

6

Introduzione alla relatività

Questo capitolo è un'introduzione alla cosiddetta relatività "ristretta" (o "speciale"). La relatività ristretta descrive l'influenza del moto relativo degli osservatori sulle loro misure di lunghezza e tempo, estendendo e generalizzando il principio classico della relatività galileiana, incompleto perché non adatto, ad esempio, a descrivere i fenomeni elettromagnetici. Essa pone le basi di una nuova visione della fisica, in cui spazio e tempo sono unificati in un continuo quadridimensionale. Questa nuova concezione dello spazio-tempo costituisce il fondamento della più complessa teoria della relatività "generale", essenzialmente una teoria della gravitazione, basata sul principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

Seguiremo come filo conduttore l'evoluzione storica dei concetti della fisica classica verso la loro moderna riformulazione relativistica, cercando di dare un'idea di quale straordinaria rivoluzione concettuale fu rappresentata dall'avvento della teoria di Einstein.

Dopo l'enunciazione dei principi della relatività ristretta, mostreremo in dettaglio come da queste nuove idee fondamentali si ricavano le equazioni di trasformazione che, dato un *qualsiasi* fenomeno fisico, mettono tra loro in relazione le diverse prospettive con cui tale fenomeno è percepito da osservatori in moto.

Nell'illustrare le principali conseguenze della teoria, metteremo in luce il suo ruolo nella soluzione dei gravi problemi concettuali che provocarono la crisi della fisica classica alla fine del diciannovesimo secolo e quello, attuale, di fondamento indiscusso della fisica contemporanea. Ci soffermeremo inoltre su quegli aspetti che, discostandosi in maniera significativa dalle previsioni della meccanica classica e sfuggendo alla possibilità di un nostro personale riscontro nella vita quotidiana, costituiscono una sorta di paradosso per il nostro intuito.

Cominciamo col richiamare i principi fondamentali della meccanica classica, già esposti nel capitolo 4.

6.1. I principi della meccanica classica

Il **primo principio** della dinamica (principio d'inerzia) postula l'esistenza dei cosiddetti *sistemi di riferimento inerziali*, nei quali un punto materiale abbastanza lontano da tutti gli altri corpi da non risentire di alcuna influenza esterna o rimane in quiete o si muove di moto rettilineo e uniforme. Viene dunque istituita una dif-

ferenza sostanziale tra due categorie di sistemi di riferimento, quelli inerziali e quelli non inerziali.

La relatività ristretta eredita dalla meccanica classica il concetto di sistema di riferimento inerziale come luogo “privilegiato” in cui osservare i fenomeni fisici. In un riferimento inerziale, da un lato, la misura dell’accelerazione di un corpo è indicazione della presenza di forze “reali” (cioè dovute all’interazione con altri corpi) agenti su di esso. Viceversa, un osservatore può in linea di principio stabilire, misurando l’accelerazione di un corpo su cui non agiscano forze reali, se il riferimento in cui egli si trova è o non è inerziale: se il corpo possiede un’accelerazione, egli ne attribuirà la causa all’effetto delle cosiddette forze “apparenti” (o “fittizie”), provocate dal moto *accelerato* del sistema di riferimento.

Il **secondo principio** della dinamica pone in una relazione esplicita di proporzionalità l’accelerazione di un corpo e la forza totale \vec{F} su di esso agente. In modo equivalente, esso stabilisce che la forza totale è uguale alla derivata temporale della quantità di moto del corpo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}. \quad (6.1)$$

Vedremo in seguito che la traduzione di questa espressione nel linguaggio della meccanica relativistica porterà ad una relazione funzionale tra accelerazione e forza *diversa* da quella di semplice proporzionalità, facendo comparire una dipendenza dalla velocità del corpo.

Il **terzo principio** della meccanica classica istituisce un’ulteriore differenziazione tra forze reali e forze fittizie: una forza reale, dovuta cioè all’interazione esercitata da un corpo su un altro corpo, ha sempre associata una corrispondente forza di reazione vettorialmente opposta e con la stessa retta d’azione. Azione e reazione sono considerate fasi esattamente *simultanee* del processo d’interazione tra i due corpi.

