

# Neutrini: una selezione di momenti storici e di temi correnti di ricerca

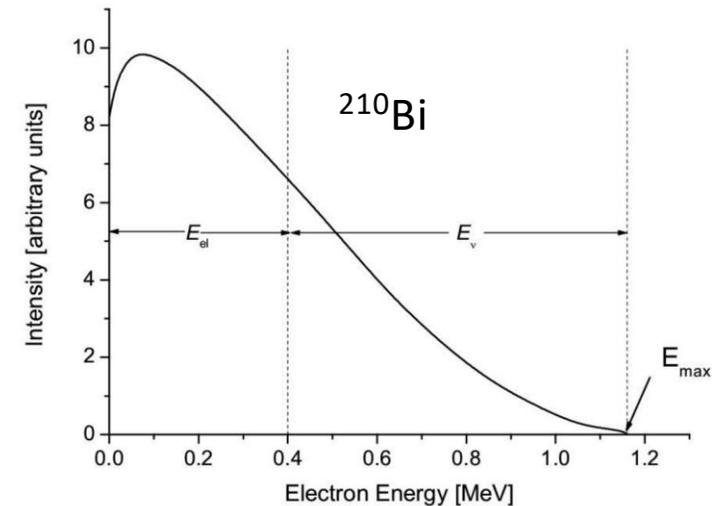
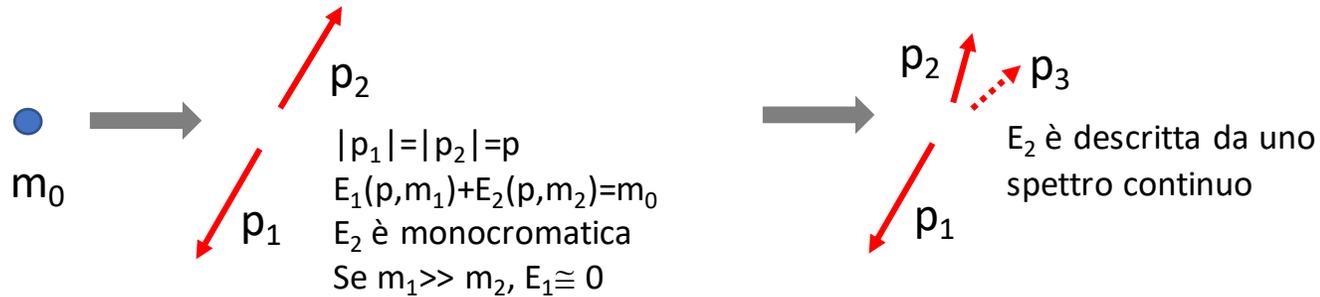
Sandro Palestini (CERN + Yale U. e INFN Torino)

Workshop Italian Summer Students at Fermilab

Pisa, 24-26 giugno 2023

# La scoperta dei neutrini - I

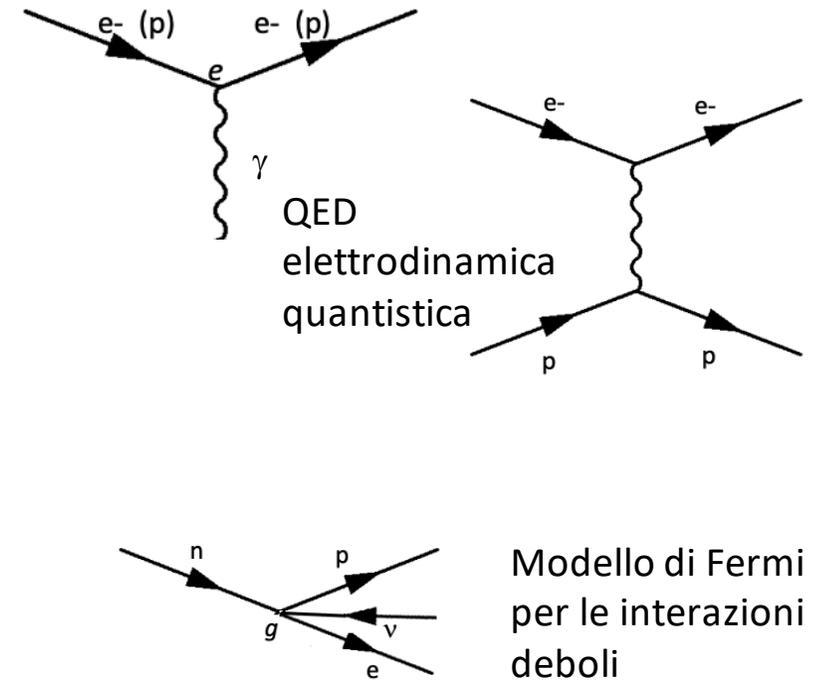
- Primi 30: Decadimento nucleare  $(A,Z) \rightarrow (A,Z+1)$  è noto da tempo
  - Instabilità dei nuclei, con vita media variabile ( $\sim$  minuti – in realtà ora ne conosciamo con valori molto lunghi)
  - Nucleo di protoni e elettroni? Elettroni confinati? Che occasionalmente ne uscivano?
  - Gli elettroni ne uscivano con uno spettro continuo di energia (1914–1930).



- Pauli 1931, informalmente: deve essere prodotta anche **una particella neutra che non interagisce**, o forse più di una : così l'energia totale è conservata .
- Chadwick 1932: scoperta del neutrone. Idea che un nucleo contenga neutroni e protoni. Pauli ora parla più esplicitamente di una particella neutra, di spin  $\frac{1}{2}$ .

# La scoperta dei neutrini - II

- Fine del 1932: Fermi scrive l'articolo in cui propone il **neutrino** e una **Teoria dei raggi  $\beta$** .
- Molti aspetti innovativi in questo lavoro:
  - Formalmente: introdotto un formalismo per descrivere la trasformazione da neutrone a protone e la creazione della coppia elettrone-neutrino, generalizzando un concetto che prima era stato suggerito per l'emissione di raggi gamma.
  - Introduce implicitamente il concetto di numero leptonico, che conta leptoni e neutrini, ed è conservato (solo elettroni allora, poi anche muoni e tau).
  - Introduce l'interazione debole generalizzando quella elettromagnetica. La costante di accoppiamento  $g$  risulta avere dimensioni di  $M^{-2}$ .
  - Discute perché in alcuni nuclei i decadimenti appaiono soppressi.
  - Discute come la forma dell'estremo dello spettro dia indicazioni della massa del neutrino.



[Illustrazioni con diagrammi di Feynman]

# Anni '30 e '40

- 1934: Bethe e Peierls: dal modello di Fermi e dal valore delle vite medie per decadimento  $\beta$ , stimano la sezione d'urto per interazione di neutrini nella materia:  $\sigma \cong 10^{-43} \text{ cm}^2$ : “*nessuno potrà mai vedere l'interazione di un neutrino*”.
- 1937: Majorana introduce il concetto che il neutrino sia l'antiparticella di se stesso
- 1938: In quegli stessi anni, Bethe pubblica il primo lavoro sul modello per le reazioni nucleari nelle stelle – i neutrini partecipano direttamente.
- 1937: scoperta del muone (chiamato allora *mesotrone*), simile ma più pesante dell'elettrone
- 1948: Anderson: il muone decade con spettro continuo: di nuovo tre corpi, dunque due neutrini?

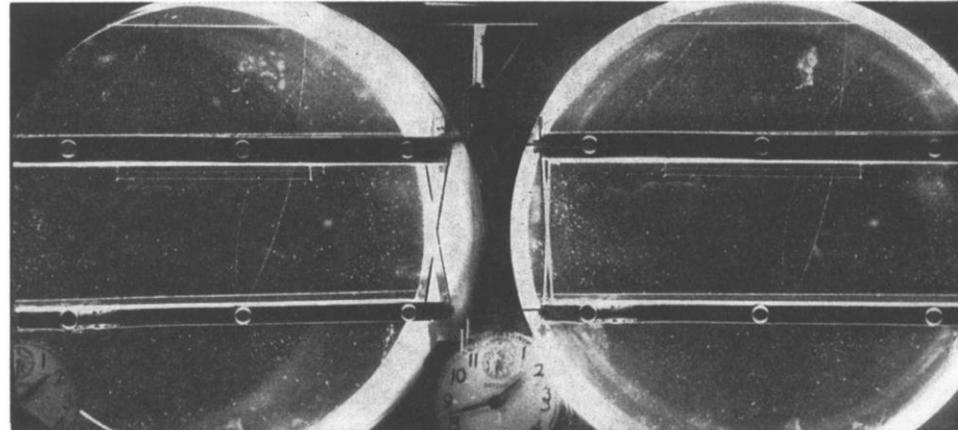
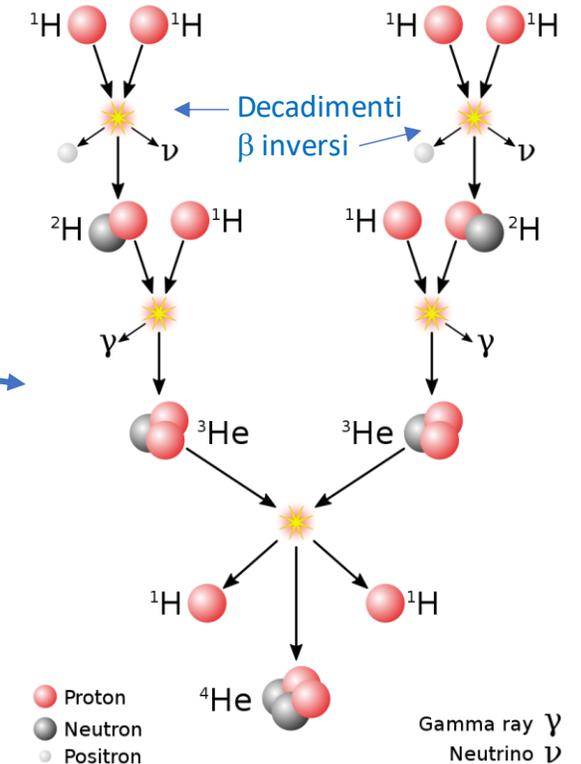


FIG. 2. A mesotron of positive charge passes downward through the counter in the cloud chamber, comes to rest in the carbon plate, and produces a decay electron whose energy, after correction for energy loss in the plate is  $37 \pm 1.5$  Mev. The momentum of the mesotron upon entering the carbon plate is 72 Mev/c. A magnetic field of 7250 gauss, directed toward the observer, is present. Two stereoscopic views are shown.



La reazione nucleare dominante in una stella come il Sole

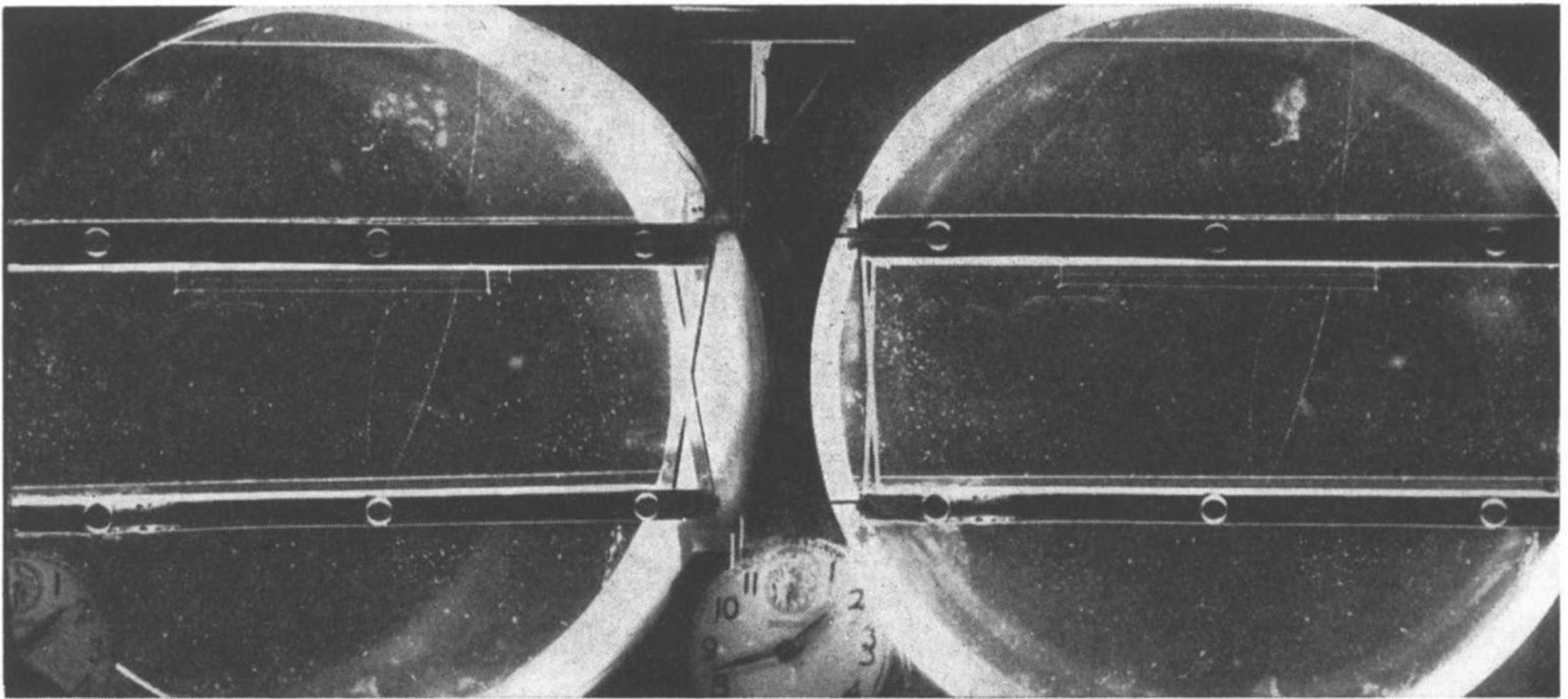
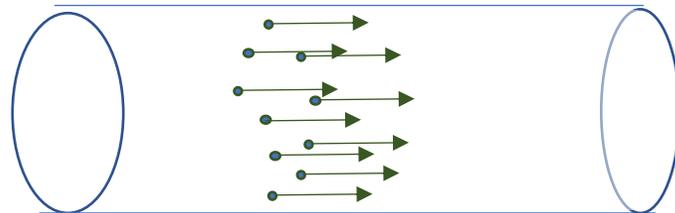


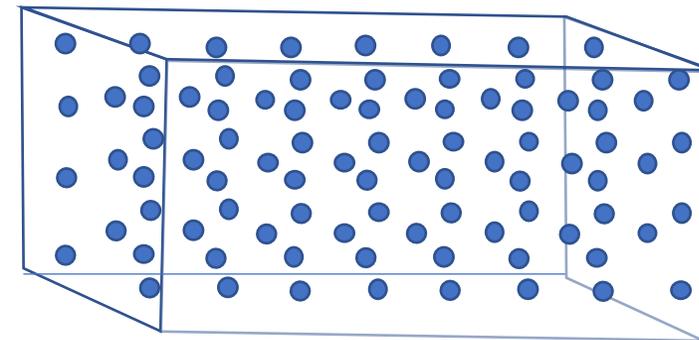
FIG. 2. A mesotron of positive charge passes downward through the counter in the cloud chamber, comes to rest in the carbon plate, and produces a decay electron whose energy, after correction for energy loss in the plate is  $37 \pm 1.5$  Mev. The momentum of the mesotron upon entering the carbon plate is 72 Mev/c. A magnetic field of 7250 gauss, directed toward the observer, is present. Two stereoscopic views are shown.

