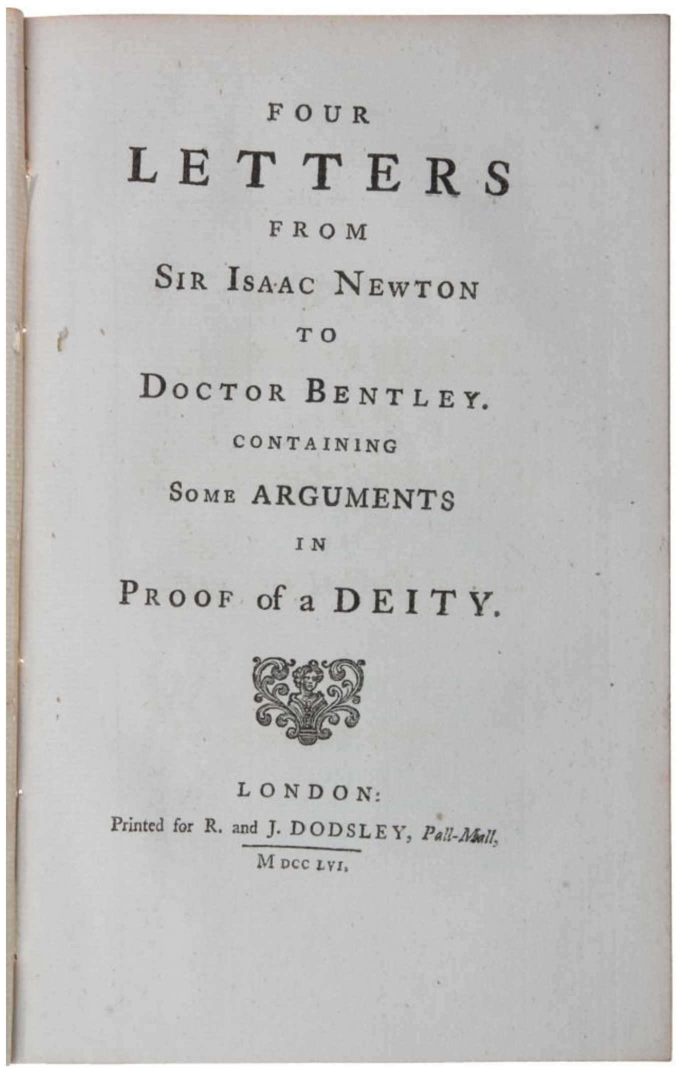
Dal paradosso di Bentley alla fisica moderna

Francesco Vissani
INFN, Laboratori Nazionali del Gran Sasso, L'Aquila



FOUR
LETTERS
FROM
Sir Isaac Newton
TO
Doctor Bentley.
CONTAINING
Some ARGUMENTS
IN
Proof of a DEITY.

LONDON:
Printed for R. and J. DODSLEY, *Pall-Mall*,
M DCC LVI.

Sommario

Nel 1692, Richard Bentley espresse a Newton il timore che le forze attrattive, inversamente proporzionali al quadrato della distanza, potessero causare una sorta di collasso della materia in un punto. Siccome non è infrequente imbattersi in simili dubbi a scuola, proponiamo di avvantaggiarcene per introdurre qualche argomento di fisica moderna. Discuteremo delle forze gravitazionali che regolano la fisica stellare e di quelle elettrostatiche che causano l'attrazione di elettroni e nuclei negli atomi. Esamineremo le ragioni per introdurre certe distanze minime, associate rispettivamente alla scala dei buchi neri stellari e al raggio dell'atomo, che in un certo senso rispondono al dubbio di Bentley. Ripercorreremo la storia di queste acquisizioni, sottolineando le analogie formali e i collegamenti, ma anche le varie differenze tra la microfisica e la fisica stellare, proponendo approfondimenti, speculazioni ed esercizi di controllo.

1 Un paradosso di tre secoli fa e due domande

Cinque anni dopo che Newton propose la legge di gravitazione universale, Richard Bentley, un teologo suo corrispondente, gli espose una serie di dubbi che innescarono una interessante discussione. I dubbi, che riguardano i destini ultimi di un sistema di corpi dotati di massa, nascevano dalla costatazione che, quando si avvicinano i corpi tra di loro, le forze attrattive crescono indefinitamente. Purtroppo, la lettera originale è andata perduta e possiamo leggere solo le risposte (pur eloquenti) di Newton; gli interessati sono invitati a consultare il sito [1] ed il primo capitolo del libro [2]. Newton ne ragiona raccogliendo argomenti interessanti, pur senza arrivare a conclusioni definitive. Tale discussione passò alla storia come "il paradosso di Bentley".

Dubbi del genere son degni di attenzione, non solo in riferimento alla cosmologia come nella corrispondenza tra Bentley e Newton, ma anche in considerazione dei percorsi educativi scolastici. Ispirati da simili considerazioni, formuleremo senza indugi una prima domanda:

> se la forza di attrazione tra corpi celesti cresce al diminuire della distanza, come mai tutti i corpi dotati di massa non finiscono nello stesso punto?

che potrebbe essere legittimamente proposta da uno studente di scuola superiore interessato e curioso, che incontrasse per la prima volta la legge di gravitazione universale.[1]

Circa un secolo più tardi (1785) Coulomb mostrò che la legge dell'inverso del quadrato della distanza si applica anche alle particelle cariche, che quando hanno cariche opposte si attraggono. Così, uno studente che conoscesse gli elementi costitutivi dell'ato-

[1] P.e., ai miei tempi la domanda venne posta da un mio amico e compagno di classe, Luca Polzoni (oggi ingegnere).

mo, riflettendo sul modello planetario, avrebbe qualche diritto di riproporre il dubbio e chiedersi:

> perché gli elettroni non precipitano all'interno del nucleo atomico?

Come argomenteremo, la risposta spontanea: *gli atomi esistono per la stessa ragione per cui esistono i sistemi planetari,* richiede una discussione più approfondita di quanto si potrebbe credere.

Non cercheremo di riprodurre i termini di una importante corrispondenza, ma piuttosto di illustrare il valore del dibattito filosofico, anche nella scienza. Come vedremo, discutere delle temute ripercussioni delle due domande appena formulate ci offrirà l'occasione di parlare di interessanti argomenti di fisica moderna, ripercorrendone la storia. Mostreremo che gli strumenti disponibili nella scuola superiore sono perfettamente adeguati allo scopo.

Per essere ben definiti nella discussione, esamineremo la prima domanda facendo riferimento alla struttura delle stelle, pensate come insieme di corpi dotati di massa e pertanto soggetti all'attrazione gravitazionale. Quanto alla seconda, ragioneremo sui modelli dell'atomo, le cui parti verranno pensate come punti materiali soggetti alle forze di attrazione elettrostatiche. Evidenzieremo le similitudini, le differenze e alcune connessioni tra questi importanti sistemi fisici.