Si pensi, ad esempio, all’attrazione (o repulsione) coulombiana tra due cariche elettriche di segno opposto (o dello stesso segno). Il terzo principio ci dice che, qualsiasi sia la distanza che separa le due cariche, sia pure essa molto grande, ciascuna di esse risente *istantaneamente* della forza esercitata dall’altra carica e *istantaneamente* risponde con una forza di uguale intensità.

La “comunicazione” istantanea di azione e reazione tra due corpi distanti che interagiscono diventa un concetto incompatibile con la fisica moderna, secondo la quale, come si vedrà, nessun segnale (includendo nella categoria dei segnali l’interazione esercitata da un corpo su un altro) può propagarsi con velocità infinita. Anche la formulazione del terzo principio dovrà quindi essere rivista nella trattazione della meccanica relativistica.

6.2. La relatività galileiana e il problema dell'etere

La nozione di *relatività* del moto fu introdotta da Galileo nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (1632): esperimenti uguali compiuti da osservatori in moto traslatorio rettilineo ed uniforme l'uno rispetto l'altro danno uguali risultati; non è quindi possibile dedurre dai risultati degli esperimenti quale dei due osservatori è in moto e quale è fermo.

Divenuto uno dei fondamenti della meccanica classica, questo *principio di relatività* viene oggi enunciato in una forma più generale in termini di riferimenti inerziali: le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali; nessun esperimento meccanico eseguito all'interno di un determinato sistema di riferimento inerziale potrà mai mettere in evidenza il moto di questo rispetto ad altri riferimenti inerziali.

Analizziamo più in dettaglio il significato del principio di relatività. Se due osservatori inerziali in moto l'uno rispetto all'altro misurano dalle loro distinte posizioni i parametri del moto di un corpo (essenzialmente posizione, velocità e orientazione del corpo in funzione del tempo), essi in generale, possedendo una velocità relativa non nulla, non troveranno gli stessi risultati. Ma quando essi cercheranno di dedurre dai dati cinematici raccolti nel proprio particolare sistema di riferimento qual è la legge fondamentale che regola il moto del corpo (ad esempio, quale tipo di forza ne causa l'accelerazione osservata e come questa forza dipende da posizione, velocità e orientazione del corpo), entrambi dovranno giungere alle stesse conclusioni. Anticipando il linguaggio proprio della teoria della relatività, possiamo dire che le quantità che parametrizzano il moto di un corpo si trasformano in modo “*covariante*” nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, cioè che esse, pur variando singolarmente, nel variare mantengono immutate certe loro relazioni reciproche, determinate solamente dalle leggi fisiche fondamentali. Delle stesse leggi fisiche, che devono mantenere inalterata la dipendenza funzionale dalle variabili del moto indipendentemente dalla prospettiva di osservazione da cui vengono studiate, si dice che esse sono “*covarianti*” per cambiamento del sistema di riferimento inerziale.

Il principio di relatività ha quindi come prima accezione quella della covarianza delle leggi della meccanica. Ma c'è un altro modo di intenderlo, che ne mette in risalto le implicazioni riguardanti la natura dei sistemi di riferimento e quindi dello spazio-tempo: tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti (anzi, indistinguibili) come luoghi d'osservazione del moto dei corpi. Non esiste perciò un sistema di riferimento inerziale considerabile come riferimento assoluto, rispetto al quale tutti gli altri siano da ritenere in *moto assoluto*. Al tempo di Galileo, la negazione del concetto di moto assoluto aveva la portata di una rivoluzione: l'idea era in aperto contrasto con tutte le concezioni cosmologiche allora esistenti, particolarmente con quelle che, per un pregiudizio ideologico ereditato da Aristotele, continuavano ad identificare la terra con il centro immobile dell'universo.