Il *mesotrone* arriva come un raggio cosmico. Il rivelatore è una camera a nebbia (cloud chamber), usata intensamente dagli anni '20 agli anni '50. Anderson la usò per scoprire positrone e muone. Rochester e Butler per i kaoni neutri. Raggi cosmici in tutti i casi.

# Fasci di particelle, bersagli e sezioni d'urto



Fascio di particelle: densità (numerica)  $n$  [ $\text{m}^{-3}$ ],  
velocità  $v$  [ $\text{m s}^{-1}$ ]: flusso  $n v$  [ $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ ], su superficie  $S$ .



Bersaglio: densità  $N$ , spessore  $L$ .



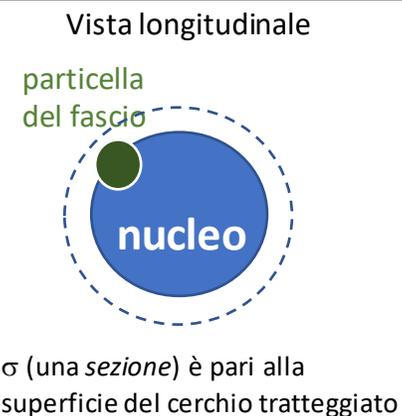
Diffusione (scattering), con sezione d'urto  $\sigma$  [ $\text{m}^2$ ]

**Frequenza di interazione:**  $f$  [ $\text{s}^{-1}$ ] =  $n v S N L \sigma$

o in altre parole:

“Numero di particelle del fascio che arrivano in un secondo” x “densità numerica dei centri di collisione” x “sezione d'urto”

Per interazioni di *adroni* (protoni, neutroni, pioni, kaoni ...) le interazioni *forti* agiscono su distanze legate ai raggi delle particelle e al raggio del nucleo, che corrispondono a alcuni fermi ( $1 \text{ fm} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ ), pertanto  $\sigma \sim$  alcuni  $10^{-29} \text{ m}^2$



La **lunghezza di interazione**  $\lambda = 1/(N \sigma)$  è la distanza percorsa nel bersaglio prima della collisione.

Ad esempio, per densità  $\rho = 5 \text{ g/cm}^3$  la densità di nucleoni è  $N \cong \rho N_{\text{Avogadro}} = 3 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-3}$ , e per  $\sigma \sim$  alcuni  $10^{-29} \text{ m}^2$ , troviamo  $\lambda \sim 10 \text{ cm}$ . (In realtà un po' di più, perché i nucleoni sono raccolti in nuclei, e le sezioni individuali si sovrappongono).

# Sezione d'urto di neutrini

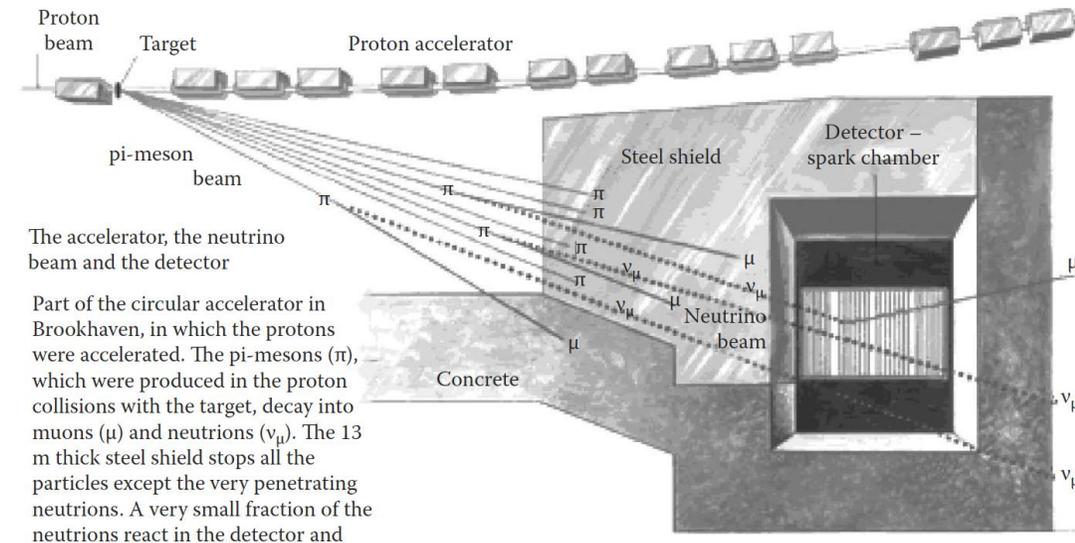
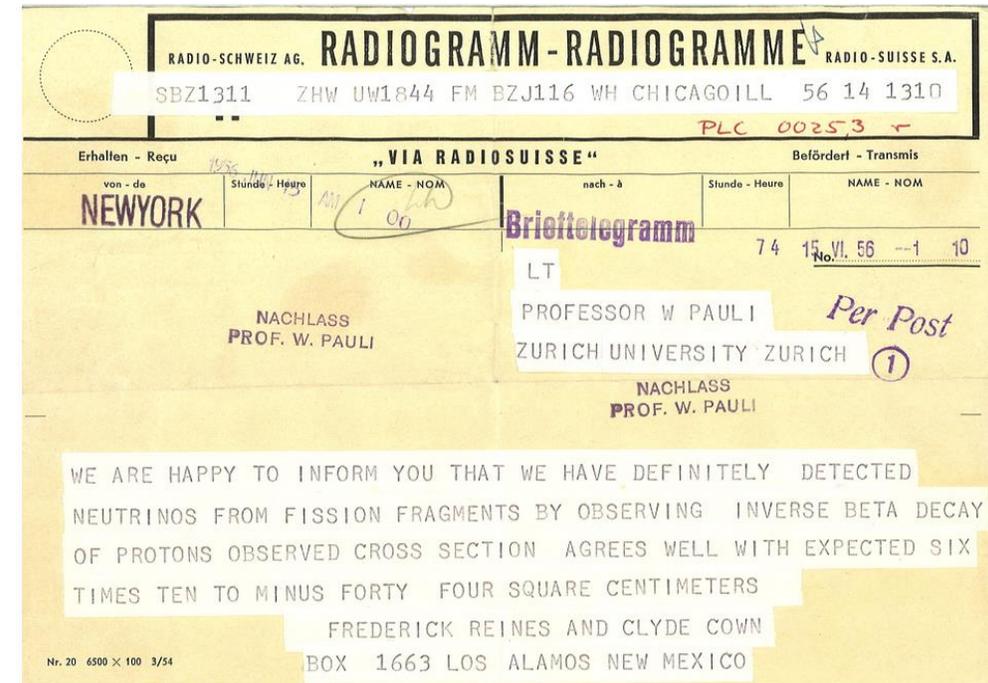
Se  $\sigma \cong 10^{-43} \text{ cm}^2$ , per  $N \cong 3 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-3}$  otteniamo  $\lambda \sim 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}$ ,  
 $\sim 10^9$  volte il diametro terrestre

Si potranno mai vedere? Occorre quanto meno

- Sorgente molto intensa
- Rivelatore con massa molto grande
- Neutrini con energia maggiore hanno sezione d'urto maggiore. Oggi sappiamo che per energia da  $\sim 1 \text{ GeV}$  a  $1000 \text{ GeV}$ ,  
 $\sigma_{\text{totale}} \cong 0.7 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \times E_\nu [\text{GeV}]$  per neutrini, e  
circa la metà per antineutrini  
(E' comunque molto piccola)

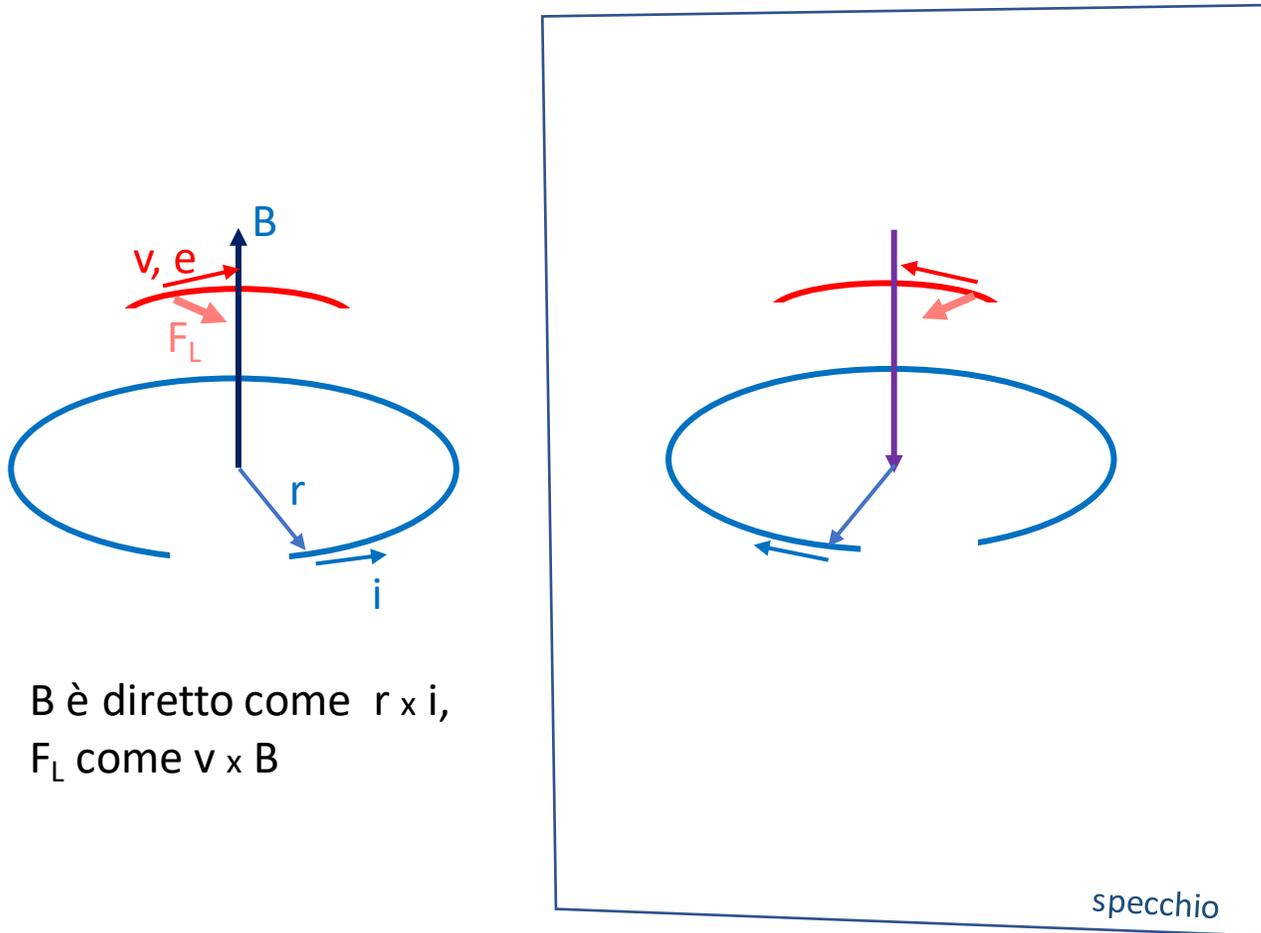
# Anni '50-'60: vere scoperte dei neutrini e la violazione della simmetria di Parità

- 1955: dopo alcuni anni di tentativi, Reines e Cowan **osservano le interazioni di neutrini** (per la precisione, antineutrini elettronici) prodotti dal reattore a fissione di Savannah River. I processo è il  $\beta$  inverso:  $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^- n$  in acqua, con il neutrone che intergisce con cadmio disciolto, con emissione di raggi  $\gamma$  di 9 MeV.
- 1956: Lee e Yang suggeriscono che la simmetria P sia violata nelle interazioni deboli (decadimento  $K^0$ ).
- 1957: C.S. Wu ottiene la prima evidenza di **violazione della simmetria di Parità**, nel decadimento  $\beta$  del cobalto-60. In particolare, l'antineutrino appare interamente polarizzato con elicità positiva, come confermato da Garwin, Lederman e Weinrich nel decadimento  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$  (fascio di 85 MeV).
- 1962: L'idea di **particelle diverse  $\nu_e, \nu_\mu$**  (e le rispettive antiparticelle) era considerata da qualche anno. Lederman, Schwartz, Steinberger et al. lo dimostrarono in un esperimento con un fascio di pioni, osservando che i neutrini da  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$  interagivano producendo muoni e non elettroni.



# Simmetria dei leggi di natura per *parità*, esempio dell'elettromagnetismo,

Deflessione di un particella carica in moto nel campo magnetico  
generato da una spira.



$B$  è diretto come  $r \times i$ ,  
 $F_L$  come  $v \times B$

Parità: simmetria per inversione delle coordinate:  
 $P : (x,y,z) \Rightarrow (-x,-y,-z)$ .

Poiché c'è comunque simmetria per rotazioni degli  
assi, consideriamo una rotazione di  $180^\circ$  intorno  
all'asse  $x$ :  $(-x,-y,-z) \Rightarrow (-x, y, z)$ , allora  $P$  è  
equivalente ad una riflessione  $(x, y, z) \Rightarrow (-x, y, z)$ .

La direzione di  $B$  è definita secondo una  
convenzione.