Il piano dell'esposizione è il seguente. Iniziamo definendo accuratamente le forze di cui ci interessa discutere. Poi descriveremo certe risposte, che derivano dalla fisica moderna, nel modo più diretto possibile. L'idea non è di tagliar corto su una discussione interessantissima e importante (ci torneremo dopo, e la commenteremo diffusamente) ma piuttosto quella di apprezzare da subito come queste domande ci possano guidare proprio ad argomenti di punta della fisica moderna, ovvero, a parlare di raggio dell'atomo e dimensioni dei buchi neri. Varie appendici esaminano degli aspetti specifici, evocati nella discussione, e propongono inoltre alcuni esercizi di controllo ed approfondimento. I riferimenti bibliografici, oltre ai pochi di natura storica, sono ridotti all'essenziale e possono costituire dei punti di ingresso ad ulteriori approfondimenti.

2 Notazioni

Iniziamo riportando le formule delle forze attrattive che ci interessano, quella di Newton tra due masse m ed M e quella di Coulomb tra due cariche opposte $-q$ (negativa) e Q (positiva)

$$F_{\text{Newton}} = G_{\text{N}}\, m\, M/r^2 \qquad \text{e} \qquad F_{\text{Coulomb}} = q\, Q/r^2 \tag{1}$$

dove r è la distanza tra i due corpi, supposti non essere a contatto, e G_{N} è la cosiddetta costante di gravitazione universale. Utilizzeremo il "sistema gaussiano" per le interazioni

simbolo	valore	unità	nome
G_{N}	6.7×10^{-8}	$\mathrm{erg\,cm/g^2}$	cost. di gravitazione universale
e	4.8×10^{-10}	$\mathrm{erg^{1/2}cm^{1/2}}$	carica elettrone
c	3.0×10^{10}	cm/s	velocità della luce
$\hbar$	1.1×10^{-27}	erg s	costante di Planck ridotta
k_{B}	1.4×10^{-16}	erg/K	costante di Boltzmann
eV	1.6×10^{-12}	erg	elettronvolt
$M_\odot$	2.0×10^{33}	g	massa del Sole
$M_\oplus$	6.0×10^{27}	g	massa della Terra
m_p	1.7×10^{-24}	g	massa protone
m_e	9.1×10^{-28}	g	massa elettrone
au	1.5×10^{13}	cm	distanza Terra-Sole
$R_\odot$	7.0×10^{10}	cm	raggio del Sole
$r_{s,\odot}$	3.0×10^{5}	cm	raggio di Schwarzschild del Sole
a_0	5.3×10^{-9}	cm	raggio di Bohr

Tabella 1: *Alcune quantità importanti per la discussione, espresse nel sistema gaussiano con unità CGS. L'unità di energia si chiama* erg=g (cm/s)^2= 10^{-7} J.

elettrostatiche, sistema un tempo molto in auge e ancor oggi in uso tra astrofisici e fisici delle particelle, in quanto rende le formule un po' più semplici; vedi anche gli esercizi 1-3.

Son formule ben note agli studenti di scuola superiore. Un caso particolarmente importante e solo apparentemente semplice è quello di due 'punti materiali' (masse puntiformi) soggetti a forze di questo tipo. Possiamo pensare al sistema Terra-Sole visto abbastanza da lontano, ma ci interesserà particolarmente quando parleremo dell'atomo. Per evitare complicazioni, assumeremo che il nucleo sia in prima approssimazione immobile e l'elettrone gli ruoti intorno.

Ricordiamo che entrambe le interazioni possono essere descritte anche per mezzo di una funzione della distanza dal centro detta 'energia potenziale', e precisamente[2]

$$V = -\frac{\kappa}{r} \text{ dove } \kappa = \begin{cases} G_{\mathrm{N}}\, m\, M & \text{per la forza di Newton} \\ q\, Q & \text{per la forza di Coulomb} \end{cases} \tag{2}$$

Il segno 'meno' nel risultato corrisponde al fatto che la forza è attrattiva, diretta verso l'origine; dunque avvicinarsi al centro significa diminuire l'energia potenziale. Nel caso dell'atomo di idrogeno avremo $Q = q = e$, dove e è la carica dell'elettrone,[3] mentre m è la

[2] In effetti, chiunque padroneggi un po' di analisi può calcolare la derivata al potenziale e ritrovare le espressioni appena date per la forza, p.e., $F_x = -dV/dx = -\kappa x/r^3$, in quanto $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, dove x, y, z sono le coordinate cartesiane del corpo che si muove, misurate prendendo l'altro corpo ad origine degli assi.

[3] Si noti che la convenzione usata in equazione (2) sottolinea le analogie tra le forze gravitazionali che agiscono tra il sole e i pianeti e quelle elettriche che agiscono tra elettroni e nucleo atomico, che sono i

massa dell'elettrone. Nel caso del sistema Terra-Sole avremo $M = M_\odot$ (massa del Sole) ed $m = M_\oplus$ (massa della Terra).

3 Dritti al punto

In questa sezione esporremo, nel modo più diretto possibile, alcune risposte alle domande ispirate dal paradosso di Bentley. Argomenteremo l'esistenza di certe distanze minime (diverse da zero) che possiamo definire grazie alle costanti della fisica moderna. Ci riferiamo a

c (velocità della luce) ed $\hbar = h/(2\pi)$ (costante di Planck ridotta)

ovvero alle costanti più importanti della relatività di Einstein e della meccanica quantistica (h è la costante di Planck). Si veda la Tab. 1 per i loro valori numerici approssimati e l'appendice A per qualche utile annotazione tecnica.

Stelle e velocità della luce Consideriamo una stella di massa M e di piccole dimensioni, idealmente puntiforme. Ci interesserà capire se un corpo dotato di massa m riesce a sfuggire agli effetti dell'attrazione gravitazionale; sembra ragionevole pensare che, a causa della legge $1/r^2$, se si avvicina troppo al centro, prima o poi fallirà.

L'energia del corpo è costituita dalla parte cinetica e da quella potenziale

$$\frac{m\,v^2}{2} - \frac{G_{\rm N}\,m\,M}{r} \tag{3}$$

Supponiamo che il corpo riesca ad allontanarsi fino all'infinito, $r = \infty$, dove arriva a velocità nulla, $v_\infty = 0$. Questa condizione definisce la minima velocità iniziale, detta 'velocità di fuga':

$$v^2 = 2G_{\rm N}M/r \tag{4}$$

Nel caso in cui essa sia pari alla velocità della luce c, che risulta essere un limite insuperabile, troviamo la distanza di massimo avvicinamento compatibile con la fuga

$$r = \frac{2G_{\rm N}M}{c^2} \tag{5}$$

Nel contesto della relatività generale di Einstein questa espressione coincide con il cosiddetto raggio di Schwarzschild [3] associato ad un buco nero con massa M. Come preannunciato, e come a posteriori potrebbe risultare quasi ovvio da considerazioni dimensionali, la costante c permette di definire una lunghezza minima associata ad una massa M. Inoltre, nel contesto della discussione che ci interessa, essa può essere considerata una risposta ai dubbi di Bentley nel caso di una stella. Il valore numerico associato al Sole è dato in Tab. 1.

casi concreti che ci interessano nella discussione. In entrambi questi casi, il potenziale risulta negativo e decrescente con la distanza dal centro, e dunque la forza attrattiva.

