Cálculo analítico e numérico das frequências do campo escalar no buraco negro BTZ

Neil L. Goyzueta P.; Márcio E.S. Alves

UNESP-Faculdade de Engenharia e Ciências-Guaratinguetá

Resumo

Neste trabalho consideramos uma solução das equações de Einstein em 2+1 dimensões conhecida como buraco negro BTZ (métrica BTZ). Considerando a equação de Klein Gordon nesse espaço-tempo, usamos um ansatz, com o qual podemos chegar a uma equação diferencial que tem uma forma semelhante à equação de Schrödinger na mecânica quântica. Dada a equação diferencial, podemos calcular as frequências associadas. Para isso, utilizamos a equação diferencial de uma função hipergeométrica. Esta, nos dará as soluções analíticas. Por outro lado, também podemos calcular essas frequências utilizando séries de potências, a partir das quais encontramos uma relação de recorrência que depende da frequência. Sob certas condições podemos calcular as frequências através desse método com uma solução numérica obtida com o software MATHEMATICA.

Introdução

A métrica BTZ, nomeada em homenagem a Banados, Teitelboim e Zanelli, oferece uma solução notável dentro do âmbito da teoria da relatividade geral em $(2+1)$ dimensões. Esta métrica é um exemplo pedagógico para destar diferentes métodos de solução.

Métrica BTZ

Uma solução de buraco negro em $(2+1)$ dimensões requer uma constante cosmológica não nula, simetria circular S^1 e certas condições de contorno, resultando na métrica BTZ. Para $(2+1)$ dimensões, o elemento de linha é:

$$ds^2 = g_{00}(r)dt^2 + g_{11}(r)dr^2 + r^2 d\phi^2, \tag{1}$$

considerando a equação de Einstein com a constante cosmológica:

$$g_{00}(r) = -f(r); \quad g_{11}(r) = \frac{1}{f(r)}; \quad f(r) = \xi - \Lambda r^2, \tag{2}$$

para $\Lambda \to 0$ temos que $\xi = 1 - \frac{\kappa M}{2\pi}$. Se $\kappa = 2\pi$, $\xi = 1 - M$. Com $\Lambda = -\frac{1}{L^2}$, a métrica é:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\phi^2; \quad f(r) = -M + \frac{r^2}{L^2}. \tag{3}$$

O horizonte de eventos é $r_h = L\sqrt{M}$.

Coordenada tartaruga BTZ

A coordenada tartaruga podemos calcular com:

$$r^* = \int \frac{1}{f(r)}dr. \tag{4}$$

De modo que:

$$r^* = \frac{1}{f'(r_h)}\ln|r - r_h| + \frac{1}{f'(-r_h)}\ln|r + r_h|, \tag{5}$$

considerando $L = 1$ (e daqui em diante), podemos ver que

$$r = -\sqrt{M}\coth\left(\sqrt{M}r^*\right), \tag{6}$$

$r^* \in (-\infty, 0]$, onde $r^* = -\infty$ corresponde a $r = r_h$, e $r^* = 0$ corresponde a $r = \infty$.

Equação de KG no caso da métrica BTZ

Partindo da equação padrão

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0. \tag{7}$$

Consideramos o seguinte Ansatz:

$$\Phi = \frac{R(r)}{\sqrt{r}}e^{-i\omega t}e^{i\ell\phi}, \tag{8}$$

onde ℓ é o "número de onda angular". Com o Ansatz (8) e a coordenada tartaruga r^*, a equação (7) é:

$$\frac{d^2R(r^*)}{dr^{*2}} + (\omega^2 - V(r^*))R(r^*) = 0, \tag{9}$$

onde o potencial efetivo é:

$$V(r^*) = f(r)\left(\frac{f'(r)}{2r} + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - \frac{f(r)^2}{4r^2}, \tag{10}$$

o que é equivalente a

$$V(r^*) = \frac{1}{4}M\left(3\text{csch}^2\left(\sqrt{M}r^*\right) + \text{sech}^2\left(\sqrt{M}r^*\right)\right) + \ell^2\text{sech}^2\left(\sqrt{M}r^*\right). \tag{11}$$

Cálculo analítico para encontrar as frequências.

Com a transformação $x = \frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{M}r^*\right)}$, $x \in [0,1]$, a equação (9) pode ser escrita como:

$$4M(1-x)x^2R''(x) + 2M(2-3x)xR'(x) + \left(\omega^2 - \ell^2 x - \frac{M(x-4)x}{4(x-1)}\right)R(x) = 0. \tag{12}$$

Mudando para uma nova função de onda:

$$R(x) = \frac{(x-1)^{3/4}Y(x)}{x^{\frac{i\omega}{2\sqrt{M}}}}, \tag{13}$$

nós achamos

$$(1-x)xY'' + \left(1 - \frac{i\omega}{\sqrt{M}} + \left(-3 + \frac{i\omega}{\sqrt{M}}\right)x\right)Y' + \left(\frac{-\ell^2 - (2\sqrt{M} - i\omega)^2}{4M}\right)Y = 0, \tag{14}$$

que é uma equação hipergeométrica padrão:

$$-abY(z) + [c - (a+b+1)z]Y'(z) + (1-z)zY''(z) = 0. \tag{15}$$

Neste caso:

$$a = 1 + \frac{i\ell}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}; \quad b = 1 - \frac{i\ell}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}; \quad c = 1 - \frac{i\omega}{\sqrt{M}}. \tag{16}$$