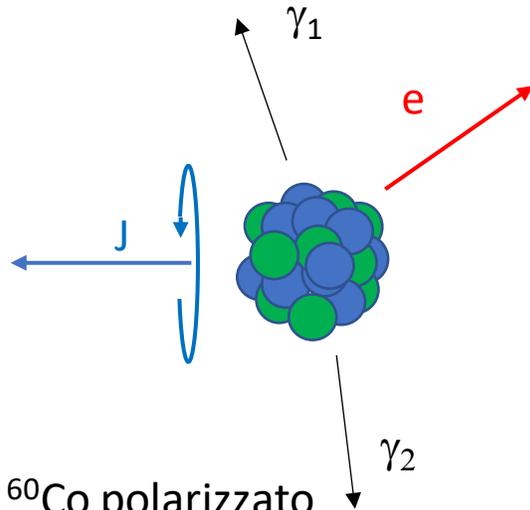
Una convenzione analoga definisce la direzione  
di  $F_L$ .

**Simmetria per riflessione:** per questa scelta di  
piano, la direzione di  $B$  è invertita, ma la forza  
di Lorentz, su un percorso invertito, è diretta  
verso l'asse della spira in entrambe le  
descrizioni.

**Il fenomeno, e le leggi che lo descrivono, sono  
le stesse viste direttamente e viste tramite  
uno specchio.**

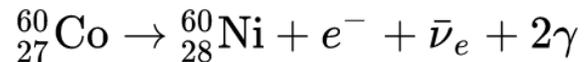
Vale nella fisica classica, e in fisica delle  
particelle, per le interazioni forte ed  
elettromagnetiche.

# Violazione della simmetria di Parità nel decadimento $\beta \chi$

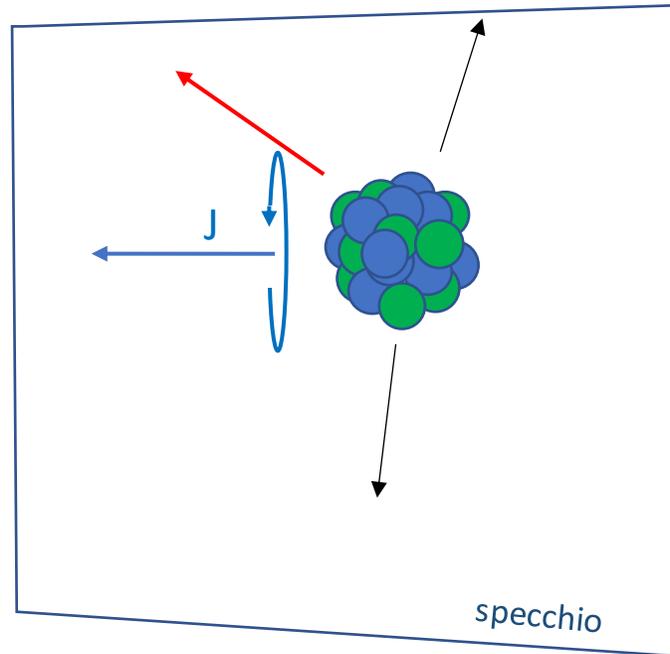


Nucleo di  $^{60}\text{Co}$  polarizzato (momento angolare allineato con un campo magnetico).

Il processo è



Gli elettroni da decadimento  $\beta$  sono diretti prevalentemente nell'emisfero opposto alla direzione di  $J$ . I fotoni prediligono le direzioni "equatoriali", senza distinguere gli emisferi,



L'esperimento di C.S. Wu, 1957, fu il primo a stabilire la violazione di simmetria  $P$  (suggerita da T D Lee e C N Yang, estendendo il modello di Fermi).

Visto nello specchio, la direzione dell'elettrone è invertita, mentre il momento angolare è invariato (possiamo immaginare che la "rotazione" del nucleo sia la stessa).

Due possibilità:

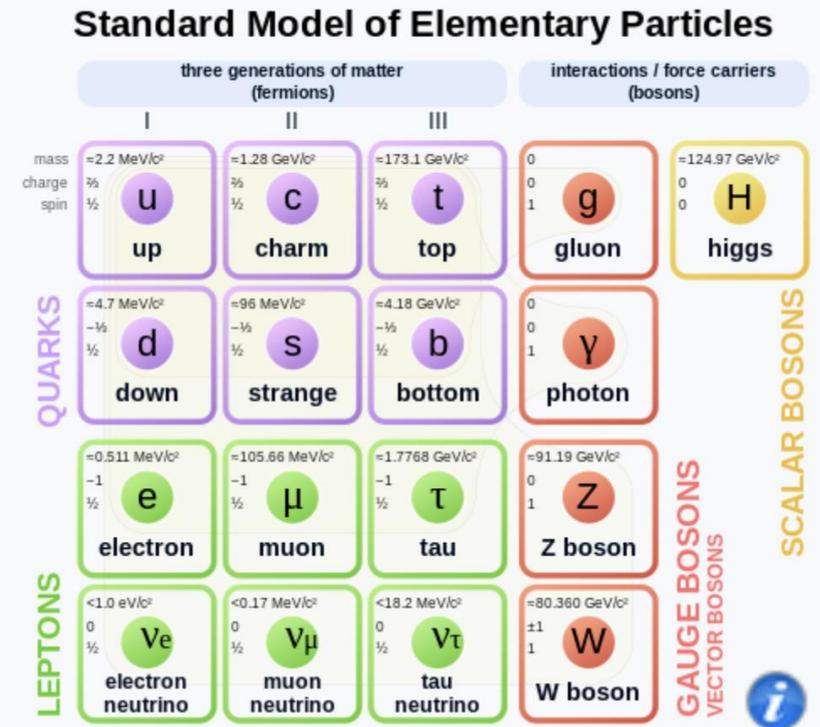
- La natura è invariante per riflessione, cioè per parità, e allora non è possibile che esista correlazione tra l'elettrone e  $J$ .
- La correlazione esiste, e quanto visto allo specchio non descrive la realtà: la simmetria  $P$  è violata nelle interazioni deboli.

**Questa, ed altre osservazioni, dimostrarono che la natura segue b) nelle interazioni deboli, ed in particolare per i neutrini.**

# Anni '60-'70: il Modello Standard

- Sintesi delle interazioni tra costituenti fondamentali. E' una teoria completa e auto-consistente. Grande potere predittivo, confermata in tanti modi per oltre 50 anni.
- Numerosi parametri, valori anche molto diversi per grandezze analoghe.
- Include le interazioni forti (QCD) e le elettrodeboli (unificate)
- I bosoni W e Z (osservati nel 1983) sono i *portatori* delle interazioni deboli:
  - W: interazioni con cambiamento di carica elettrica (*correnti deboli cariche*). la grande massa di W è legata alla dimensionalità e al piccolo valore della costante di Fermi.
  - Z : *correnti deboli neutre*, predette e osservate nel 1973.
- Le masse dei fermioni sono ricondotte ad un accoppiamento con un campo uniforme che pervade l'universo, ed è proporzionale all'accoppiamento con la particella di Higgs (osservata nel 2012).

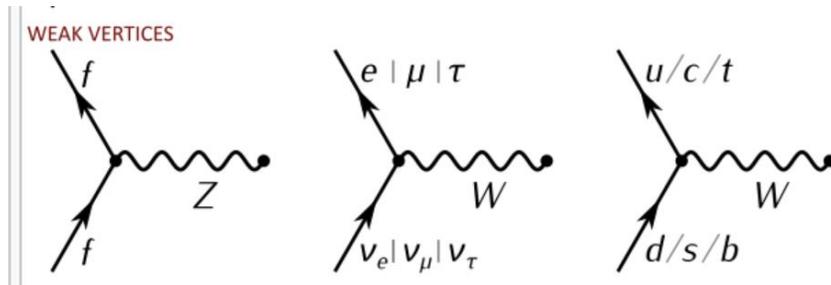
## Standard Model of particle physics



Elementary particles of the Standard Model

# Anni '60-'70: il Modello Standard - II

- La violazione della simmetria P ha luogo perché le interazioni deboli selezionano fermioni con elicità negativa, per  $m_f \ll E_f$  (elicità opposta per antifermioni)
- I neutrini sono presentati con massa nulla, i neutrini con elicità *sbagliata* sono fuori dalla teoria (in pratica, fuori dall'universo).
- 3 generazioni di neutrini:  $\nu_\tau$  predetto dopo la scoperta del leptone  $\tau$  (1975), e poi osservato recentemente (al solito, per prima la conferma come particella mancante in un decadimento, poi (2000) con l'interazione di neutrini in cui è prodotto un  $\tau$ ).



## Standard Model of particle physics

### Standard Model of Elementary Particles

	three generations of matter (fermions)			interactions / force carriers (bosons)	
	I	II	III		
mass	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
charge	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
<b>QUARKS</b>	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>g</b> gluon	<b>H</b> higgs
	$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b><math>\gamma</math></b> photon	
<b>LEPTONS</b>	$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$	
	-1	-1	-1	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	<b>e</b> electron	<b><math>\mu</math></b> muon	<b><math>\tau</math></b> tau	<b>Z</b> Z boson	
	$< 1.0 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 80.360 \text{ GeV}/c^2$	
	0	0	0	$\pm 1$	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	<b><math>\nu_e</math></b> electron neutrino	<b><math>\nu_\mu</math></b> muon neutrino	<b><math>\nu_\tau</math></b> tau neutrino	<b>W</b> W boson	
					<b>GAUGE BOSONS</b> VECTOR BOSONS
					<b>SCALAR BOSONS</b>

Elementary particles of the Standard Model

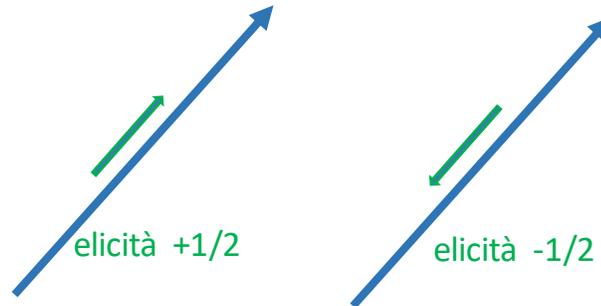
# Spin ed elicità

Asse sul quale il momento angolare è misurato

Elettrone (o protone etc.)  
(fermo o quasi fermo)



Elettrone in moto



Neutrini in moto



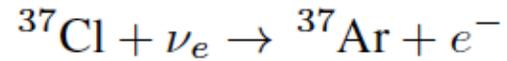
Neutrini fermi

?

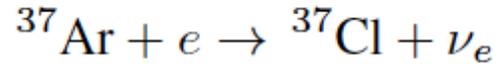
Esistono neutrini fermi ?  
Se la massa è nulla, non esistono, e l'elicità è la stessa in qualunque sistema di riferimento.

# Neutrini solari (Il deficit di neutrini solari)

**Homestake Experiment** (Raymond Davis a partire dal 1955, con dati tra il 1964 e il 1998.) Modello solare: John Bahcall e altri – complesso. Osservazione non facile, cercando la formazione di argon secondo



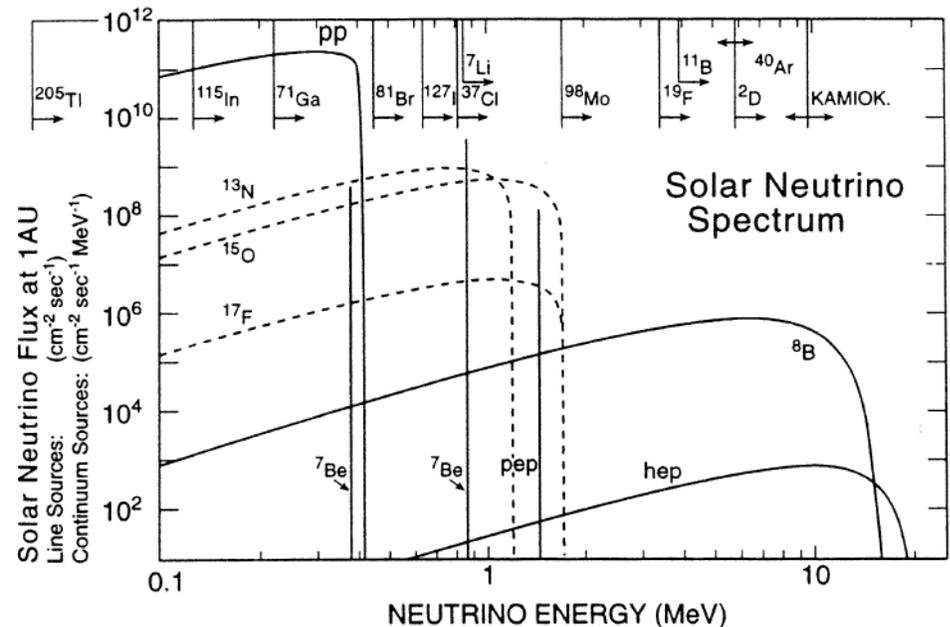
(soglia 0.814 MeV) poi rivelato in



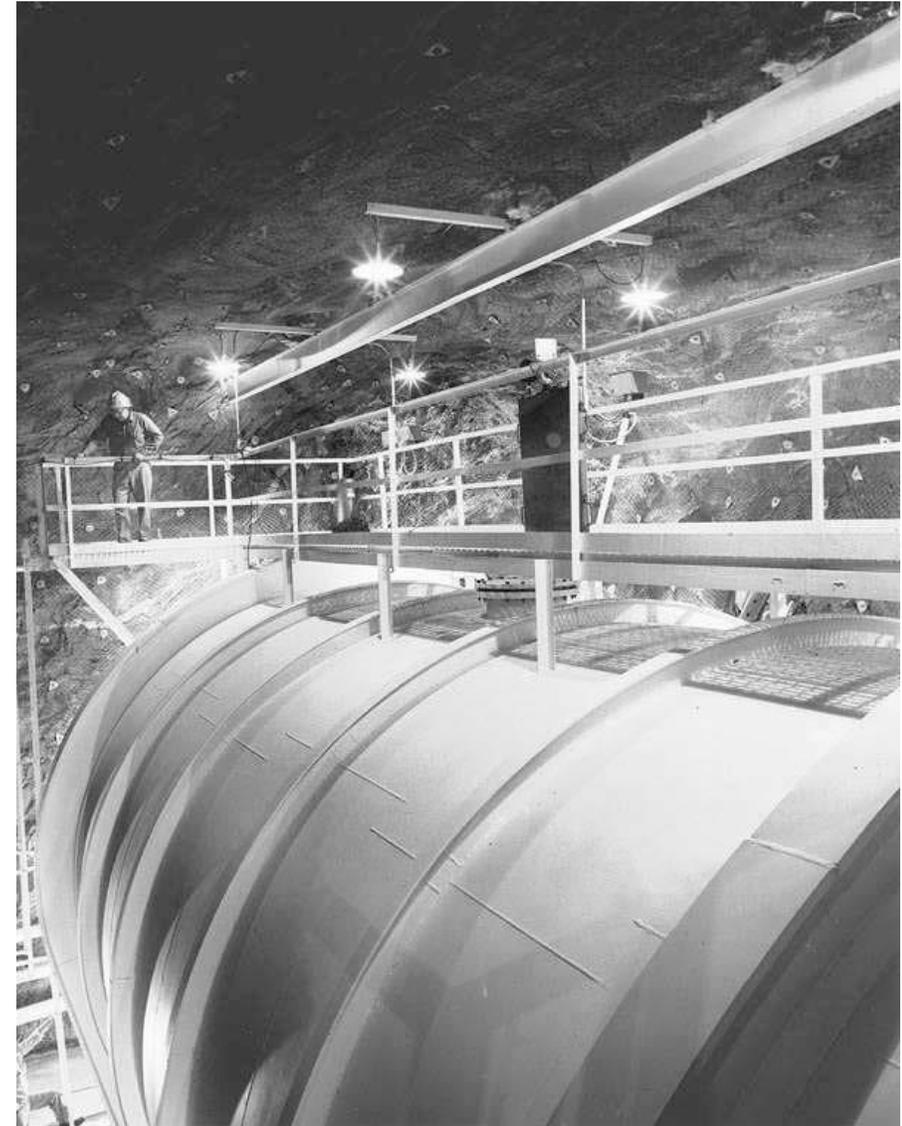
(cattura da orbitale, vita media 50 g)

Predizione secondo modello solare  $7.5 \pm 1.0$  unità di neutrini solari

osservazione  $2.6 \pm 0.2$  *uns* => lunghe discussioni sulla validità del modello teorico e dell'esperimento.