Atomi e costante di Planck Consideriamo ora un elettrone che ruota attorno ad un protone (ovvero, un atomo di idrogeno). Ci servirà far riferimento al principio di indeterminazione di Heisenberg, che viene menzionato a scuola. Esso implica che la quantità di moto - o momento - dell'elettrone p, ovvero $p = m_e v$ (dove v è la sua velocità) è legata alla distanza di confinamento r dalla relazione $p \sim \hbar/r$ (vedi appendice A per le notazioni). Questa relazione significa che se pretendiamo di confinare in una regione molto piccola l'elettrone, esso acquisterà inevitabilmente una grande velocità ed un grande momento.

Pertanto, utilizziamo la stima di p nell'espressione per l'energia cinetica dopo aver riscritto $m_e v^2/2 = p^2/(2m_e)$

$$\frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} \sim \frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar}{r}\right)^2 - \frac{e^2}{r} \tag{6}$$

e l'espressione di destra implica l'esistenza di un valore r in cui il potenziale raggiunge il minimo valore, corrispondente ad una posizione di equilibrio[4] che vale

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \tag{7}$$

Abbiamo costruito una lunghezza minima che fornisce una risposta al paradosso. Si noterà che stiamo ragionando della grandezza dell'atomo, un argomento assai importante; infatti, l'espressione qui mostrata coincide col celebre "raggio di Bohr" del quale parleremo in seguito (vedi Tab. 1).

Commenti La fisica moderna ci indica alcune risposte al timore che tutta la materia possa finire nello stesso punto a causa delle forze attrattive: nel caso delle stelle, stiamo parlando di velocità della luce, relatività e buchi neri; nel caso della microfisica, parliamo invece di fisica quantistica, principio di Heisenberg e raggio dell'atomo. Queste considerazioni illustrano il valore anche didattico di una tale discussione, e forse motivano qualcuno ad andare più a fondo.

Con questa speranza, vorremmo discutere cosa significano queste risposte, senza sentirci tenuti ad eccessivo rigore formale o a commentare certe formule che son comunque presentate a scuola. Cercheremo di ritrovare i fili della storia e di capire in che misura si applicano queste considerazioni, mostrando come in un caso (fisica dell'atomo) abbiano un carattere di inevitabilità mentre nell'altro (fisica stellare) diventino essenziali solo se si verificano certe condizioni particolari.

[4] Per calcolarlo con metodi elementari poniamo $a^2 = (\hbar/r)^2/(2m_e)$ e $2ab = e^2/r$, ossia uguagliamo l'energia con $a^2 - 2ab$. Queste posizioni implicano che a varia con r, b invece no; così riscrivendo $a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$, vediamo che il minimo si ha per $a = b$, ovvero $2a^2 = 2ab$, che implica $(\hbar/r)^2/m_e = e^2/r$.

4 Cosa significano queste risposte e come ci siamo arrivati

In questa sezione, ragioniamo su come siamo arrivati alle risposte appena discusse e ne esaminiamo il significato. Per questo richiameremo alcuni passaggi di come si sono evoluti i modelli dell'atomo e delle stelle. Per prima cosa però esaminiamo i modi in cui la fisica pre-novecentesca (la cosiddetta fisica classica) si è messa in relazione con questi argomenti.

4.1 Tentativi di parare lo scacco

La teoria classica può eludere il paradosso di Bentley in vari modi. Simili strade sono state sondate, tanto nella storia del pensiero astronomico che in quello relativo alla fisica del micromondo, e conducono a considerazioni interessanti e spesso valide. Ragioneremo di questo concentrandoci su due possibilità logiche:

- I corpi sono in moto nello spazio e non bisogna limitarsi a considerare solo le forze attrattive.
- C'è anche qualche altra forza all'opera, che si oppone a quelle attrattive e che dà supporto alla struttura.

La prima ipotesi sembra minimale, quindi molto degna di considerazione. Anzi pensando a un sistema di due corpi orbitanti, e mettendosi nel sistema di riferimento rotante, verrebbe spontaneo rispondere: *c'è anche la forza centrifuga!* (vedi appendice A). Ma come vedremo bisogna pensarci meglio, per quanto riguarda l'atomo almeno. La seconda ipotesi sembra forse più *ad hoc*, ma anche essa è assai ragionevole. Nell'interno dei corpi celesti esisteranno certo altre forze oltre a quelle forze gravitazionali; vale la pena di capire quali siano.

Si noti che argomenti del genere vengono evocati in varie occasioni. Per esempio, è possibile pensare all'intero universo come ad un sistema in evoluzione, e non si possono ignorare le evidenze che l'universo si sta espandendo, come viene giustamente sottolineato nelle discussioni generali di cosmologia.[5] Nella nostra discussione ci contenteremo di ragionare di atomi e di stelle.

Per motivi che diventeranno chiari durante l'esposizione, converrà partire dalla microfisica per poi parlare di stelle. Inoltre, per essere chiari e ben definiti, partiremo ragionando del moto di una coppia di punti materiali, e per essere ancora più completi nella discussione, esamineremo il semplice caso di moti circolari; in appendice B raccogliamo alcune utili formule relative a questo caso.

[5] Notiamo *en passant* che, nella storia della conoscenza, il concetto di espansione dell'universo viene prima concepito grazie alla relatività generale e solo poi corroborato da osservazioni. In altre parole, in questo caso il passaggio teorico, che richiede concetti che vanno oltre la fisica classica, anticipa quello sperimentale.

4.2 Idee sugli atomi

Primi modelli moderni È ben noto che, nel 1911, Rutherford mostrò che gli esperimenti, svolti da Geiger e Marsden, testimoniavano l'esistenza di un nucleo 100 mila volte più piccolo dell'atomo stesso. Ma non sempre si ricorda che, all'epoca, il modello planetario dell'atomo era già stato ipotizzato da almeno 10 anni: per esempio Perrin lo descrive con chiarezza sin dal 1901 [4]. Per convincersene basta leggere un breve estratto tratto da [5] e tradotto dal francese:

> *Ogni atomo sarà costituito, da una parte, da varie masse fortemente caricate di elettricità positiva, una sorta di soli* (Soleils) *positivi la cui carica sarà molto superiore a quella di un corpuscolo,*[6] *e dall'altra, da una moltitudine di corpuscoli, una sorta di piccoli pianeti* (planètes) *negativi, l'insieme delle quali masse gravitano sotto l'azione delle forze elettriche, e la carica negativa totale equivale esattamente alla carica positiva totale, in modo che l'atomo sia elettricamente neutro.*

Alla luce di questa considerazione, potrebbe risultare curioso il fatto che lo scopritore della particella che chiamiamo elettrone, J.J. Thomson, anziché accettare un modello che potrebbe sembrare tanto attraente, decise nel 1904 di proporne uno completamente diverso [6]. Ci riferiamo al modello dell'atomo che i libri chiamano "plum pudding", il nome di un dolce tipico inglese, nel quale possiamo pensare all'atomo come ad un panettone, mentre gli elettroni svolgono il ruolo dei canditi o dell'uvetta [5]. Addirittura, ci potremmo chiedere *perché lo propose.*

Una congettura che sembra ragionevole è la seguente; Thomson era consapevole del fatto che il modello planetario non può funzionare, siccome una carica in moto accelerato deve perdere energia. Si veda l'appendice C per qualche spiegazione in più; si ricordi che gli esperimenti di Hertz vennero svolti dal 1886 e quelli di Marconi sin dal 1894. Quindi, è plausibile che egli fosse convinto che gli elettroni di un atomo non si dovrebbero affatto muovere, siccome sappiamo che la materia è stabile - e dunque anche l'atomo lo deve essere. Thomson immaginò che gli elettroni siano alloggiati in una sorta di scaffalatura; in effetti, leggendo i suoi lavori, si riceve l'impressione che avesse in mente un piccolo cristallo, piuttosto che un "plum pudding".