La relatività galileiana riguarda, in verità, il solo moto dei corpi, cioè un sottoinsieme dei fenomeni naturali. E' quindi spontaneo domandarsi: il principio di relatività è una legge strettamente connessa ai soli fenomeni meccanici o una legge di natura valida per tutti i fenomeni e, in particolare, anche per quelli elettromagnetici?

Per rispondere a questa domanda prenderemo in considerazione semplici esempi particolari, in rappresentazione prima delle leggi della meccanica e poi di quelle dell'elettromagnetismo. Nel primo caso verificheremo esplicitamente ciò che ci aspettiamo, cioè che le leggi della meccanica sono invarianti nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Nel secondo caso assumeremo per valida una delle principali leggi dell'elettromagnetismo e vedremo come questa si comporta quando ad essa si applicano le regole classiche di trasformazione delle coordinate spazio-temporali.

Cominciamo col fissare le idee sulla forma delle trasformazioni tra due sistemi

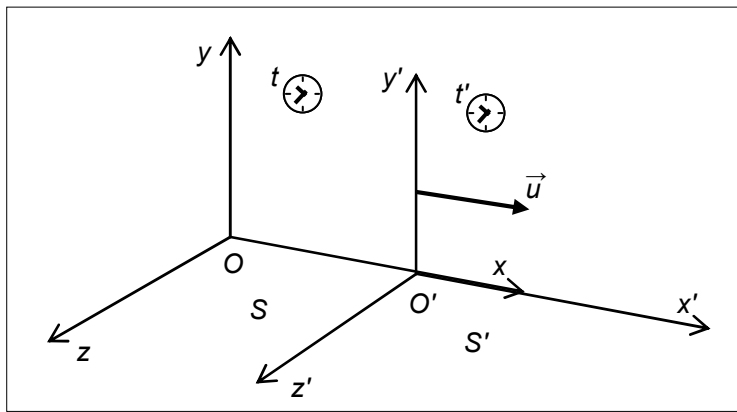


Figura 6.1 - Rappresentazione dei sistemi di riferimento S e S' .

di riferimento inerziali in meccanica classica. Consideriamo per semplicità la situazione in cui i due sistemi di riferimento S e S' , con origini in O e O' , hanno gli assi x e x' sovrapposti e gli altri assi a due a due paralleli (figura 6.1). Sia \vec{u} la velocità, costante e diretta come l'asse x , con cui S' trasla rispetto a S . Supponiamo che gli orologi dei due osservatori siano sin-

cronizzati in modo che entrambi misurino tempo zero nell'istante in cui le origini dei due sistemi di riferimento coincidono:

$$t = t' = 0 \Leftrightarrow O = O'. \quad (6.2)$$

Sia dato un generico evento che si verifichi nel punto P dello spazio (ad esempio, il passaggio di un oggetto per quel punto). Ciascuno dei due osservatori identifica l'evento con una quaterna di coordinate spazio-temporali: S con (x, y, z, t) , S' con (x', y', z', t') .

La trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento inerziale "fisso" S a quello "mobile" S' , che trasla rispetto a S con moto rettilineo uniforme, è, in fisica classica, descritto dalle cosiddette trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - u t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (6.3)$$

Queste relazioni, apparentemente ricavabili dalla semplice identità geometrica che esprime il crescere della distanza tra i piani yz e $y'z'$ linearmente col tempo (figura 6.1), sottendono in verità un'ipotesi di fondo sulle proprietà dello spaziotempo: nella fisica classica le misure di lunghezza spaziale e di intervallo temporale sono quantità assolute, indipendenti dal sistema di riferimento, cioè dal moto dell'osservatore che compie le misure: se in S si osservano due eventi successivi separati da una distanza spaziale Δx e da un intervallo temporale Δt , si suppone che anche in S' i due eventi vengano rilevati a distanza Δx l'uno dall'altro e con un ritardo temporale Δt . E' proprio su questa visione dello spazio e del tempo, consistente con il nostro senso comune della realtà, che la teoria della relatività di Einstein avrà le sue più radicali (e suggestive) ripercussioni.