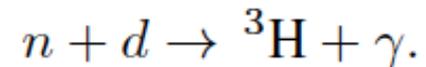
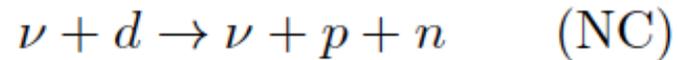
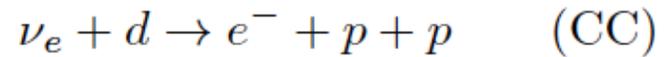
Rivelatore di 615 t di percloro etilene (liquido), argon (gas) raccolto e analizzato in rivelatore apposito. In miniera a -1400 m. ½ atomo di argon / giorno. Evidenza di deficit di neutrini solari confermata recentemente da SuperKamiokande, GALLEX, GNO, SAGE, SNO, Borexino.



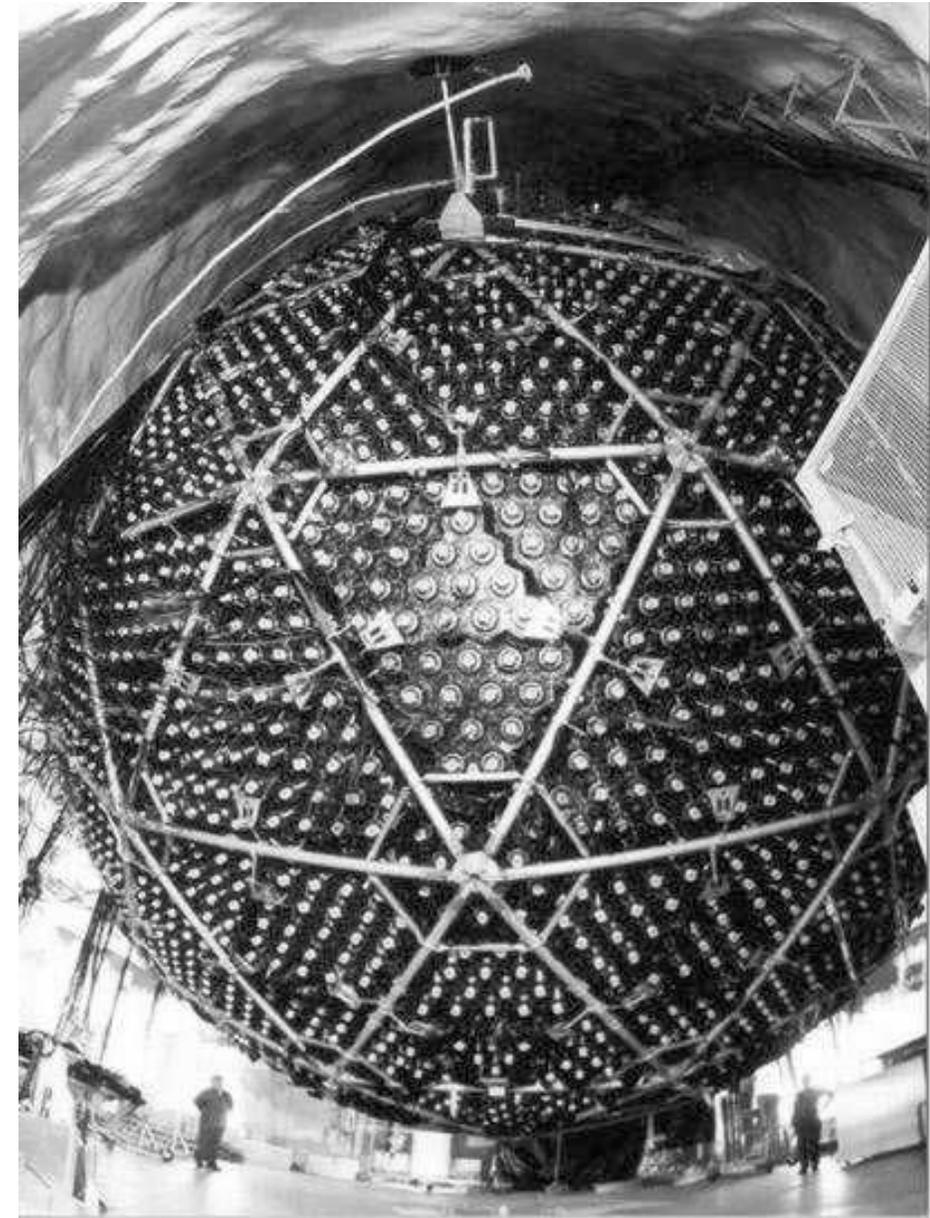
# Neutrini solari II

**SNO (Sudbury Neutrino Observatory)**(1999-2006, Art McDonald):

1000 t di acqua pesante ( $D_2O$ ) circondate da 7300 t di acqua, in miniera. Rivelatore di luce Cherenkov (da elettroni) e raggi gamma da reazione nucleare:



Con la prima reazione è misurato il deficit di  $\nu_e$  solari, mentre la seconda, inclusa la misura dei neutroni, non distingue tra le tre generazioni di neutrini e permette di verificare che **il deficit di  $\nu_e$  è confermato, ed è bilanciato da  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$**  (2001, 2002).

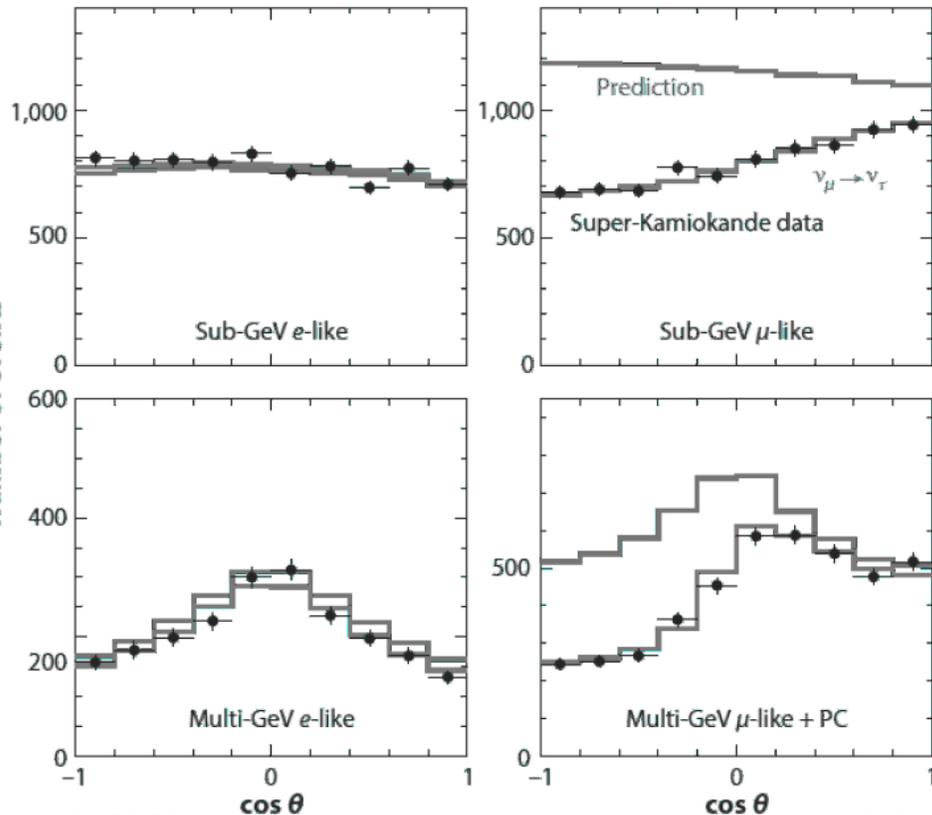
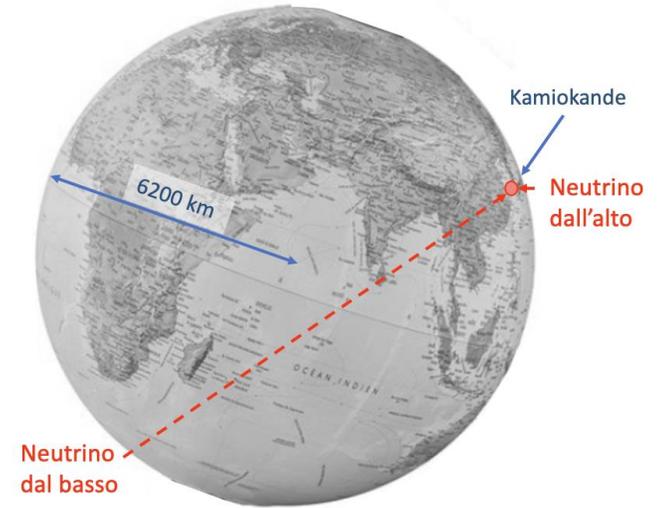


# Deficit di neutrini atmosferici

*Neutrino atmosferico*: legato ai raggi cosmici, con interazione primaria e decadimento di mesoni nell'atmosfera

Oltre all'oscillazione solare, nello stesso periodo o poco dopo fu raccolta evidenza per un'oscillazione con frequenza maggiore:

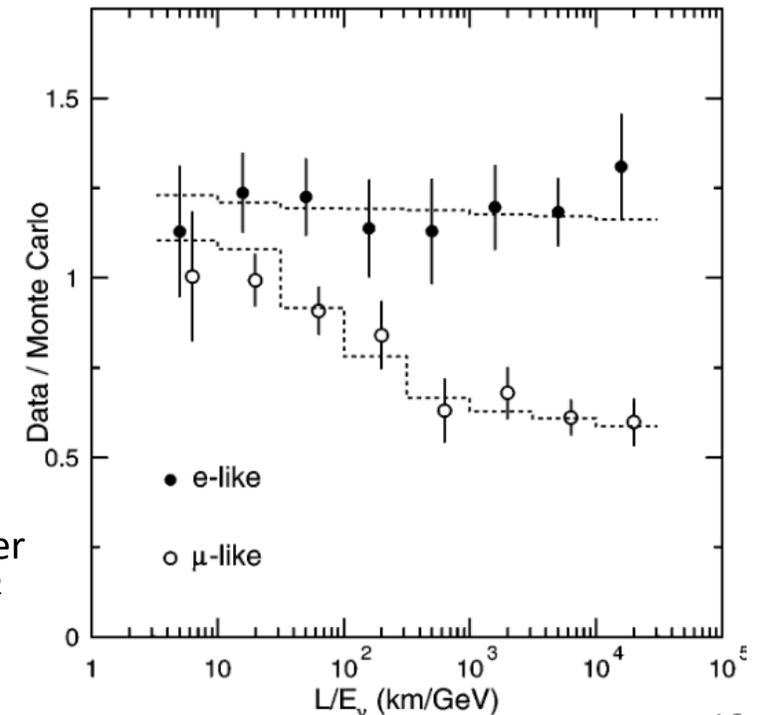
- Prima evidenza in neutrini di origine atmosferica, provenienti da interazioni di raggi cosmici, in **Super-Kamiokande**, rapporto dei flussi tra neutrini muonici e neutrini elettronici è ridotto per neutrini provenienti dal basso ( $L \sim 12000$  km) rispetto a quelli dall'alto ( $L \sim 5-10$  km), per energie tra 0.3 e 10 GeV. Interpretato come un'oscillazione, questo suggerisce un valore  $\Delta m^2 c^4 \sim 0.002$  eV<sup>2</sup> (*oscillazione atmosferica*), di grande ampiezza per  $\nu_\mu$  ( $\Rightarrow \theta_{23} \sim 45^\circ$ ).



$\cos\theta=1$  : dall'alto (zenit)  
 $\cos\theta=-1$  : dal basso

[Super-Kamiokande, 1998]

Linea tratteggiata per  $\nu_\mu$  mostrata per  $\Delta m^2 c^4 \sim 0.002$  eV<sup>2</sup>



# Fenomenologia delle oscillazioni di neutrini

Un cambiamento di intensità apparente, quando sappiamo che i neutrini interagiscono molto poco, può essere interpretato come una *oscillazione* da un tipo ad un altro tipo di neutrini.

- Ad esempio cercando  $\bar{\nu}_e$   $p \rightarrow e^+ n$  nelle vicinanze di un reattore, se  $\bar{\nu}_e$  cambiasse natura in  $\bar{\nu}_\mu$  o  $\bar{\nu}_\tau$ , l'interazione non potrebbe aver luogo
- Parliamo di oscillazione se il neutrino (o antineutrino) che interagisce dopo essersi propagato, non corrisponde al neutrino prodotto alla sorgente – o meglio, cambia natura secondo un **andamento periodico**.
- **Implicazioni:**
  - i neutrini hanno massa, con valori di massa diversi.
  - Le interazioni deboli agiscono su combinazioni di neutrini di massa diversa

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix}$$

Queste sono gli “stati” che interagiscono trasformandosi in leptoni

$$\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}$$

Queste sono gli stati che si propagano come particelle con massa  $m_1, m_2, m_3$ .