Ma dopo i risultati di Rutherford, il modello planetario si impone alla considerazione generale, ed il problema della stabilità dell'atomo - ovvero del perché non emette continuamente radiazione elettromagnetica - si ripropone e diventa più urgente che mai.

L'atomo di Bohr Una bella risposta arriva nel 1913. Per capirla bene, partiamo da una importante informazione nota sin dall'ottocento. Siccome ogni sostanza ha specifiche

[6] Perrin, come Thomson, chiamava l'elettrone *corpuscolo*, per evidenziare che esso è un frammento di materia. La posizione non era del tutto scontata all'epoca: l'idea concorrente era che fosse una forma di radiazione tipo i raggi X. Vedi ancora [5].

proprietà chimiche, attribuibili agli atomi che la compongono, e siccome le varie sostanze esposte ad una fiamma emettono luce di frequenze diverse, l'ipotesi atomica ci conduce a credere che ogni tipo di atomo emetta un tipo di luce che lo caratterizza. A volte si arriva a dire, giocando sull'analogia tra frequenze sonore e luminose, che ogni atomo ha il suo suono (o musica), cosa che ricorda un po' le idee di Pitagora o di Keplero.

Nel caso dell'atomo di idrogeno (quello più semplice di tutti) le frequenze emesse f erano ben misurate. Esse possono essere riassunte da una formula relativamente semplice, proposta per la prima volta da Rydberg nel 1888, che riassumeva il lavoro di molti altri spettroscopisti,

$$f = 3.3 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{8}$$

dove $n < m$ sono due numeri interi positivi e dove l'unità Hz indica l'inverso di un secondo.[7]

Inoltre, grazie all'interpretazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico, era noto sin dal 1905 che la frequenza della radiazione è direttamente proporzionale alla energia trasportata dagli "atomi di luce", detti fotoni, secondo la formula $E_\gamma = h\,f$ (dove naturalmente h è la costante di Planck). Usando la Tab. 1, abbiamo

$$E_\gamma = 13.6\ \mathrm{eV}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{9}$$

Questo condusse Bohr a prefiggersi di spiegare le ragioni per cui l'atomo di idrogeno può emettere (o assorbire) proprio queste energie.

Eccoci arrivati a discutere il ruolo giocato dagli elettroni. Bohr postulò [7, 8] che essi girino intorno al nucleo ma solo in certe orbite obbligate, che chiamò "stati stazionari" (una sorta di binari predeterminati). Immaginando di avere a che fare con traiettorie circolari ed usando le formule in appendice B possiamo esprimere la loro energia E_e come segue,

$$E_e = -\frac{m_e\,e^4}{2\,L^2} \tag{10}$$

dove L è il momento angolare. Postulando dunque la condizione di quantizzazione

$$L = \hbar\,n \text{ dove } n = 1, 2, 3.... \tag{11}$$

ed infine - qui sta il trucco - richiedendo che l'emissione di radiazione avvenga quando gli elettroni *saltano* da una delle orbite obbligate all'altra, si riproduce la formula di Rydberg, a patto che la costante di fronte alla formula 9 valga esattamente $m_e e^4/(2\hbar^2)$. Come si può verificare, utilizzando la Tab. 1, l'aspettativa teorica di Bohr funziona. Il modello di Bohr, pur incompleto, è molto utile e conduce a varie altre previsioni, come quella delle

[7] La formula originaria fornisce infatti l'inverso della lunghezza d'onda $1/\ell = 109737\ \mathrm{cm}^{-1}(1/n^2 - 1/m^2)$, che è in relazione con la frequenza tramite l'equazione $c = \ell/T$, dove $T = 1/f$ è il periodo.

dimensioni dell'atomo di idrogeno. Nello stato di minima energia ($L = \hbar$ secondo Bohr) si trova proprio l'espressione data in Eq. 7; in effetti, quella espressione è nota come "raggio di Bohr", e viene spesso indicata col simbolo a_0.

Questa storia è ben nota, e l'abbiamo richiamata per evidenziare un aspetto:

> Bohr non fornisce nessuna ragione teorica perché gli elettroni non assumano <u>anche</u> il valore $L = 0$ del momento angolare.

Questo ci riporta a considerare il dubbio di Bentley in una forma piuttosto drammatica: se sostituissimo il valore $L = 0$ nella formula 10, l'energia dell'elettrone E_e prevista risulterebbe essere infinita.

La teoria quantistica In un certo senso, Thomson e Bohr adottano due approcci opposti per costruire il loro modello di atomo. Il primo suppone che qualcosa tenga fermi gli elettroni, il secondo postula che gli elettroni non possano mai star fermi - che è un'ipotesi addizionale a quella che essi occupino solo orbite con valori quantizzati di L. Heisenberg e Schrödinger supereranno le limitazioni di questi modelli.

Infatti, nel 1925 nasce una nuova concezione (o modello) dell'atomo. In breve, si ritiene che gli elettroni si dispongano in livelli con energie diverse, e che ce ne sia uno di energia minima, localizzato in una regione grande all'incirca come il raggio di Bohr, caratterizzato da una velocità quadratica diversa da zero, ma anche dall'avere un momento angolare nullo: $L = 0$.

Seguendo Heisenberg, pensiamo ad una situazione del genere–inconcepibile per la fisica classica–per mezzo di una opportuna ridefinizione delle quantità misurabili, che non richiede più di parlare di orbite degli elettroni, ma che si appoggia solo sull'idea che gli elettroni occupino certi "livelli energetici" (detti anche "orbitali"). Seguendo Schrödinger penseremo invece ad un elettrone disposto in un'onda stazionaria intorno al nucleo, proprio come suggerito da de Broglie; tipo l'aria in una canna d'organo, o come avviene ad una corda di violino. Le due risposte sono coerenti l'una con l'altra, i livelli energetici possono essere riprodotti, ma i calcoli matematici diventano molto più impegnativi.

Fortunatamente, come già discusso (vedi Eq. 6) per stimare il raggio dell'atomo è sufficiente applicare un argomento basato sul principio di indeterminazione, e la risposta va d'accordo con quella di Bohr. Ribadiamo infine per massima chiarezza che lo stato di minima energia ha momento angolare nullo ($L = 0$), una circostanza verificata sperimentalmente, pur con notevoli difficoltà.

4.3 Vita e morte di una stella

Abbandoniamo ora l'atomo e passiamo a ragionare di stelle ed in particolare del Sole. L'idea che il Sole sia una massa di materia incandescente, risultando così del tutto simile alle altre stelle, risale ad Anassagora di Clazomene, e anche noi partiremo da questo punto del ragionamento. All'interno del Sole e delle stelle, c'è la pressione gravitazionale che tenderebbe a schiacciare la struttura sotto il proprio peso, come correttamente puntualizzato da Bentley, ma esistono altre forze che riescono ad impedire, fino ad un certo punto, questo drammatico esito. Ne discuteremo qui di seguito.