Estamos interessados em soluções no intervalo $[0,1]$, satisfazendo as condições de contorno de ondas em $x = 0$, e zero em $x = 1$. Uma solução pode ser considerada como:

$$Y = F(a,b,c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c; x). \tag{17}$$

Impondo $Y = 0$ em $x = 1$, temos $F(c-a, c-b, c; 1) = 0$:

$$\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = 0, \tag{18}$$

Obtemos $a = -n$ ou $b = -n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$, de modo que as frequências quase normais são dadas por:

$$\omega = \pm\ell - 2i\sqrt{M}(n+1). \tag{19}$$

Cálculo numerico para encontrar as frequências.

Fazendo $R(r) = e^{-i\omega r^*}\theta(r)$ na equação (9) fica

$$f^2(r)\theta''(r) + f(r)\left(f'(r) - 2i\omega\right)\theta'(r) - V(r)\theta(r) = 0. \tag{20}$$

Escrevendo em uma nova variável $x = \frac{1}{r}$, $h = \frac{1}{r_h}$, temos

$$f(x)\left(x^4\theta''(x) + 2x^3\theta'(x)\right) + \theta'(x)\left(x^4 f'(x) + 2ix^2\omega\right) - \theta(x)\frac{V(x)}{f(x)} = 0. \tag{21}$$

Reescrevendo de forma mais compacta

$$s(x)\theta''(x) + t(x)\theta'(x) + u(x)\theta(x) = 0, \tag{22}$$

onde $s(x) = x^2 - \frac{x^4}{h^2}$, $t(x) = \frac{2x^3}{h^2} - 2i\omega x^2$ e $u(x) = \frac{V(x)}{-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2}}$. Agora, $x \in [0, h]$ e vê-se que neste intervalo, a equação diferencial tem apenas singularidades regulares em $x = 0$ e $x = h$. Assim podemos procurar uma solução serie de potência, usando o método de Frobenius,

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\theta_n(\omega)(x-h)^n. \tag{23}$$

Fazendo as expansões de $s(x)$, $t(x)$ e $u(x)$ como

$$s(x) = \sum_{n=0}^{4}s_n(x-h)^n, \quad t(x) = \sum_{n=0}^{4}t_n(x-h)^n, \quad u(x) = \sum_{n=0}^{4}u_n(x-h)^n. \tag{24}$$

Substituindo (23) e (24) en (22), encontramos

$$\theta_n(\omega) = \frac{-1}{(n-1)ns_1 + nt_0}\sum_{k=n-3}^{n-1}\left(k(k-1)s_{n-k+1} + kt_{n-k} + u_{n-k-1}\right)\theta_k(\omega). \tag{25}$$

Impondo a segunda condição de contorno, $\theta = 0$ no infinito ($x = 0$), partindo de (23) obtemos

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\theta_n(\omega)(-h)^n = 0. \tag{26}$$

O problema se reduz a encontrar uma solução numérica da equação polinomial (26).

$\ell = 0$	
ω_r	ω_i
0.00000	−1.00180
0.00000	−2.00000
0.00000	−2.01011
0.00000	−3.00000
...	...

$\ell = 1$	
ω_r	ω_i
−1.00192	−1.00036
+1.00192	−1.00036
−1.00642	−2.00265
+1.00642	−2.00265
...	...

Table 1:Resultado numérico para o campos escalar no espaço-tempo de BTZ com $M = 0.25$, $Nmax = 20$ iterações. Para o caso $\ell = 0$ aparentemente existem modos repetidos, mas a parte imaginária deve ser $-1, -2, -3, -4, \ldots$

Observações e conclusões

- A métrica BTZ é um bom modelo para iniciar o estudo em teorias de gravidade.
- A equação de Klein-Gordon adquiere uma forma semelhante à de Schrödinger.
- As soluções analíticas para as frequências quase normais são $\omega = \pm\ell - 2i\sqrt{M}(n+1)$. Resultados numéricos com o MATHEMATICA confirmam esses valores.
- Devemos destacar a importância das ferramentas computacionais.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Referências

[1] Bruno Silva Macario.
Dedução da solução de btz.
2019.

[2] José P. S. Lemos Vitor Cardoso.
Scalar, electromagnetic and weyl perturbations of btz black holes: Quasi normal modes.
Phys.Rev. D63 (2001) 124015, Maio 2001.

[3] Veronika E. Hubeny Gary T. Horowitz.
Quasinormal modes of ads black holes and the approach to thermal equilibrium.
Phys.Rev.D62:024027,2000, Setembro 1999.

email: lizander.goyzueta@unesp.br