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & U_{\alpha i} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}$$

U è una matrice unitaria

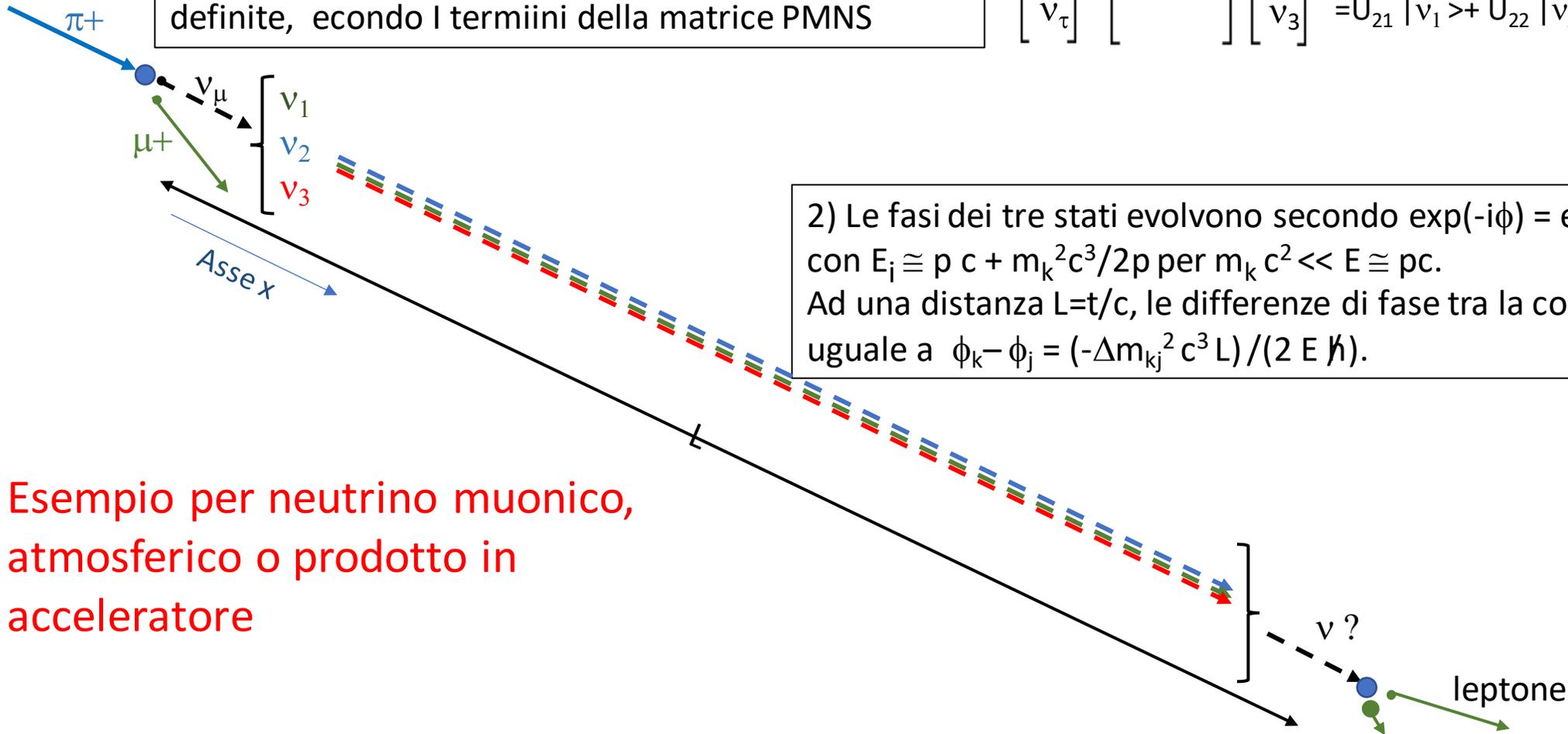
Ad esempio,

$|\nu_e\rangle = U_{11}|\nu_1\rangle + U_{12}|\nu_2\rangle + U_{13}|\nu_3\rangle$   
scomponi lo stato  $\nu_e$  nelle 3 componenti con massa definita.

Stesso formalismo, con  $U_{\alpha i}^*$ , per gli antineutrini.

1) Al decadimento del  $\pi^+$ , il neutrino muonico è descritto dalla sovrapposizione di neutrino di massa definite, econdo I termiini della matrice PMNS

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = U_{\alpha i} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \quad \text{In questo caso:} \\ |\nu\rangle = |\nu_\mu\rangle = U_{21} |\nu_1\rangle + U_{22} |\nu_2\rangle + U_{23} |\nu_3\rangle$$



2) Le fasi dei tre stati evolvono secondo  $\exp(-i\phi) = \exp(-iE_k t/\hbar + ip x/\hbar)$ , con  $E_i \cong p c + m_k^2 c^3/2p$  per  $m_k c^2 \ll E \cong pc$ . Ad una distanza  $L=t/c$ , le differenze di fase tra la componente  $k$  e  $j$  è uguale a  $\phi_k - \phi_j = (-\Delta m_{kj}^2 c^3 L)/(2 E \hbar)$ .

Esempio per neutrino muonico, atmosferico o prodotto in acceleratore

3) All'interazione, il neutrino è descritto da  $|\nu(L,E)\rangle = \sum_k U_{2k} \exp(-i\phi_k) |\nu_k\rangle$ . Poiché le fasi  $\phi_k$  sono diverse tra di loro, il neutrino, in generale, non è più  $\nu_\mu$ , ma è una sovrapposizione di  $\nu_e, \nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  con ampiezza (probabilità) che dipende da  $L/E$ . Il tipo di leptone identifica il neutrino che interagisce.

# Fenomenologia delle oscillazioni di neutrini

La matrice unitaria  $U_{\alpha i}$  è chiamata *matrice di Pontecorvo-Maki-Nagagawa-Sakata* (PMNS).

- Pontecorvo (1957) propose che potessero esistere oscillazioni  $\bar{\nu} \leftrightarrow \nu$ , che non sono state osservate. (Esistono invece per alcuni mesoni neutri.)
- Maki, Nagagawa e Sakata proposero un meccanismo  $\nu_{\alpha} \leftrightarrow \nu_{\beta}$  su due generazioni (e,  $\mu$ ), per particelle e antiparticelle
- La matrice 3 x 3 fu introdotta successivamente alla scoperta della 3a generazione, con affinità alla matrice Cabibbo--Kobayashi-Maskawa (1973) che descrive sovrapposizioni di quark nel modo in cui interagiscono per interazioni deboli.

Con 3 generazioni di neutrino, la matrice  $V$  contiene tre angoli di Eulero ed una fase di numero complesso, e le espressioni che descrivono le oscillazioni contengono 3 differenze di frequenza.

**Il caso con 2 neutrini illustra gli aspetti essenziali** (dettagli del calcolo tra il materiale aggiuntivo):

- Matrice di rotazione: (la stessa per antineutrini) 
$$\begin{bmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$
- Probabilità per conservazione del tipo di neutrino:  

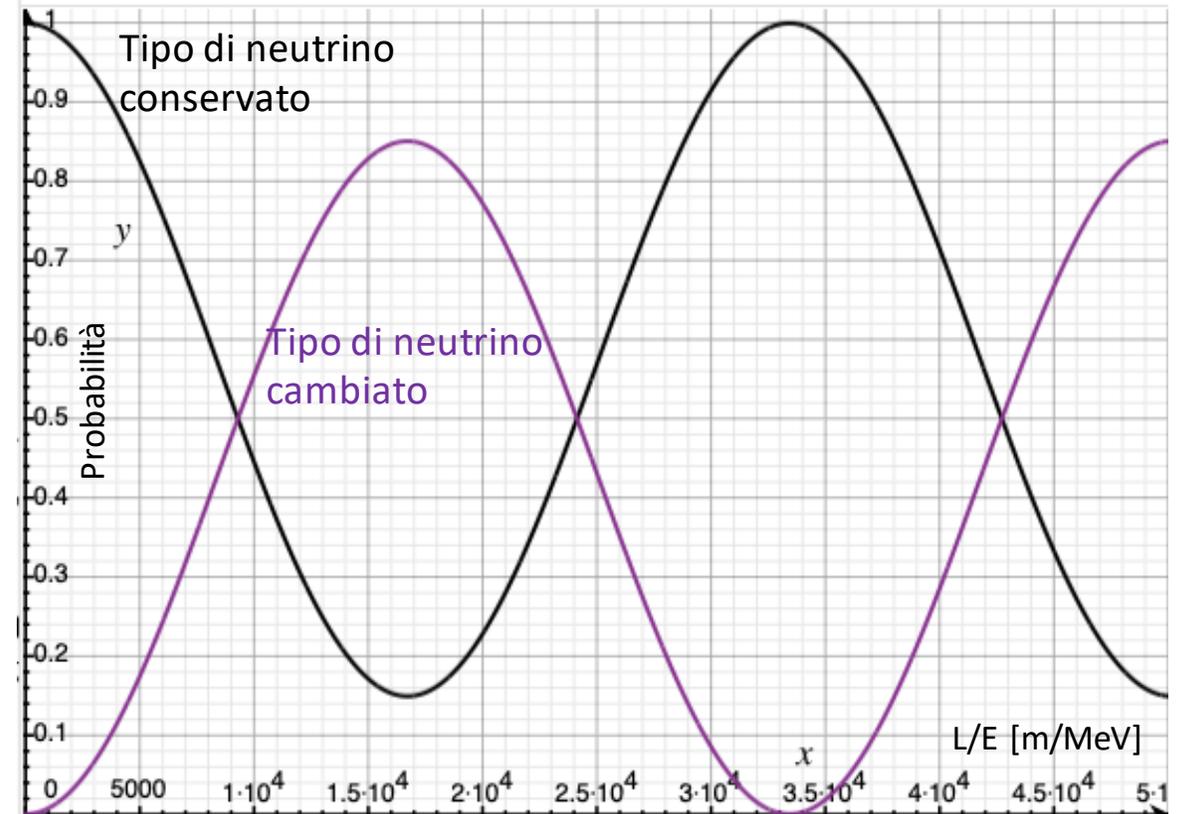
$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha (L/E)) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2[(\Delta m_{\beta\alpha}^2 c^4 L)/(4 \hbar c E)]$$
- Probabilità per oscillazione:  

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta (L/E)) = \sin^2(2\theta) \sin^2[(\Delta m_{\beta\alpha}^2 c^4 L)/(4 \hbar c E)]$$
- $P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\beta (L/E)) = P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha (L/E))$   
 $P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha (L/E)) = P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta (L/E))$   
 Lo stesso per antineutrini

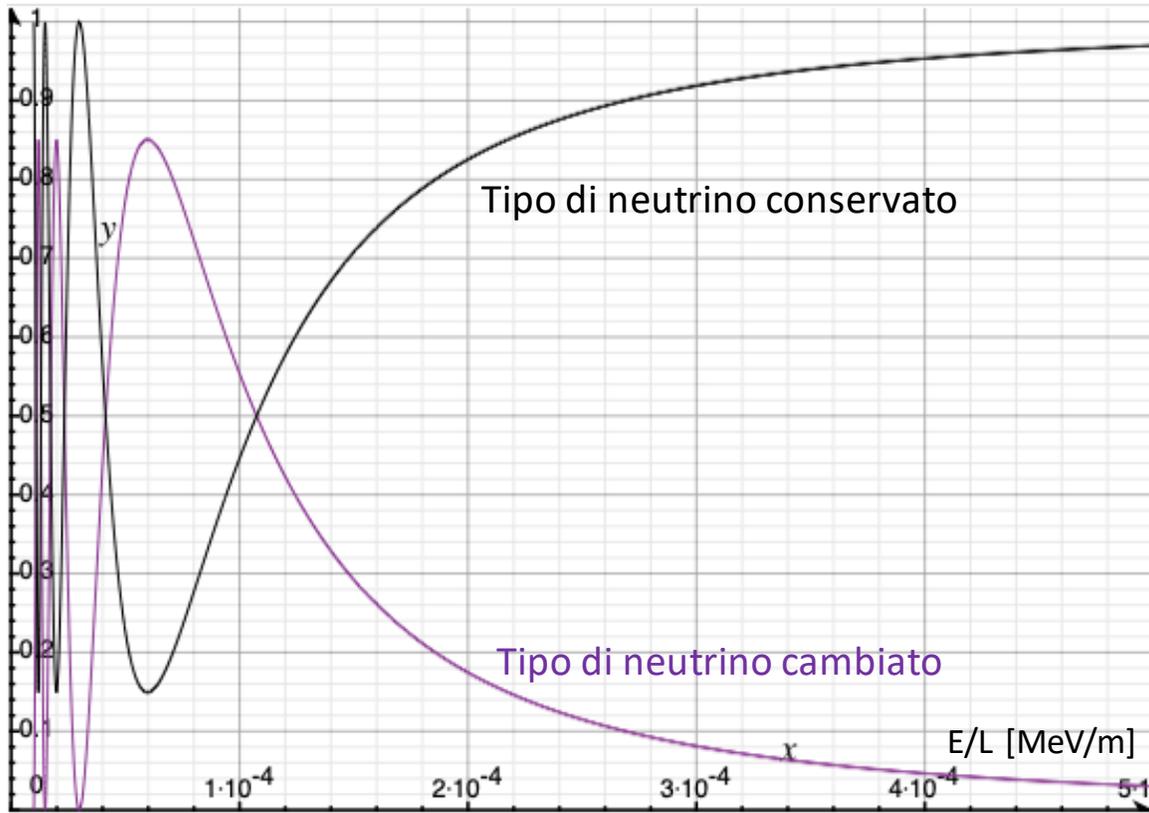
Numericamente:

$$[(\Delta m_{\beta\alpha}^2 c^4 L)/(4 \hbar c E)] = 1.27 \Delta m_{\beta\alpha}^2 [\text{eV}^2] L[\text{m}] / E[\text{MeV}]$$

oppure lo stesso con  $L/E$  [km/GeV]



Oscillazione tra due generazioni, calcolata per  $\sin^2(2\theta) = 0.85$ ,  $\Delta m_{\beta\alpha}^2 c^4 = 7.4 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$