Il Sole Per mettere a fuoco gli aspetti che ci interessano conviene tornare qualche passo indietro. Darwin, nella prima edizione dell'*Origine delle specie,* suggerì che i processi naturali tuttora in corso (geologici e biologici) non si possono essere sviluppati in meno di 300 milioni di anni. Questo provocò una risentita reazione di Lord Kelvin, che pensava di essere in grado di stimare l'energia a disposizione del Sole, assumendo che essa fosse dovuta all'energia apportata da meteore e comete che cadono sul Sole: in breve, che essa fosse di natura gravitazionale. Kelvin giungeva alla stima[8]

$$E_\odot \sim \frac{G_{\rm N} M_\odot^2}{R_\odot} = 3.8 \times 10^{48} \text{ erg} \tag{12}$$

a meno di un coefficiente numerico vicino ad uno, che non modifica l'essenza dell'argomento. Quindi dividendo questa energia per la potenza emessa dal Sole sotto forma di radiazione, ovvero

$$L_\odot = 3.8 \times 10^{33} \ \frac{\text{erg}}{\text{s}} \tag{13}$$

(che è misurata) Kelvin trovava un tempo caratteristico

$$T_\odot = \frac{E_\odot}{L_\odot} \sim 30 \text{ milioni di anni} \tag{14}$$

ovvero un numero molto inferiore a quello di Darwin. Come sappiamo l'argomento di Kelvin era sbagliato, in quanto esiste una sorgente di energia molto più grande, quella nucleare, alla quale in effetti attingono il Sole e le altre stelle.

Nuovamente, abbiamo richiamato una storia piuttosto nota (vedi p.e. [9] o anche [10]) al fine di evidenziare anche una seconda ipotesi, meno evidente ma per noi altrettanto interessante, che veniva data per assodata ai tempi di Kelvin. L'idea di massima era che il Sole, all'interno, fosse retto dalle stesse forze che danno supporto alla materia che conosciamo. In effetti, la densità media del Sole, ottenuta dividendo la sua massa per il

[8]Qui e nel seguito, col simbolo "∼" indichiamo una uguaglianza valida esattamente o eventualmente a meno di un fattore numerico non troppo lontano dall'unità.

suo volume, risulta simile a quella della materia intorno a noi: circa 1.4 g/cm^3. In termini di modello microscopico, l'idea era che gli atomi fossero in grado di reggere il peso del Sole; in parole povere, si pensava ad atomi indistruttibili.

Oggi sappiamo che neppure questa ipotesi è corretta; gli atomi si possono spezzare ed in effetti, all'interno del Sole, essi si scindono nelle loro componenti. Si forma un gas di elettroni e nuclei atomici ad altissima temperatura (il plasma solare) che si dispone, diradandosi verso l'esterno, in modo simile all'aria intorno al nostro pianeta.[9] È la pressione dovuta all'agitazione termica che fornisce stabilità meccanica al Sole. (In altre parole, le ragioni della stabilità meccanica del Sole e delle stelle non sono le stesse che valgono per la Terra e per i pianeti rocciosi, che si reggono grazie al fatto che gli atomi riescono ad opporre un po' di resistenza.)

Mentre da un lato si potrebbe obiettare 'beh, ma se le vere parti indistruttibili della materia non sono gli atomi della chimica, a noi cosa importa?', questo argomento ci porta a procedere nel ragionamento.

Le grandi stelle Stelle più grandi raggiungono densità centrali ancora maggiori, ed arrivano fino al punto di mettere in gioco una nuova componente della pressione, che resiste ancor meglio alla gravità ed è di natura quantistica: la cosiddetta pressione di degenerazione degli elettroni, causata dal fatto che ogni stato disponibile agli elettroni può essere occupato al massimo una sola volta (principio di Pauli). È un argomento interessantissimo ma vorremmo procedere ancora oltre.

L'astrofisica ci dice infatti che *gli interni delle stelle più grandi di 8 masse solari* possono raggiungere stati più estremi. In effetti, come venne mostrato da Chandrasekhar [11, 12], la pressione di gravità al centro della stella giunge al punto di diventar così grande da sovrastare anche la pressione di degenerazione degli elettroni, ed il centro della stella deve cedere al proprio peso, contraendosi. In queste condizioni, ci si aspetta che gli elettroni siano obbligati ad entrare nei nuclei atomici sfasciandoli (!) combinandosi poi coi protoni per formare neutroni.

[9] La differenza è che il Sole non ha superficie solida, ma solo un'atmosfera gassosa, che si dirada dal centro verso l'esterno con legge approssimativamente esponenziale (con scala di decrescita pari a circa 1/10 del raggio solare). La densità nel centro del Sole, determinata dai modelli teorici a noi disponibili e in parte verificata grazie a varie osservazioni raggiunge circa 150 g/cm^3. Si noterà che l'ipotesi di un Sole gassoso ripropone il dubbio di Bentley, in altre parole si potrebbe essere tentati di avanzare una speculazione di natura astrofisica, e chiedersi come mai la materia non si concentri fortemente al centro delle stelle. Da questo punto di vista, c'è una curiosa proposta teorica di Gamow e Landau che alcune stelle, nel loro centro, potrebbero in linea di principio contenere materia con densità altissima; al limite, simile alla densità dei nuclei atomici. Questa proposta viene oggi considerata non convincente o sbagliata, tranne forse in casi estremi o eccezionali. Chi prova a portarla avanti (p.e., chi si interessa degli speculativi oggetti di Thorne-Żytkov) deve tipicamente appellarsi a qualche meccanismo per evitare che la materia stellare venga inghiottita rapidamente dall'ipotetico densissimo centro della stella.

Questo causa una riduzione delle dimensioni della parte centrale della stella, nella proporzione che intercorre tra atomi e nuclei atomici, ovvero,

$$\text{circa 100 mila volte} \tag{15}$$

come sappiamo dagli studi di Rutherford. In questo modo, si formano oggetti con una densità spaventosa nel loro centro, pari al cubo di questo valore: circa 10^{15} volte l'acqua![10] Essi sono detti *stelle di neutroni* e in alcuni casi le riusciamo ad osservare come pulsar. Il loro raggio, predetto dalla teoria, è anche misurato, pur se con metodi indiretti, e vale poco più di 10 km.

Infine, stando alla fisica nota, nel caso in cui la massa della stella di neutroni sia (o diventi) troppo grande, si procede ancora oltre. La gravità celebra il suo trionfo, in quanto si forma inevitabilmente un *buco nero*, vedi [13] e [14]. (Si pensa che questo avvenga per stelle di neutroni poco più grandi di 2 masse solari, o forse qualcosa di più nel caso di stati rotazionali estremi; in ogni modo, le stelle di neutroni più grandi osservate hanno una massa appena più grande di 2 masse solari.)

