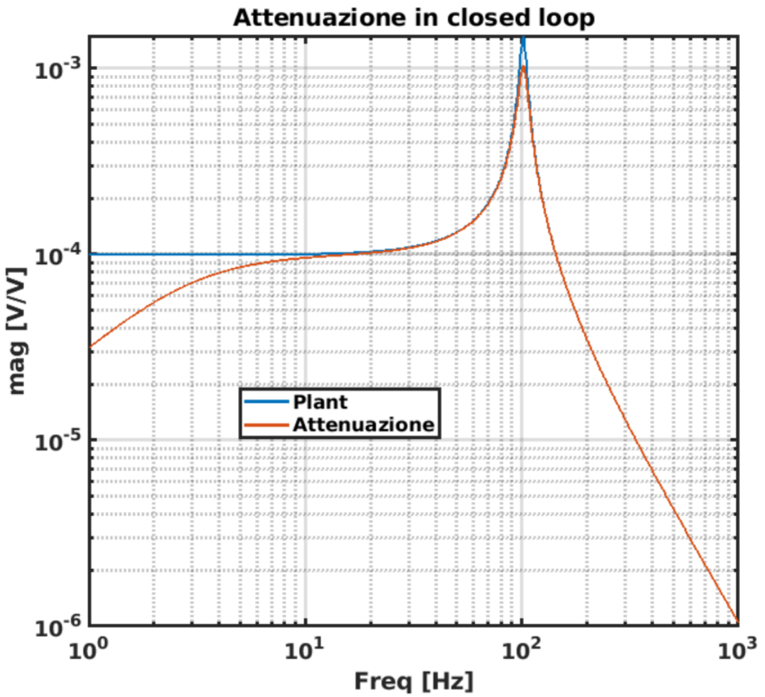


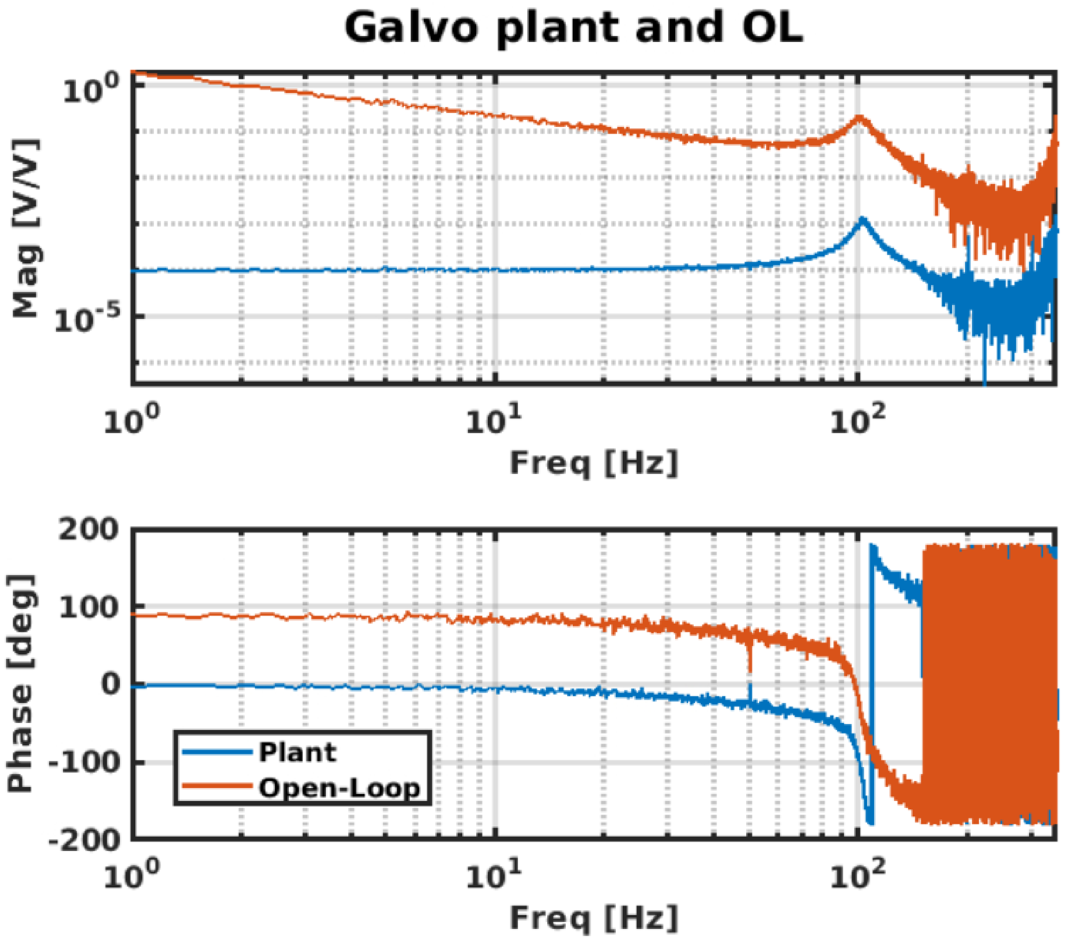


$$\mathrm{Asym}_p = (A_{DC} + D_{DC}) - (C_{DC} + B_{DC})$$

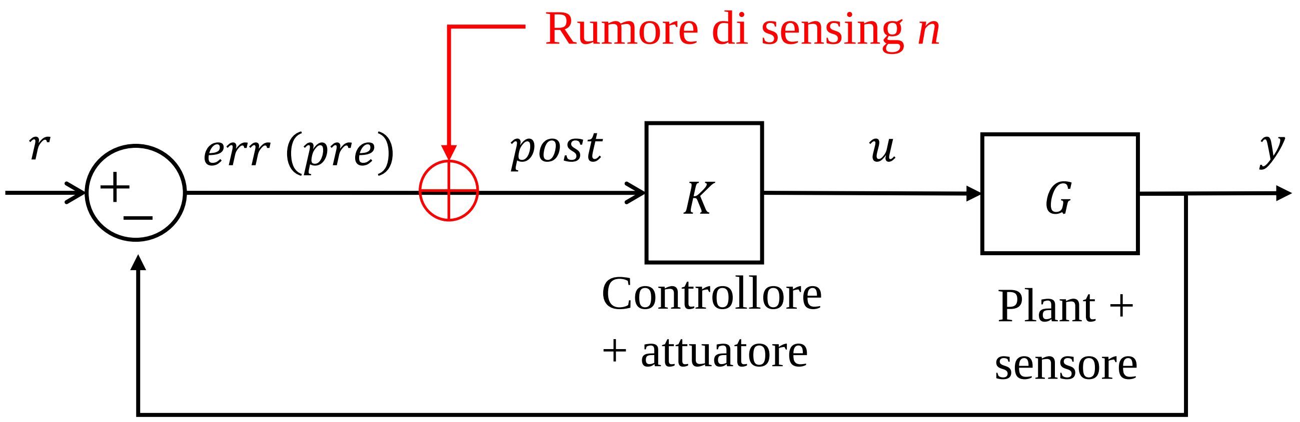
Esperienza in laboratorio: misurazione plant del Galvo e tuning del controllore







Misurazione della open loop



$OLTF = G \cdot K$

$$TF = \frac{Output}{Input}$$

$$y = Gu$$
$$u = K \cdot post$$
$$y = GK \cdot post$$

$$y = GK \cdot (pre + noise)$$
$$y = -pre$$
$$-pre = GK \cdot (pre + noise)$$

$$y = GK(r - y + n)$$
$$y = GKr - GKy + GKn$$
$$y(GK + 1) = GK(r + n)$$
$$y = \frac{GK}{GK + 1}r + \frac{GK}{GK + 1}n$$

$$G \cdot K = \frac{pre}{post} = (-)\frac{pre}{pre + noise}$$