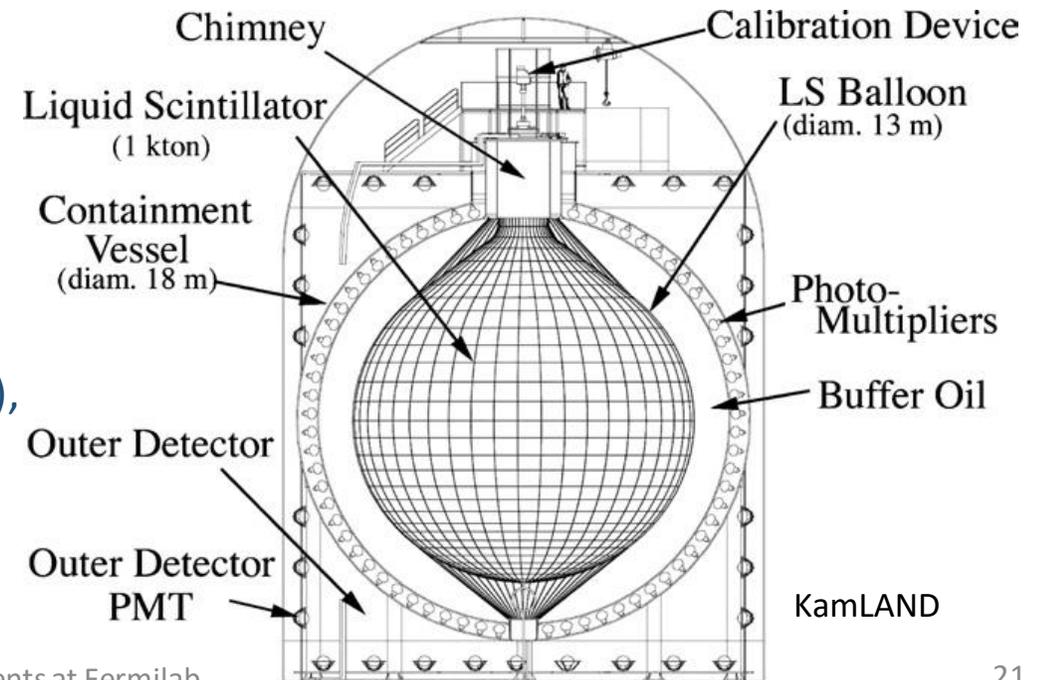
### Oscillazioni solari riprodotte con neutrini da reattore

Il valore  $\Delta m_{21}^2 c^4 \cong 7.4 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ , definito come *oscillazione solare*, fu ottenuto cambiando i risultati di **SNO e KamLAND** (2003-2008, 2015), osservava i neutrini da 55 reattori in Giappone e Corea, distanti tipicamente tra 50 e 100km, usando un rivelatore con 1000 t di scintillatore liquido, sensibile in un intervallo di circa 1.3—6 MeV. L'ampiezza di oscillazione è descritta da  $\theta_{12} \cong 34^\circ$ .

Un altro modo di illustrare la stessa oscillazione, con E/L sull'asse orizzontale

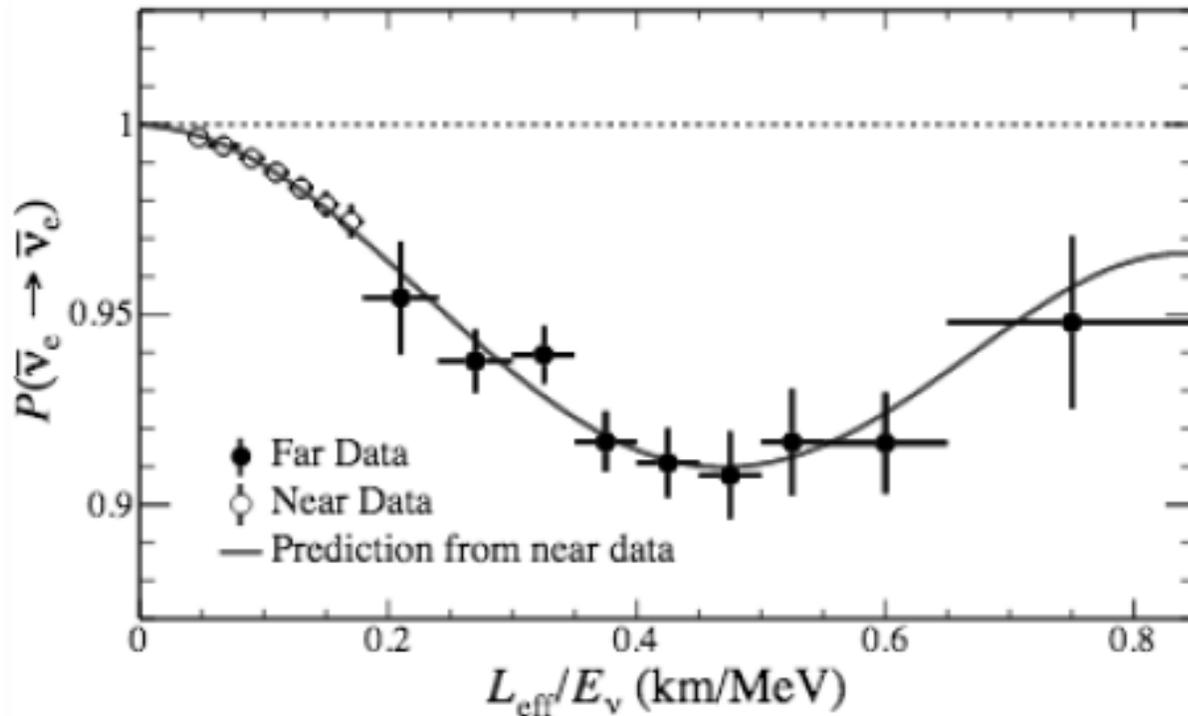
I numeri sono scelti perché rappresentano piuttosto bene le oscillazioni tra neutrini  $\nu_e$  e la somma indistinta di  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  per piccoli valori di E/L (e rispettivamente anche per antineutrini).

Un esperimento misurerebbe solo la curva nera cercando un decadimento  $\beta$  inverso. Per neutrini di circa 3 MeV, il primo minimo nel flusso apparente occorre a circa  $L=50 \text{ km}$  con il flusso ripristinato a circa 100km.

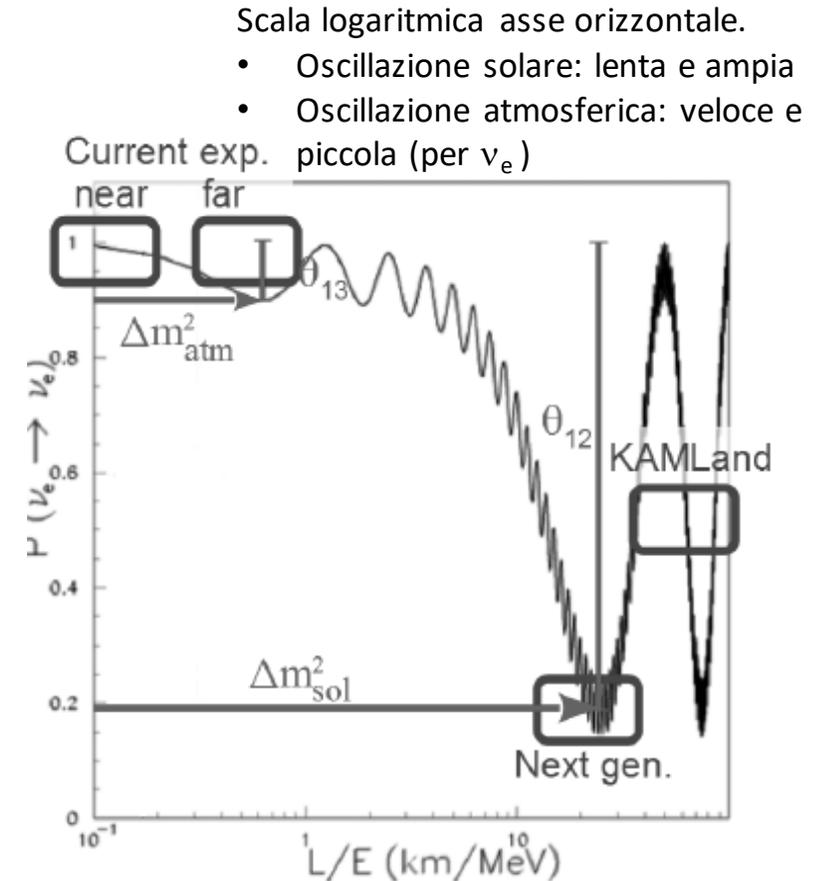


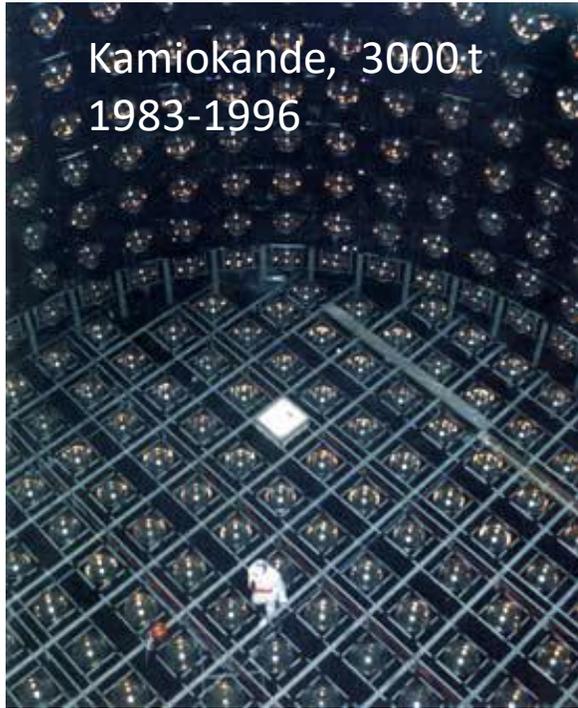
# Oscillazioni atmosferiche in neutrini da reattore

- Il problema fu affrontato da una generazione di esperimenti ai reattori, **Daya Bay** (Cina, 6 reattori, 2016), **Reno** (Corea, 6 reattori, 2012-2018), **Double Chooz** (Francia, 2 rivelatori, 2019) misurarono l'oscillazione atmosferica per  $\bar{\nu}_e$ . Qui l'oscillazione è di piccola ampiezza:  $\theta_{13} = 8.5^\circ$



Dati RENO





## Rivelatori di Kamiokande

Rivelatore di luce Cherenkov in acqua, letto da fototubi

ricerca di decadimenti di nucleoni

neutrino solari, neutrini di supernova (SN 1987A)

neutrini atmosferici

neutrini da acceleratore: K2K 1999-2005, T2K dal 2008

(spettro E con massimo a 600 MeV -> minimo della prima oscillazione atmosferica)

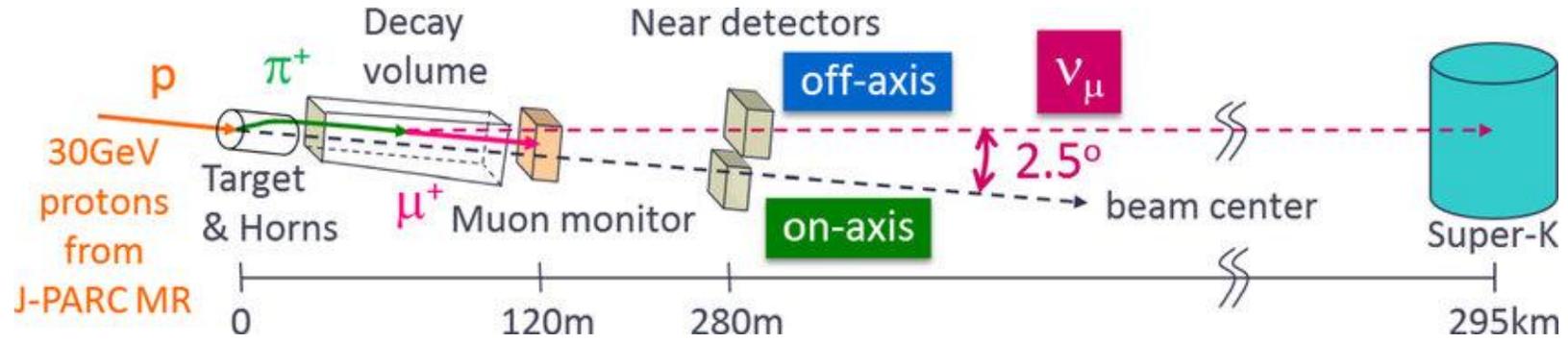
# Esperimenti con fasci di neutrini da acceleratore

Esperimenti **completati** recentemente:  
 K2K: Giappone, KEK -> Super-Kamiokande  
 MINOS: USA, Fermilab->miniera Soudan  
 CNGS: EU, CERN -> Gran Sasso, ICARUS e OPERA

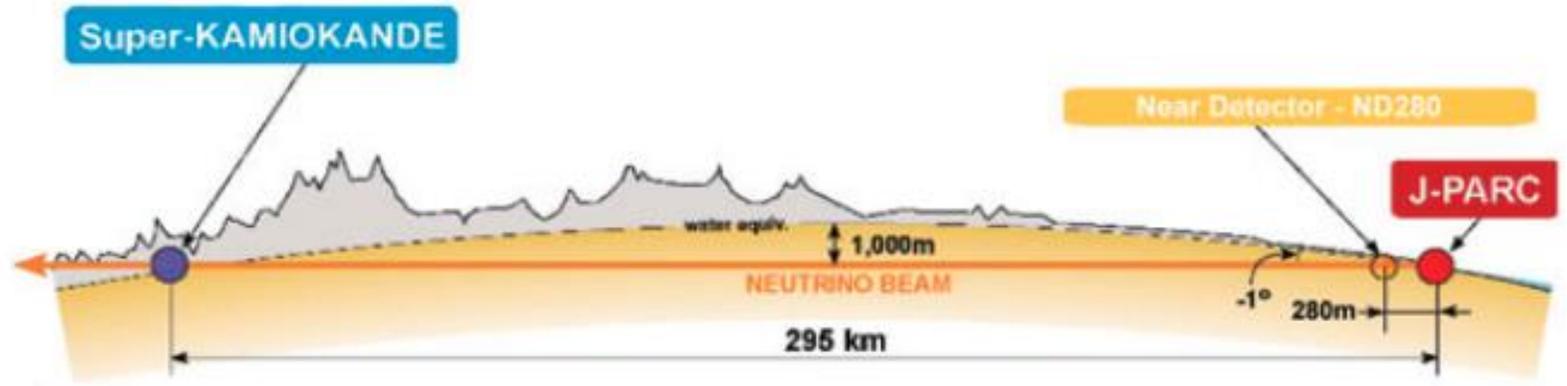
Esperimenti in **presa dati** o completamento:  
 NOvA: US

T2K: Japan, KEK -> Super-Kamiokande  
 SBN: US, Fermilab, SBND e ICARUS

Esperimenti **futuri**  
 DUNE: US, Fermilab -> Sanford SD  
 HK: Giappone, KEK -> Hyper Kamiokande