Per un oggetto del genere non valgono le considerazioni della geometria euclidea, alla base della teoria di Newton; ma possiamo comunque associare ad un buco nero una ben precisa scala di lunghezza, $3-4$ volte più piccola delle dimensioni della stella di neutroni, quella già mostrata in Eq. 5. Questa lunghezza può essere pensata come la risposta alla domanda posta da Bentley data dalla relatività generale di Einstein, riguardo i destini ultimi delle stelle di massa più grande o di oggetti ancora più pesanti che capitino nella stessa regione di spazio. (Vedi anche l'appendice A).

Sottolineiamo che la precedente conclusione *dipende in modo essenziale dalla massa dell'oggetto stellare;* mentre è sempre possibile pensare alle dimensioni minime indicate dalla relatività generale per ogni oggetto dotato di massa, Eq. 5, l'astrofisica ci porta a ritenere che quando le stelle non sono abbastanza grandi, esse non raggiungeranno mai lo stadio di buco nero, neppure quando avranno esaurito il loro combustibile nucleare (a meno che non si coalizzino tra di loro; o non incorporino successivamente altra massa; ecc).

5 Sommario e considerazioni conclusive

Nella scuola superiore - in modo particolare nei licei - si desidera offrire punti di ingresso alla fisica moderna; abbiamo provato a esplorarne di nuovi prendendo spunto da considerazioni di <u>filosofia naturale</u> che vennero proposte a Newton dal suo contemporaneo Richard Bentley. Abbiamo visto come la fisica moderna consolidi l'idea speculativa che esista una 'distanza minima', tanto in astrofisica quanto nella fisica degli oggetti più piccoli. In effetti, la relatività di Einstein associa una lunghezza minima ad ogni oggetto dotato di massa, e la

[10] Se il Sole subisse un trattamento del genere, il suo raggio sarebbe di soli 7 km.

meccanica quantistica invece ci porta a considerare un atomo con dimensioni ben precise, definite grazie alla costante di Planck.

Per apprezzare appieno questi sviluppi, si deve prender atto dell'esistenza di nuove costanti della fisica, ignote ai tempi di Newton. Abbiamo richiamato a grandi linee la storia di come siamo pervenuti a queste conclusioni, illustrando le principali ragioni che ci hanno portato ad abbandonare precedenti teorie e ad abbracciarne di nuove. Abbiamo anche illustrato alcuni importanti aspetti della fisica stellare, ricordando che lo stato estremo, quello di buco nero non viene raggiunto da tutte le stelle, ma solo da quelle di massa più grande, immaginando che le stelle siano isolate una dall'altra.

Seguire il percorso delle idee adottando un punto di vista non del tutto convenzionale può essere stimolante e divertente, ma forse qualcuno potrebbe sentirsi turbato o sconcertato nel finire tanto lontano, partendo da dei dubbi di un pensatore poco noto di tanti anni fa. Naturalmente, l'obiettivo non dovrebbe essere quello di rileggere la storia col senno di poi; tutt'al più, può essere divertente recuperare informazioni seguendo un filo logico ben selezionato, per provare a ricostruire un senso del lungo percorso fatto.

Inoltre, considerazioni del genere ci possono aiutare a non lasciarci cullare da false certezze, e a capire che il carattere definitivo che ci piacerebbe poter attribuire alle conoscenze correnti sia in qualche misura illusorio. Per questa ragione vorremmo mostrare che, se si continua a ragionare sulle caratteristiche delle forze elettrostatiche e gravitazionali, si arriva velocemente a confrontarsi con le colonne d'Ercole della scienza odierna, e a capire che la conoscenza di cui disponiamo sia davvero affidabile solo in un ambito ristretto.

Per illustrare il punto, immaginiamo dei grumi di materia che possiedano la stessa carica dell'elettrone ma molto più pesanti, tali che la repulsione elettrostatica tra due di essi sia compensata esattamente dalla loro attrazione gravitazionale, ovvero con la seguente massa:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{G_{\rm N}\, m_{\rm S}^2}{r^2} \Rightarrow m_{\rm S} = \frac{e}{\sqrt{G_{\rm N}}} \tag{16}$$

Se esistessero delle masse puntiformi appena più pesanti di questo valore, la repulsione elettrostatica sarebbe vinta ed esse sarebbero inesorabilmente attratte tra di loro. A questo valore limite della massa, detta massa di Stoney[11] [15], possiamo associare una energia secondo la formula di Einstein, $E_{\rm S} = m_{\rm S} c^2$, e ad $E_{\rm S}$ associamo anche una temperatura $E_{\rm S} = k_{\rm B}\, T_{\rm S}$ per mezzo della costante di Boltzmann (vedi Tab. 1). Una tale temperatura è enormemente più grande di quelle che abbiamo esplorato, e al momento non abbiamo la minima idea se sia possibile arrivare tanto in alto in laboratorio. Piuttosto, sembrerebbe possibile pensare che si raggiungano temperature altrettanto o ancora più alte nei primi istanti dell'universo primordiale; ma le nostre attuali teorie scientifiche non ci consentono proprio di sapere cosa succeda quando si arriva a questo punto. Eccoci insomma ai limiti della scienza nota.

[11] È lo scienziato inglese che per primo la considerò ed è la stessa persona che diede il nome all'elettrone.

Infine, vorrei sottolineare che spesso si tende a celebrare il genio solitario di Newton, ma non si dovrebbe arrivare fino al punto di dimenticare delle vivaci ed interessanti discussioni che si svolgevano ai suoi tempi o precedentemente. Ce ne da ampia testimonianza lo stesso Newton, p.e. nel seguente passo dello *Scholium* che si riferisce proprio alla legge dell'inverso del quadrato della distanza:

> *Secondo Macrobio, Pitagora [...] applicò ai cieli le proporzioni trovate attraverso questi esperimenti*[12]*, e da questo apprese le armonie delle sfere. E così, confrontando quei pesi con i pesi dei pianeti e gli intervalli nel suono con gli intervalli delle sfere e le lunghezze delle corde vibranti con le distanze dei pianeti [misurate] dal centro, capì per mezzo delle celesti armonie che i pesi dei pianeti rispetto al Sole [...] sono inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze.*

Il passo originale (in latino, naturalmente) è stato evidenziato da P. Casini [16] e inserito in un ampio contesto nel libro di L. Russo [17]. Anche se simili riferimenti erano quasi dei *topos* all'epoca di Newton o semplici esagerazioni, come argomentato in [17], trovo che valgano a testimonianza di quanto sia ricca, sfaccettata e preziosa la tradizione del pensiero filosofico e scientifico, e quanto possa essere divertente relazionarsi con essa.

Ringraziamenti Ringrazio Angelo Angeletti, Rita Serafini, Giuseppe Scarpino, Tommaso Scozzafava e Giorgio Torrieri per una attenta lettura e preziosi commenti. Questo lavoro è stato realizzato anche grazie alla borsa di ricerca numero 2017W4HA7S "NAT-NET: Neutrino and Astroparticle Theory Network" nell'ambito del programma PRIN 2017, finanziata dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR).

A Appendice: Dettagli tecnici

I cenni di fisica moderna per le scuole superiori includono concetti base di relatività e di meccanica quantistica. In questa appendice raccogliamo alcuni spunti specifici basati sulla familiarità con l'equazione $E = Mc^2$ e col celebrato principio di indeterminazione di Heisenberg relativo alla fisica del micromondo. Discutiamo poi meglio l'effetto del momento angolare.