Dalle trasformazioni di coordinate (6.3) si ricavano, derivando una e due volte rispetto al tempo ogni membro delle prime tre equazioni, le corrispondenti trasformazioni della velocità e dell'accelerazione (compiamo questa operazione assumendo, di nuovo, che l'incremento temporale infinitesimo Δt sia lo stesso nei due sistemi di riferimento; non sarà così nella relatività ristretta):

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad (6.4)$$

e

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad (6.5)$$

Nel caso più generale in cui la velocità \vec{u} ha componenti lungo tutti e tre gli assi, la trasformazione delle velocità, scritta in forma vettoriale, diventa

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}. \quad (6.6)$$

Vogliamo dunque verificare l'invarianza delle leggi della meccanica rispetto alle trasformazioni di Galileo. Come esempio tipico della meccanica classica, consideriamo la forza di attrazione gravitazionale tra due masse m_1 e m_2 che si trovino ferme nel sistema di riferimento S , occupando le posizioni P_1 e P_2 di coordinate

(x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) . L'espressione della forza attrattiva esercitata su m_2 da m_1 è, misurata in S ,

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (6.7)$$

essendo $\vec{r}_{12} = P_2 - P_1$ il vettore diretto da m_1 a m_2 , di coordinate $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, e r_{12} il suo modulo. E' facile rendersi conto che l'espressione di questa forza in S' è la stessa. Le masse, considerate proprietà intrinseche degli oggetti, sono per definizione invarianti per cambiamento del sistema di riferimento. Viste da S' , esse hanno, secondo le equazioni (6.3), coordinate spaziali $(x_1 - ut, y_1, z_1)$ e $(x_2 - ut, y_2, z_2)$, cioè non sono ferme come in S , ma traslano di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x' con velocità $-\vec{u}$. Tuttavia il vettore \vec{r}'_{12} che le congiunge ha coordinate

$$\begin{aligned} (x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, z'_2 - z'_1) &= ((x_2 - ut) - (x_1 - ut), y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

uguali a quelle di S . Quindi $\vec{r}'_{12} = \vec{r}_{12}$ e $r'_{12} = r_{12}$. Che, del resto, la distanza tra le due masse rimanga invariata è conseguenza dell'ipotesi che le misure di lunghezza siano indipendenti dal sistema di riferimento. In conclusione, in S' si misura una forza \vec{F}'_{12} agente su m_2 identica a quella vista da S :

$$\vec{F}'_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2_{12}} \frac{\vec{r}'_{12}}{r'_{12}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \vec{F}_{12}. \quad (6.9)$$

Per la (6.5), inoltre, indicando con \vec{a}_2 e \vec{a}'_2 rispettivamente l'accelerazione di m_2 misurata in S e quella misurata in S' ,

$$\vec{a}'_2 = \vec{a}_2. \quad (6.10)$$

Insieme la (6.9) e la (6.10) ci forniscono il risultato cercato: quando, studiando il moto della massa m_2 , l'osservatore di S verifica la validità del secondo principio, altrettanto fa l'osservatore di S' (e viceversa):

$$\vec{F}'_{12} = m_2 \vec{a}'_2 \Leftrightarrow \vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2. \quad (6.11)$$

Dalle (6.9) risulta poi immediatamente evidente che ciascuna delle relazioni

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (6.12)$$

e

$$\vec{F}'_{21} = -\vec{F}'_{12} \quad (6.13)$$

(dove \vec{F}'_{21} è la forza esercitata da m_2 su m_1 in S) implica l'altra, cioè anche il terzo principio vale in S' se e solo se esso vale in S .