Esempio: fascio e rivelatori di T2K



## Schema di base:

- Fascio di particelle (protoni) di alta potenza
- Interagisce su un bersaglio e genera particelle secondarie
- Le particelle sono collimate in avanti da un magnete (horn)
- I mesoni decadono in un tubo a vuoto (principalmente  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ )
- Un assorbitore rimuove le particelle, mentre i neutrino proseguono
- tipicamente, un rivelatore vicino (piccolo) esegue misure di referenza
- ed un rivelatore lontano (grande) misura i neutrini, eventualmente oscillati

# Aspetti di fisica con gli esperimenti da acceleratore

- Fascio di neutrini da  $\pi^+$  (antineutrini da  $\pi^-$ ), dominato da componente muonica.
- Principalmente misure dell'oscillazione atmosferica: ( $\Rightarrow \Delta m_{32}^2$ )
  - Scomparsa di  $\nu_\mu$  ( $\Rightarrow \theta_{23}$  oscillazione in  $\nu_\tau$  dominante)
  - Apparizione di  $\nu_e$  ( $\Rightarrow \theta_{12}, \theta_{13}$ )
- Asimmetrie tra neutrino e antineutrini (violazione di CP)
- Fisica addizionale (e.g., neutrini da supernove, neutrini atmosferici, ricerca di nuove particelle)

Notazioni convenzionali:

i parametri della matrice PMNS sono definiti in questo modo (con  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ ) :

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} V_{\alpha i} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} V_{\alpha i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{23} c_{13} \end{bmatrix}$$

# Conoscenze attuali su PMNS e differenze di massa

Valori degli angoli (entro circa  $\pm 1/1/0.1$  gradi) e delle differenze di massa

$$\theta_{12} = 34^\circ$$

$$\theta_{13} = 8.5^\circ$$

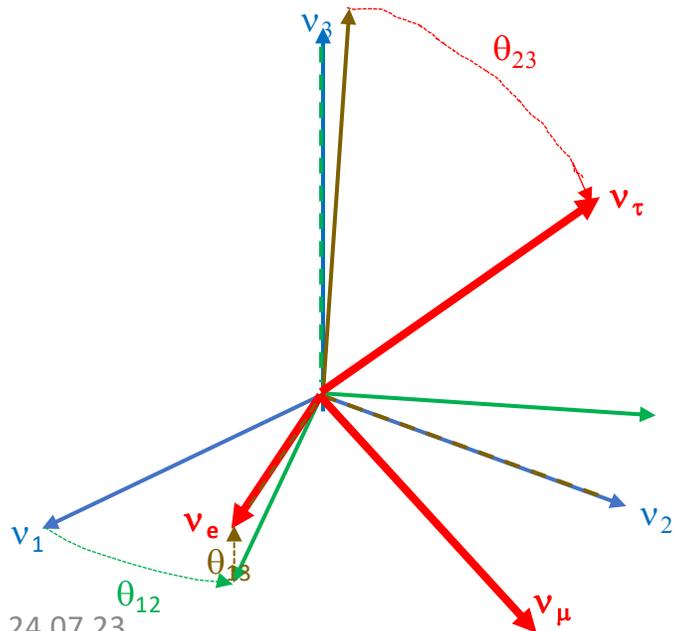
$$\theta_{23} = 48^\circ$$

$$\delta_{13} \cong 230^\circ \pm 30\text{--}40^\circ \leftarrow \text{preliminare}$$

$$\Delta m_{21}^2 = (7.4 \pm 0.2) 10^{-5} \text{ eV}^2$$

$$\Delta m_{32}^2 = (2.45 \pm 0.05) 10^{-3} \text{ eV}^2$$

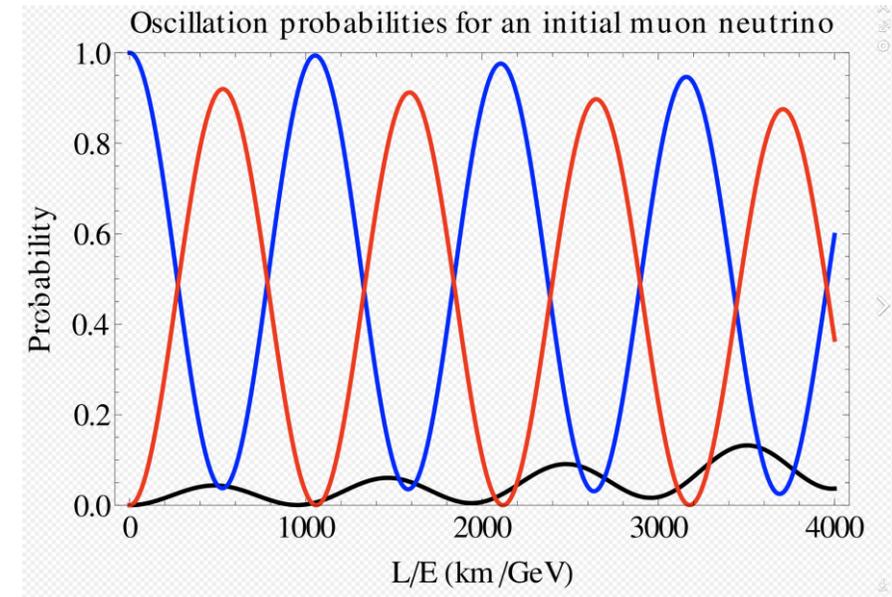
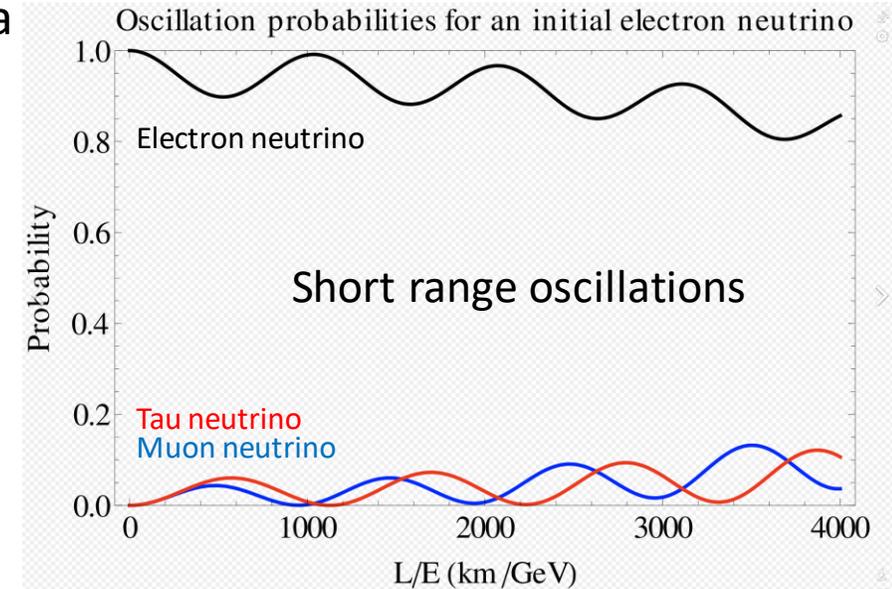
$$\begin{bmatrix} |V_{e1}| & |V_{e2}| & |V_{e3}| \\ |V_{\mu 1}| & |V_{\mu 2}| & |V_{\mu 3}| \\ |V_{\tau 1}| & |V_{\tau 2}| & |V_{\tau 3}| \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.82 & 0.55 & 0.10 \\ 0.32 & 0.59 & 0.73 \\ 0.47 & 0.58 & 0.66 \end{bmatrix}.$$



24.07.23

Con due angoli di rotazione vicini a 45 gradi, gli stati  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  sono molto differenti dagli stati con massa definita.

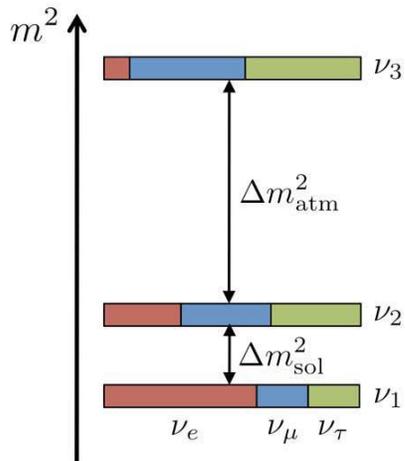
Solo  $\nu_e$  è piuttosto simile (82% in ampiezza, 67% in probabilità) ad uno di loro ( $\nu_1$ ).



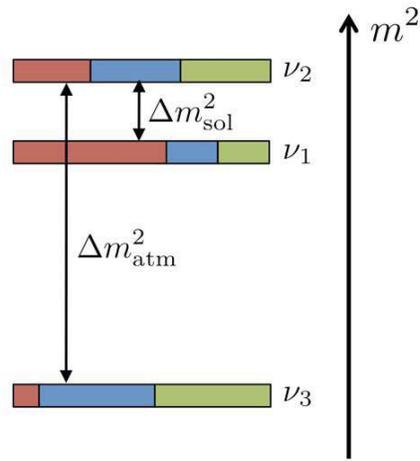
# Considerazioni finali

Ambiguità di come sono dei **segni di  $\Delta m_{ij}$** , che potranno essere definiti solo con misure future più accurate.

normal hierarchy (NH)



inverted hierarchy (IH)



$$\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{32}^2 \cong \Delta m_{31}^2$$

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 = \Delta m_{21}^2$$

Un tipo di neutrini, o forse due, ha una massa pari ad almeno  $(\Delta m_{32}^2)^{0.5} \cong 0.05 \text{ eV}$

- Molto piccola rispetto ad altre masse ( $m_e \cong 0.511 \text{ MeV}$ )
  - Giustifica la assenza di osservazione di neutrini con elicità positiva
  - Suggerisce qualche significato fondamentale?
- Potrebbe avere un impatto sul bilancio di materia nell'universo
- Potrebbe forse essere misurata direttamente, in futuro nello spettro  $E_e$  in decadimenti  $\beta$ .

La matrice di rotazione  $V$  vale I neutrini, ed è naturale, e finora confermato, che  $V^*$  si applica agli antineutrini. Con angoli di rotazione grandi, e la possibilità di una **fase  $\delta$ , asimmetrie particella-antiparticella** sono previste nelle oscillazioni (evidenza non conclusiva al momento)

- una fase simile compare nella matrice CKM dei quark, con effetti osservati, ma piccoli poiché gli angoli di rotazione sono piccoli, tali da non giustificare legami con l'asimmetria materia antimateria nell'universo.
- L'asimmetria materia-antimateria nei neutrini allude a meccanismi finora sconosciuti (ad esempio, con leptoni neutri pesanti) che possono aver avuto un impatto cosmologico?

# Materiale aggiuntivo

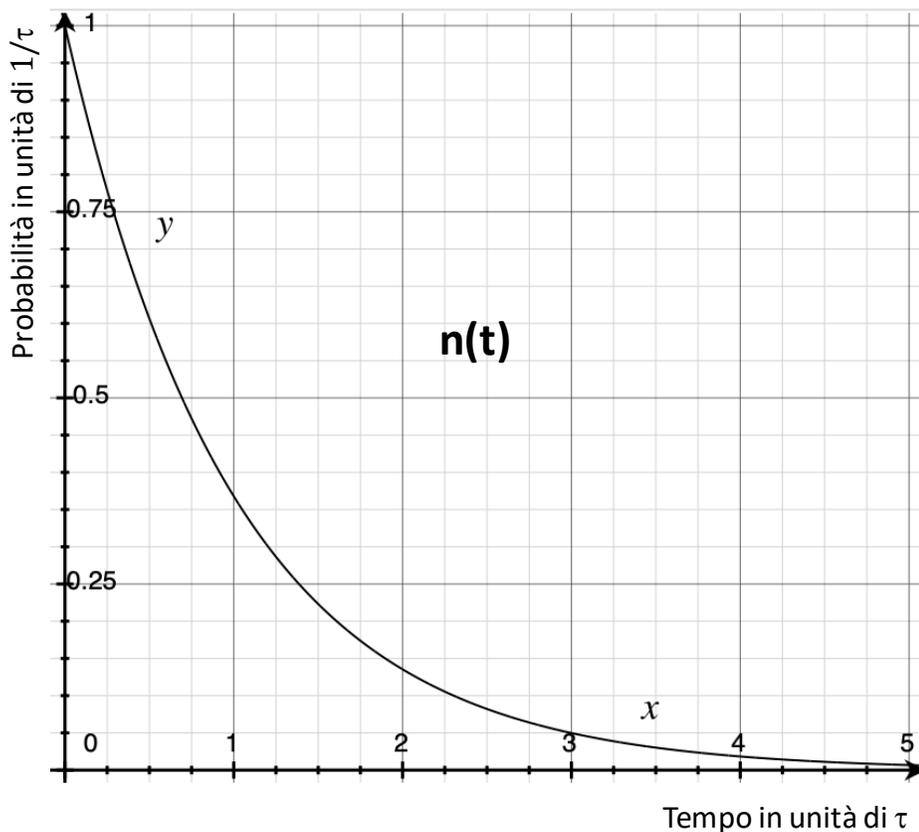
# Decadimenti, transizioni

Probabilità di transizione  $p = 1/\tau$ .

La meccanica quantistica descrive una *probabilità*, e se  $n(t)$  è la probabilità che il decadimento non abbia avuto luogo al tempo  $t$ , la probabilità che avvenga entro  $(t+dt)$  è  $(n dt/\tau)$ , che corrisponde ad una variazione  $dn = -n dt/\tau$ , da cui

$$n(t) = (1/\tau) \exp(-t/\tau).$$

$$\text{Vita media } \langle t \rangle = \int t' n(t') dt' = \tau.$$



## Esempi di vita media:

- **Interazioni deboli:** decadimenti particelle  $\pi^\pm, \mu^\pm$ ,  $n$ :  $2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ,  $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ,  $879 \text{ s}$  (fasci di particelle, anche con dilatazione temporale relativistica)  
decadimenti nucleari: tempi da  $10^{-23}$  a  $10^{30} \text{ s}$ ,  $10^5$ – $10^7 \text{ s}$  per applicazioni mediche/industriali
- **Interazioni elettromagnetiche (e.m.):** decadimento  $\pi^0$ :  $0.85 \cdot 10^{-16} \text{ s}$ ,  
transizioni nucleari tipicamente  $10^{-15}$  –  $10^{-9} \text{ s}$ ,  
transizioni atomiche  $\sim 10^{-8} \text{ s}$ .
- **Interazioni forti:** virtualmente  $< 10^{-23} \text{ s}$ , lo stato metastabile non fa in tempo a propagarsi entro il nucleo o il volume di interazione, e il processo è trattato come una transizione istantanea.