Ancora sulle 'dimensioni' del buco nero Consideriamo una stella di massa M che si contrae fino al punto in cui l'energia potenziale, data dalla teoria di Newton e presa in valore assoluto, diventi paragonabile alla energia a riposo della stella stimata secondo la celebre formula di Einstein: $E = Mc^2$. Se stimiamo, a meno di un coefficiente numerico vicino all'unità, l'energia potenziale della stella come $-G_{\rm N}M^2/r$ avremo la condizione $Mc^2 \sim$

[12] NdT: Si riferisce ai celebri esperimenti sui suoni emessi da corde di varie lunghezze e da campane di metallo, che aprirono la strada alla modellizzazione matematica delle vibrazioni sonore.

$G_{\rm N} M^2/r$ (vedi nota a pie' di pagina numero 8). Questa equazione conduce a considerare una dimensione minima pari a $r \sim G_{\rm N} M/c^2$. È ragionevole che, giunti ad una contrazione tanto estrema della stella, non sia più lecito applicare la teoria della gravità di Newton, e diventi necessario ricorrere alla teoria della relatività generale. In effetti, questa espressione coincide (a meno di un fattore due) con la lunghezza definita in Eq. 5.

Sul principio di Heisenberg Come è ben noto, questo principio[13] prescrive che l'accuratezza della determinazione del momento δp e quella della posizione δr siano inversamente proporzionali, p.e., nel caso di moti ad una dimensione nella direzione dell'asse delle x

$$\delta p_x \, \delta x \geq \hbar/2 \tag{17}$$

La versione usata nel testo si basa sulle stime $\delta p \sim p$ e $\delta r \sim r$, ovvero l'incertezza del valore viene considerata dello stesso ordine del valore assunto, si ignora il fattore $1/2$ e si sostituisce la diseguaglianza con una uguaglianza approssimata. In questo modo, non si pretende di determinare il coefficiente numerico, ma solo di giungere ad una stima indicativa.

Momento angolare Nel moto di un corpo di massa m intorno ad un altro fisso, la velocità ha due componenti: una lungo l'asse che li congiunge $v_\parallel$ l'altra in direzione ortogonale $v_\perp$. Il momento angolare vale

$$L = r \, p_\perp \text{ con } p_\perp = m \, v_\perp$$

in quanto la componente lungo la congiungente non conta. Siccome L è costante, $v_\perp$ aumenta in modo inversamente proporzionale ad r. Possiamo esprimere così l'energia cinetica: $m \, v^2/2 = m \, v_\parallel^2/2 + m \, v_\perp^2/2$, ed il secondo termine può essere riscritto come $m \, v_\perp^2/2 = L^2/(2mr^2)$. Esso dipende solo da r e può essere pensato come un termine addizionale all'energia del moto uni-dimensionale, anche se a ben considerare, e come mostra l'argomento formale appena esposto, esso è connaturato all'energia cinetica in tre dimensioni spaziali. Il suo effetto è quello di allontanare il corpo dal centro (quando il momento angolare non si annulla) ed in effetti, questo termine viene anche detto 'potenziale centrifugo' o a volte 'potenziale efficace'.

B Appendice: Formule utili per i moti circolari

La velocità v del corpo (con massa m) che si muove di moto circolare è legata alla sua velocità angolare ω e al valore assoluto della sua accelerazione a dalle ben note espressioni

$$\omega = \frac{v}{r} \ \ , \ a = \frac{v^2}{r} \tag{18}$$

[13] In realtà all'interno della cosiddetta meccanica quantistica questo 'principio' è un teorema.

naturalmente, l'accelerazione è diretta verso il centro attrattivo. In questo caso, il valore assoluto del momento angolare è dato da $L = r\,p$. Per ogni valore di r, il valore di v è fissato dalla specifica forza considerata, in quanto $F = ma$. Siccome le forze di Newton e di Coulomb variano come $1/r^2$, avremo, con le notazioni di Eq. 2

$$v^2 = \frac{\kappa}{m\,r},\ \omega^2 = \frac{\kappa}{m\,r^3},\ a = \frac{\kappa}{m\,r^2} \text{ e } L^2 = \kappa\, m\, r \tag{19}$$

La seconda espressione è naturalmente coerente con la terza legge di Keplero. Si trova per l'energia

$$E = \frac{m\ v^2}{2} - \frac{\kappa}{r} = -\frac{\kappa}{2\,r} = -\frac{m\,\kappa^2}{2\,L^2} \tag{20}$$

Ripetiamo che m è la massa del corpo che orbita, l'altro in prima approssimazione resta fermo.

C Appendice: I problemi del modello planetario

Mostriamo che il modello planetario dell'atomo, concepito secondo le idee classiche, è intimamente incoerente. Per farlo, usiamo una espressione che era nota ai tempi di Thomson, detta formula di Larmor [18]. Essa fornisce la potenza P irradiata da una particella con carica elettrica e, assunto che la sua accelerazione valga a:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2\,a^2}{c^3} \tag{21}$$

Usando i risultati della precedente appendice per stimare l'accelerazione di un elettrone in un atomo di idrogeno, troviamo $a = e^2/(r^2\,m_e)$, siccome $\kappa = e^2$. Il tempo caratteristico con cui un elettrone di energia $E_e = -e^2/(2r)$ irradia è dato da $t_e = |E_e|/P$. Lo possiamo quantificare come segue

$$t_e = \frac{3}{4}\left(\frac{r}{r_e}\right)^2\ \frac{r}{c} \tag{22}$$

dove abbiamo introdotto per comodità di presentazione il 'raggio classico dell'elettrone' $r_e = e^2/(m_e c^2)$ che vale circa $r_e \sim 2.8 \times 10^{-13}$ cm.

A questo punto, ci serve conoscere quali siano le dimensioni dell'atomo. Basandoci p.e. sulla stima di 'un milionesimo di mm', ottenuta nel 1865 per le molecole di aria [20], possiamo supporre che gli elettroni siano posti inizialmente a una distanza di circa 10^{-7} cm dal nucleo dell'atomo. Riscriviamo la stima del tempo di emissione evidenziando il valore prescelto di r

$$t_e \sim \left(\frac{r}{10^{-7}\text{ cm}}\right)^3\ 3\times 10^{-7}\text{ s} \tag{23}$$

cosa che ci porta a credere che gli elettroni perdano energia nell'arco di un milionesimo di secondo. (Usando i valori moderni per il raggio dell'atomo i tempi si accorcerebbero ancora). Per questo, il modello planetario viene considerato incompatibile con l'idea di un atomo stabile.[14]