Utilizzando un esempio particolare abbiamo dunque verificato in modo dettagliato (e forse un po' pedante) una proprietà di cui in verità ci si può rendere conto con un ragionamento generale e intuitivo. Ogni misura di forza si riconduce o alla misura di un'accelerazione (misura dinamica) o alla misura di una lunghezza (l'allungamento di un dinamometro in una misura statica). Ci siamo già resi conto che, secondo la relatività galileiana, le misure di accelerazione (6.5) e quelle di lunghezza (6.8), contrariamente a quelle di velocità (6.4), danno entrambe risultati indipendenti dal particolare sistema di riferimento inerziale in cui ci si trova. I principi e le forze della meccanica classica, essendo espressi in termini di accelerazioni e di lunghezze, ma non di velocità, sono quindi covarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Si usa anche dire che essi ubbidiscono al principio di relatività di Galileo.

Cercheremo ora di farci un'idea il più possibile concreta del comportamento differente delle leggi dell'elettromagnetismo rispetto a quelle della meccanica. Non potendo contare su preesistenti nozioni di elettromagnetismo, ci sforzeremo di accettare la validità dei suoi principi fondamentali così come sono formulati matematicamente nelle cosiddette equazioni di Maxwell. L'insieme delle quattro equazioni di Maxwell rappresenta una descrizione completa delle proprietà del campo elettrico \vec{E} e del campo magnetico \vec{B} , della stretta relazione in cui essi si trovano e di come essi vengono generati nello spazio da cariche elettriche ferme (distribuite secondo la funzione densità ρ) e da cariche elettriche in movimento (rappresentate dal vettore "densità di corrente" \vec{J} , prodotto tra la velocità di tali cariche ed il loro numero per unità di volume):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

L'operatore nabla applicato scalarmente ad un vettore è detto "divergenza". In queste relazioni compaiono le due costanti fondamentali μ_0 ed ϵ_0 , dette rispettivamente permeabilità magnetica e costante dielettrica del vuoto, legate alla velocità della luce c (circa 300 000 km/s) dalla relazione

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (6.15)$$

Alle equazioni di Maxwell si affianca l'espressione della forza agente su di una carica elettrica puntiforme q ,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}), \quad (6.16)$$

che permette di calcolare, attraverso la seconda legge della dinamica, il moto della carica q in una regione di spazio in cui è presente un campo elettromagnetico. Si noti la dipendenza della forza dalla *velocità* \vec{v} della carica: già questo è un elemento di diversità rispetto alle leggi della meccanica, per le quali abbiamo motivato la covarianza rispetto alle trasformazioni di Galileo proprio con l'assenza di forze dipendenti dalla velocità.

Questa presentazione delle nozioni dell'elettromagnetismo è ovviamente molto riduttiva, perché non rende conto né della complessità dei fenomeni interessati, né dello straordinario valore concettuale della sintesi teorica rappresentata dalle equazioni formulate da James Clerk Maxwell (1831-1879) nel suo *Trattato su elettricità e magnetismo*. Nel Trattato, pubblicato nel 1873, si riassumevano tutte le precedenti conoscenze sui fenomeni elettromagnetici e se ne prevedevano di nuovi, tra cui l'esistenza delle onde elettromagnetiche, completando la formalizzazione di una delle teorie fisiche ancor oggi meglio fondate e dai più importanti risvolti applicativi.

Richiedendo un ulteriore sforzo nell'accettare nuove nozioni senza adeguata giustificazione fisica, introduciamo una seconda possibile formulazione delle equazioni dell'elettromagnetismo, basata, anziché sui vettori \vec{E} e \vec{B} , sui cosiddetti "potenziale vettore" (\vec{A}) e "potenziale scalare" (V), definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Si può dimostrare che le equazioni di Maxwell sono equivalenti alle seguenti due equazioni (una vettoriale, l'altra scalare) per i potenziali \vec{A} e V :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}, \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

dove il simbolo $\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ indica l'operatore "laplaciano" che agisce su di una funzione $f(x, y, z)$ nel seguente modo:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (6.19)$$

La formulazione in termini di potenziali è alternativa a quella in termini di \vec{E} e \vec{B} , nel senso che, una volta risolte le equazioni (6.18) per un determinato problema che ha come dati le distribuzioni di cariche e di correnti ρ e \vec{J} , dalle soluzioni $\vec{A}(x, y, z, t)$ e $V(x, y, z, t)$ si possono calcolare \vec{E} e \vec{B} usando le (6.17).