## Transizioni in meccanica quantistica, regola d'oro di Fermi :

approccio perturbativo all'interazione  $H'$  (solitamente debole o e.m.), legata al modulo quadro dell'ampiezza di transizione, e alla densità quantistica nello spazio delle fasi dello stato finale (termine cinematico):

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

Esprime  $\rho$  in un decadimento,  $\sigma$  in uno scattering.  $\hbar$  è la costante di Planck.

# Oscillazioni per il caso semplificato di 2 neutrini (2 generazioni) - 1

Uno stato  $|v_\alpha\rangle$  creato a  $t=0$  può essere scritto come

$$|v_\alpha\rangle = \cos\theta |v_1\rangle + \sin\theta |v_2\rangle .$$

La sua evoluzione temporale è

$$\begin{aligned} |v_\alpha(t)\rangle &= \cos\theta |v_1(t)\rangle + \sin\theta |v_2(t)\rangle \\ &= \cos\theta \exp(-iE_1 t/\hbar) |v_1\rangle + \sin\theta \exp(-iE_2 t/\hbar) |v_2\rangle . \end{aligned}$$

(La dipendenza spaziale, come un pacchetto d'onde sviluppato in  $\exp(ikx)=\exp(ipx/\hbar)$  è comune a entrambe le parti e può essere ignorata).

Le masse sono piccole, I neutrini sono relativistici, ed  $E_i \cong pc + m_i^2 c^2/2p$ ; utilizzando  $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$  troviamo

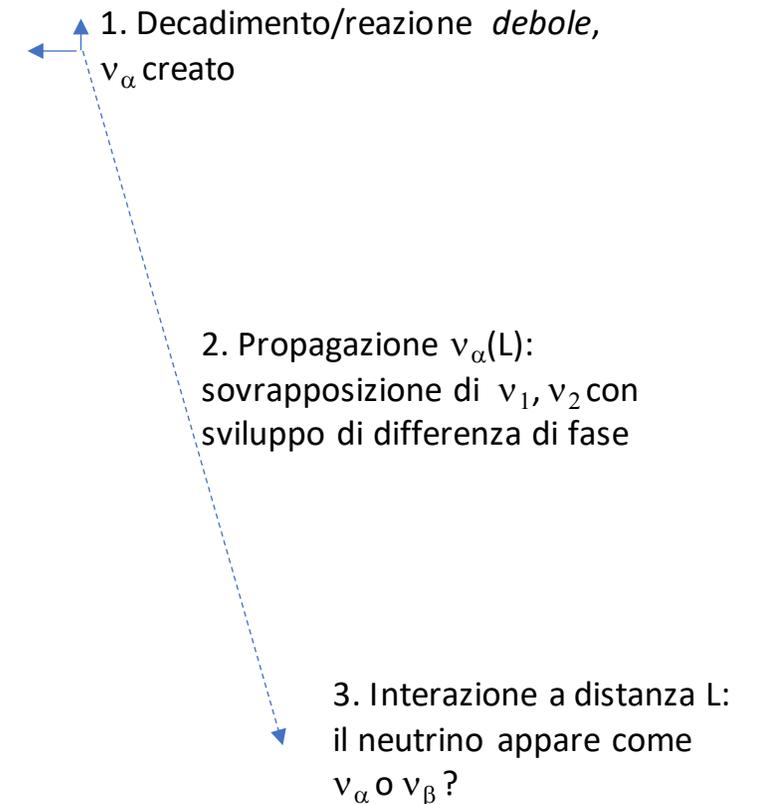
$$\begin{aligned} |v_\alpha(t)\rangle &= \exp[-i(pc + m_1^2 c^2 t/4p\hbar)] [\cos\theta \exp(i\Delta m_{21}^2 c^2 t/4p\hbar) |v_1\rangle \\ &\quad + \sin\theta \exp(-i\Delta m_{21}^2 c^2 t/4p\hbar) |v_2\rangle] . \end{aligned}$$

Usando  $t \cong L/c$ ,  $\alpha = (\Delta m_{21}^2 c^4)/(4\hbar c)$ ,  $p = E/c$ :

$$|v_\alpha(L)\rangle = \exp[-i\phi] [\cos\theta \exp(i\alpha L/E) |v_1\rangle + \sin\theta \exp(-i\alpha L/E) |v_2\rangle]$$

$\phi$  è una fase comune che non ha effetti, mentre la differenza di fase tra le componenti  $|v_1\rangle$  e  $|v_2\rangle$ , che cresce con  $L/E$  e  $\Delta m_{21}^2$ , è quella che determina la dinamica dell'oscillazione.

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



## Oscillazioni per il caso semplificato di 2 neutrini (2 generazioni) - 2

All'interazione, a distanza  $L$ , possiamo scrivere  $|v_1\rangle$  e  $|v_2\rangle$  come sovrapposizione di  $v_\alpha$  e  $v_\beta$ :

$$\begin{aligned} |v_\alpha(L)\rangle &= \exp[-i\phi] [ \cos\theta \exp(i \alpha L/E) |v_1\rangle + \sin\theta \exp(-i \alpha L/E) |v_2\rangle ] \\ &= \exp[-i\phi] [ \cos\theta \exp(i \alpha L/E) (\cos\theta |v_\alpha\rangle - \sin\theta |v_\beta\rangle) \\ &\quad + \sin\theta \exp(-i \alpha L/E) (\sin\theta |v_\alpha\rangle + \cos\theta |v_\beta\rangle) ] \end{aligned}$$

Ampiezza per  $|v_\alpha\rangle$ , cioè  $v_\alpha(L) \rightarrow v_\alpha$ , senza oscillazione

$$A = \exp[-i\phi] [ \cos^2\theta \exp(i \alpha L/E) + \sin^2\theta \exp(-i \alpha L/E) ]$$

Probabilità  $P = |A|^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2 \operatorname{Re} (\cos^2\theta \sin^2\theta \exp(i 2\alpha L/E))$

$$\text{usando: } \cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2 \cos^2\theta \sin^2\theta$$

$$\cos\theta \sin\theta = 1/2 \sin(2\theta)$$

$$\cos(2\alpha L/E) = 1 - 2 \sin^2(\alpha L/E)$$

$$P = 1 - 2 \cos^2\theta \sin^2\theta [1 - \cos(2\alpha L/E)]$$

$$= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(\alpha L/E)$$

$$P(v_\alpha(L) \rightarrow v_\alpha) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2[(\Delta m_{21}^2 c^4 L)/(4 \hbar c E)] .$$

Analogamente:

$$P(v_\alpha(L) \rightarrow v_\beta) = \sin^2(2\theta) \sin^2[(\Delta m_{21}^2 c^4 L)/(4 \hbar c E)]$$

$$P(v_\beta(L) \rightarrow v_\alpha) = P(v_\alpha(L) \rightarrow v_\beta)$$

$$P(v_\beta(L) \rightarrow v_\beta) = P(v_\alpha(L) \rightarrow v_\alpha)$$

Le stesse relazioni valgono per oscillazioni tra antineutrini.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}$$

### Valori numerici

$$\alpha = (\Delta m_{21}^2 c^4)/(4 \hbar c),$$

Con  $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$

$$= 197 \cdot 10^{-15} \text{ MeV m},$$

e  $\Delta m_{21}^2 c^4$  espresso in  $\text{eV}^2$ ,

la fase dell'oscillazione risulta numericamente uguale a

$$\alpha L/E = 1.27 \Delta m_{21}^2 [\text{eV}^2] L[\text{m}] / E[\text{MeV}]$$

oppure lo stesso con  $L/E$  [km/GeV]

Intervallo di oscillazione:

$$L/E|_{\text{periodo}} = \pi/(1.27 \Delta m_{21}^2)$$

## Matrice PMNS espressa con tre angoli di Eulero Assi 1, 2, 3 lungo gli autostati di massa

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{23} c_{13} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Valori degli angoli (entro circa  $\pm 1/1/0.1$  gradi) e delle differenze di massa

$$\theta_{12} = 34^\circ$$

$$\theta_{13} = 8.5^\circ$$

$$\theta_{23} = 48^\circ$$

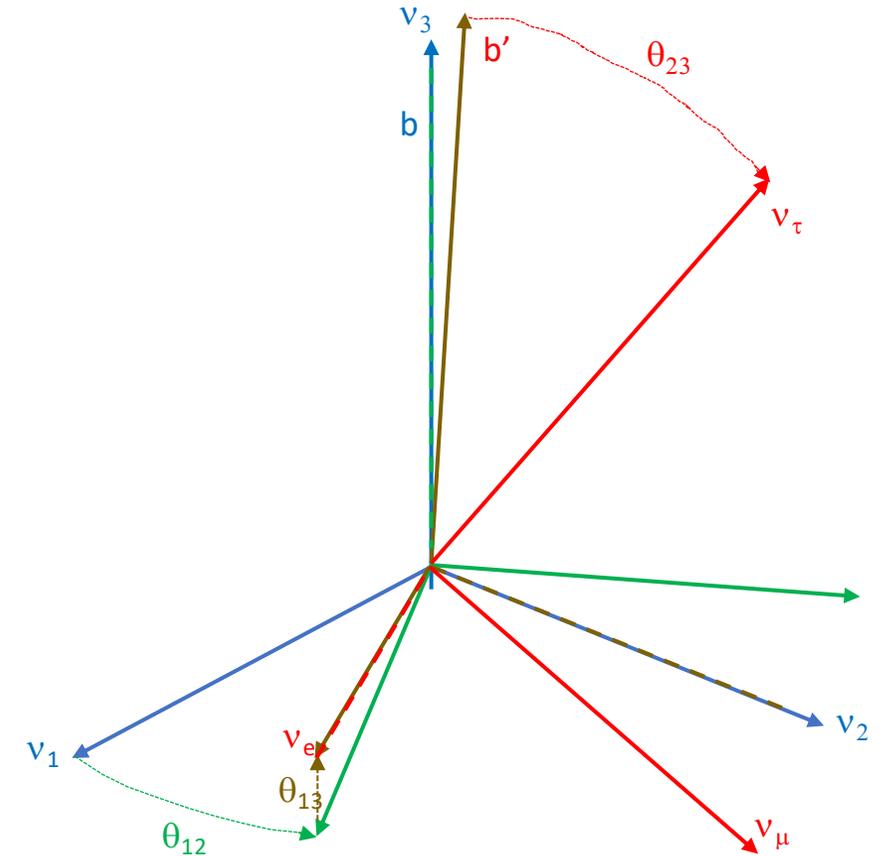
$$\delta_{13} \cong 230^\circ$$

$$\Delta m_{21}^2 \cong (7.4 \pm 0.2) 10^{-5} \text{ eV}^2$$

$$\Delta m_{32}^2 \cong (2.45 \pm 0.05) 10^{-3} \text{ eV}^2$$

$$\begin{bmatrix} |V_{e1}| & |V_{e2}| & |V_{e3}| \\ |V_{\mu 1}| & |V_{\mu 2}| & |V_{\mu 3}| \\ |V_{\tau 1}| & |V_{\tau 2}| & |V_{\tau 3}| \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.82 & 0.55 & 0.10 \\ 0.32 & 0.59 & 0.73 \\ 0.47 & 0.58 & 0.66 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} V_{\alpha i} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}$$



## Paragone con i quark:

### Matrice CKM

Assi 1, 2, 3 lungo gli autostati di massa

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{23} c_{13} \end{bmatrix} .$$

The 2008 values for the standard parameters were:<sup>[9]</sup>

$$\theta_{12} = 13.04^\circ \pm 0.05^\circ, \theta_{13} = 0.201^\circ \pm 0.011^\circ, \theta_{23} = 2.38^\circ \pm 0.06^\circ$$

and

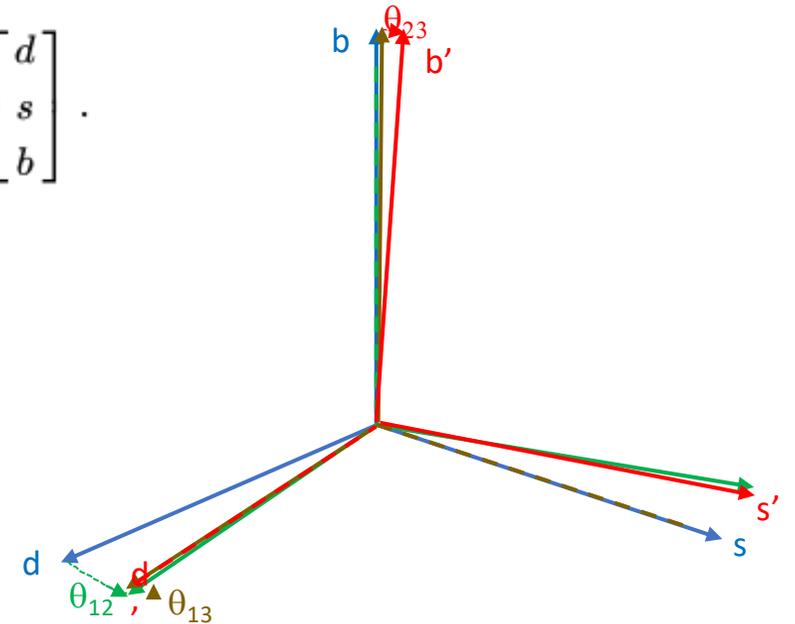
$$\delta_{13} = 1.20 \pm 0.08 \text{ radians} = 68.8^\circ \pm 4.5^\circ .$$

$$\begin{bmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.97370 \pm 0.00014 & 0.2245 \pm 0.0008 & 0.00382 \pm 0.00024 \\ 0.221 \pm 0.004 & 0.987 \pm 0.011 & 0.0410 \pm 0.0014 \\ 0.0080 \pm 0.0003 & 0.0388 \pm 0.0011 & 1.013 \pm 0.030 \end{bmatrix} .$$

Nelle interazioni deboli mediate da W (cioè con cambiamento di carica),  
Il quark **u** è accoppiato alla sovrapposizione **d'**, che ha una componente grande di **d** e piccola di **s**, per molto piccola di **b**.

La situazione è simile per **c** e **s'**.

Per il quark **t**, **b'** è quasi uguale a **b** – soprattutto la componente **d** è piccola.



Differenze e similitudini con le sovrapposizioni di neutrini:

- I neutrini si propagano, mentre i quark *adronizzano*, e tipicamente l'effetto della sovrapposizione è solo sulle frazioni di decadimento.
- Eccezione: alcuni mesoni neutri ( $K^0$ ,  $B^0$  ... possono oscillare)
- Gli angoli sono piccoli nella matrice CKM, che è quasi diagonale, sono grandi nella PMNS.
- Le differenze di massa sono grandi per i quark ( $\sim 0.1-5$  GeV), piccole tra i neutrini ( $\sim 0.01-0.05$  eV).