D Appendice: Verifiche e approfondimenti

1. Il sistema gaussiano include la costante di Coulomb $k_\mathsf{C} = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ nella definizione della carica elettrostatica. Usando i dati nel sistema internazionale (SI): $e_\mathsf{SI} = 1.602176634 \times 10^{-19}$ C (esatta) e $\varepsilon_0 = 8.8541878128(13)\times 10^{-12}$ C^2/(J m) (misura CODATA) calcolare la carica dell'elettrone nel sistema gaussiano e_G data in Tab. 1.
2. Mostrare che sarebbe possibile procedere in modo analogo al sistema gaussiano ed includere la costante di Newton G_N nella definizione della massa gravitazionale.
3. Controllare le unità di misura e tutti i valori numerici delle quantità sopra discusse, eventualmente esprimendo valori e formule con un diverso sistema.
4. Considerando moti circolari, confrontare l'accelerazione della Terra dovuta al Sole e quella di un elettrone atomico intorno al nucleo. Confrontare le due velocità tra di loro e con la velocità della luce.
5. Controllare la correttezza della speculazione di Laplace (1798); se avessimo una stella molto più grande del sole, con una densità 4 volte maggiore ed un raggio di 250 volte più grande, la luce non potrebbe più fuggire della sua superficie.
6. Supponiamo con i fisici dell'ottocento che con l'apporto di nuova materia il raggio del Sole aumenti e la densità resti costante. Mostrare che l'energia aumenta con la quinta potenza del raggio del Sole.
7. Misurando le luminosità e temperature superficiali delle stelle, assieme a considerazioni di astrofisica, possiamo stimare le loro masse e i loro raggi. Il lettore interessato reperirà questi dati per calcolare le loro densità medie.
8. In che modo le stelle più piccole riescono ad evitare di trasformarsi in un buco nero?
9. Calcolare il valore numerico della massa di Stoney e confrontarla con la più nota massa di Planck, che si può provare a definire da soli usando le costanti fondamentali G_N, c e $\hbar$, e che si può poi verificare con una breve ricerca.
10. Provare a ricostruire l'argomento di Archimede sulla disposizione *sferica* degli oceani e documentarsi.
11. È interessante approfondire la descrizione del problema di due corpi con forza centrale siccome: 1) esso si riduce al problema di un singolo corpo con massa opportunamente definita; 2) il momento angolare $\vec{L}$ non cambia e il moto di svolge in un piano. Si veda l'appendice A e p.e. [21].
12. Come cambierebbe nel tempo il raggio dell'orbita di un elettrone per gli effetti descritti in appendice C?
13. Perché l'emissione di onde gravitazionali di solito è molto meno efficiente di quella di onde elettromagnetiche? Per chi fosse interessato a saperne di più, o volesse provare a stimare (come fatto in appendice C) il tempo in cui un sistema di due corpi celesti perde energia gravitazionale, segnalo un utile lavoro introduttivo [22].

Riferimenti bibliografici

[1] The Newton Project, sito consultabile presso `http://www.newtonproject.ox.ac.uk/`

[14] Il lettore che volesse conoscere le idee di Larmor sulla teoria atomica è rimandato al suo interessante libro *Etere e materia* [19], ma è avvertito: è una lettura impegnativa sia dal punto di vista tecnico che da quello concettuale.

[2] William C. Saslaw, *The distribution of Galaxies,* Cambridge U. Press (2000) consultabile presso https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept02/Saslaw/Saslaw_contents.html

[3] Karl Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie,* Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physik, und Technik, 189 (1916)

[4] Jean Perrin, *Les hypothèses moléculaires,* Revue Scientifique, 4a serie, Vol. 15 (1901).
Le principali opere di Perrin inclusa questa sono state raccolte in rete alla pagina Wikisource: https://fr.wikisource.org/wiki/Auteur:Jean_Perrin.

[5] Il sito scienzapertutti offre un percorso divulgativo su *Le radici dell'idea moderna di atomo*: https://scienzapertutti.infn.it/alle-radici-dell-idea-moderna-di-atomo

[6] Joseph J. Thomson, *On the Structure of the Atom,* Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, Vol. 7, No. 39, 237-265 (1904)

[7] Niels Bohr, *On the Theory of the Decrease of Velocity of Moving Electrified Particles on passing through Matter,* Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, Vol. 25, No. 145, 10-31 (1913)

[8] Niels Bohr, *On the Constitution of Atoms and Molecules,* Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, Vol. 26, No. 151, 1-25 (1913)

[9] Il sito scienzapertutti offre un percorso divulgativo su *Come funziona il Sole*: https://scienzapertutti.infn.it/percorsi-divulgativi-list/815-come-funziona-il-Sole

[10] Art Stinner, Jürgen Teichmann, *Lord Kelvin and the Age-of-the-Earth Debate: A Dramatization,* Science & Education, Vol. 12, 213-228 (2003)

[11] Subrahmanyan Chandrasekhar, *On Stars, Their Evolution and Their Stability,* rassegna presentata nell'occasione della lezione per il conferimento del Premio Nobel (1983)
https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/chandrasekhar-lecture.pdf

[12] Vedi anche la pagina di Wikipedia sul limite di Chandrasekhar, https://en.wikipedia.org/wiki/Chandrasekhar_limit

[13] J. Robert Oppenheimer, Hartland S. Snyder, *On Continued gravitational contraction,* Phys. Rev. **56** 455-459 (1939)

[14] Il sito scienzapertutti offre un percorso divulgativo sui *Buchi neri*: https://scienzapertutti.infn.it/chi-ha-paura-dei-buchi-neri

[15] George J. Stoney, *On the Physical Units of Nature,* Proceedings of the British Association for the Advancement of Science (1874)

[16] Paolo Casini, *Newton: The classical Scholia,* Hist. Sci. XXII (1984)

[17] Lucio Russo, *La rivoluzione dimenticata,* Feltrinelli (2013)

[18] Joseph Larmor, *LXIII. On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions,* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Series 5, Vol. 44, Issue 271, 503-512 (1897)

[19] Joseph Larmor, *Aether and Matter: A Development of the Dynamical Relations of the Aether to Material Systems On the Basis of the Atomic Constitution of Matter, ...*, Cambridge U. Press (1900)

[20] Johann Loschmidt, *On the Size of the Air Molecules*, traduzione dal tedesco disponibile in rete presso https://loschmidt.chemi.muni.cz/biography/pdf/discovery.pdf, Proceedings of the Academy of Science of Vienna Vol. 52, 395-413 (1865)

[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Classical_central-force_problem
e anche https://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem

[22] *Quadrupole Gravitational Radiation,*
https://theoretical-physics-digest.fandom.com/wiki/Quadrupole_Gravitational_Radiation

Indice

From Bentley's paradox to modern physics

In 1692, Richard Bentley expressed to Newton his fear that the attractive forces, inversely proportional to the square of the distance, could cause a sort of collapse of matter at a point. Since it is not uncommon to come across such doubts at school, we propose to take advantage of them to introduce certain topics in modern physics. We will talk of that in connection to gravitational forces that regulate stellar physics, and also to the electrostatic forces that cause the attraction of electrons and nuclei in atoms. We will examine the reasons to introducing certain minimum distances, associated respectively with the scale of stellar black holes and the radius of the atom, which in a sense answer Bentley's issue. We will retrace the history of these scientific acquisitions, pointing out the formal analogies and connections, but also the various differences between microphysics and stellar physics, proposing a few points of access to new topics and speculations and a some exercises as well.

Per la versione pubblicata, si veda
https://www.aif.it/indice-rivista/anno-liv-n-1-gennaio-marzo-2021/
"La fisica nella scuola", anno LIV – n.1 – gennaio/marzo 2021