Per essere in grado di evidenziare con efficacia le differenze tra elettromagnetismo e meccanica, vogliamo prima cercare di istituire un certo grado di similitudine tra le due teorie. Il fatto che le leggi dell'elettromagnetismo, nella loro forma più completa e generale, coinvolgano i *campi*, quando quelle della meccanica classica sono sempre state viste in termini di *forze*, potrebbe infatti disorientare. Tuttavia la formulazione in termini di campi non è una proprietà specifica dell'elettromagnetismo ed è anzi applicabile anche all'interazione gravitazionale. Così come, ad esempio, il *campo* elettrico \vec{E} generato nello spazio da una carica puntiforme Q è definito a partire dalla famosa espressione della *forza* di Coulomb, dividendo la forza per la *carica* q che subisce l'azione del campo,

$$\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.20)$$

allo stesso modo è possibile definire il *campo gravitazionale* \vec{g} generato da una massa puntiforme M dividendo la forza di Newton per la “carica gravitazionale” m su cui essa agisce:

$$\vec{F}_{\text{Newton}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_{\text{Newton}}}{m} \Rightarrow \vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.21)$$

Tutti i problemi sull'interazione gravitazionale possono essere trattati in termini del campo \vec{g} , che, quando la forza di gravitazione è l'unica agente, coincide con l'*accelerazione* del punto di massa m :

$$\vec{F}_{\text{Newton}} = m\vec{g}, \quad \vec{F}_{\text{Newton}} = \vec{F}_{\text{TOT}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}. \quad (6.22)$$

E' infatti una *particolarità* del campo gravitazionale il fatto che la “carica” ad esso soggetta (cioè la massa gravitazionale) coincida con la massa inerziale (principio di equivalenza). L'analisi approfondita delle conseguenze di questa particolarità tutt'altro che banale e casuale è il punto di partenza della teoria della relatività generale.

Utilizzando il principio di sovrapposizione e passaggi matematici che vanno oltre lo scopo di questo testo, si può dimostrare che le proprietà più generali del campo \vec{g} sono esprimibili in una forma sintetica, scritta in termini di rotore e di-

vergenza, simile a quella vista per il campo elettromagnetico. Il campo \vec{g} generato da una distribuzione di massa qualsiasi avente densità $\rho_M(x, y, z, t)$, funzione delle coordinate spaziali e del tempo, soddisfa infatti le relazioni:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= -4\pi\gamma \rho_M, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{g} &= \vec{0}.\end{aligned}\tag{6.23}$$

La seconda delle equazioni (6.23) esprime la proprietà, già nota come proprietà della *forza*, secondo cui il campo \vec{g} è irrotazionale: esiste quindi una funzione scalare φ tale che

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \varphi.\tag{6.24}$$

Sostituendo la (6.24) nella prima delle (6.23), si trova l'equazione soddisfatta dal potenziale gravitazionale:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi\gamma \rho_M.\tag{6.25}$$

Dopo questa digressione sul campo elettromagnetico e sulla riformulazione della legge di gravitazione nel linguaggio dei campi abbiamo qualche strumento in più per comprendere la differenza tra le leggi della meccanica e quelle dell'elettromagnetismo. Le equazioni (6.14) e (6.23), (6.16) e (6.22), (6.17) e (6.24), (6.18) e (6.25) stabiliscono un parallelismo tra le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo e quelle dell'interazione gravitazionale. Anche se le prime coinvolgono due campi vettoriali anziché uno, le due formulazioni, considerate sia in termini di campi che in termini di potenziali, denotano ora un certo grado di somiglianza formale. Possiamo così, finalmente, rivolgere la nostra attenzione in modo più efficace al loro diverso comportamento. Consideriamo in particolare l'equazione per il potenziale scalare del campo elettromagnetico [seconda equazione in (6.18)] e quella per il potenziale gravitazionale (6.25). La loro differenza fondamentale (a parte i segni e le costanti) è che solo la prima contiene un termine con derivata temporale. E' proprio questo il termine che fa la differenza. Verifichiamo che cosa accade quando si applicano le trasformazioni di Galileo (6.3) al termine con le derivate spaziali (comune alle due equazioni) e a quello con la derivata temporale. Per far ciò, consideriamo il potenziale visto nel sistema di riferimento S' come funzione di funzioni:

$$V'(x', y', z', t') = V'[x'(x, y, z, t), y'(x, y, z, t), z'(x, y, z, t), t'(x, y, z, t)].\tag{6.26}$$

Notiamo inoltre che, fissati un punto dello spazio ed un istante di tempo, descritti dalle coordinate (x, y, z, t) in S e (x', y', z', t') in S' , il potenziale, come qualsiasi altra quantità osservabile, deve essere lo stesso per entrambi gli osservatori:

$$V'(x', y', z', t') = V(x, y, z, t). \quad (6.27)$$

Calcoliamo dunque le relazioni tra le derivate del potenziale in S' e quelle in S , tenendo conto anche delle espressioni delle trasformazioni di Galileo (6.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial x'} \\ \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) \frac{\partial t'}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2}} \\ \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} &= \frac{\partial^2 V'}{\partial y'^2}, \quad \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} = \frac{\partial^2 V'}{\partial z'^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -u \frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \\ \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(-u \frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \right) \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \left(-u \frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= \boxed{u^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial V'}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Queste espressioni, ottenute facendo uso solo delle trasformazioni di Galileo e delle proprietà delle derivate, valgono ovviamente anche per il potenziale gravitazionale φ . Ricordando anche la (6.19), nel passaggio da S a S' otteniamo le seguenti trasformazioni delle leggi del potenziale scalare elettromagnetico e del potenziale gravitazionale:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \varphi &= 4\pi\gamma \rho_M \end{aligned} \right\} S \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} \nabla^2 V' - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2} + u^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2 V'}{\partial x' \partial t'} \right\} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \varphi' &= 4\pi\gamma \rho_M \end{aligned} \right\} S' \quad (6.29)$$

Da un lato, dunque, ritroviamo, anche in questa nuova formulazione, una conferma della covarianza della legge di gravitazione, già da noi verificata in termini della forza. Dall'altro, abbiamo un esempio di come le leggi dell'elettromagnetismo, invece, non siano covarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Nel sistema di

riferimento mobile la legge del potenziale scalare acquista una dipendenza esplicita dalla velocità \vec{u} di S' rispetto ad S . Da ciò è spontaneo dedurre che esiste un solo sistema di riferimento inerziale privilegiato, in questo caso S , in cui le leggi dell'elettromagnetismo hanno la forma descritta dalle equazioni di Maxwell e che, in generale, i fenomeni elettromagnetici sono regolati da leggi sempre diverse a seconda del sistema di riferimento (sia pur inerziale) nel quale si compiono le misure. Tale conclusione può addirittura essere considerata incompatibile con il concetto basilare di *ripetibilità* della misura, su cui si fonda la moderna fisica sperimentale. Ciò che, tuttavia, fece dell'ipotesi dell'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato l'unica possibilità presa in considerazione dallo stesso Maxwell, e dall'intera comunità scientifica per alcuni decenni, fu la constatazione della *natura ondulatoria* del campo elettromagnetico. Cerchiamo di spiegare questo concetto. Consideriamo la legge del potenziale vettore [la prima delle (6.17)] in una regione di spazio "vuoto", in cui cioè non siano presenti cariche ferme o in movimento ($\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$): per ciascuna delle tre componenti di \vec{A} otteniamo

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\tag{6.30}$$

La forma matematica di queste equazioni è ben nota nella fisica classica: è quella caratteristica dell'*equazione delle onde*

$$\nabla^2 \psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0,\tag{6.31}$$

che descrive matematicamente il propagarsi di ogni genere di onde "materiali" (il suono, le onde del mare, le vibrazioni della corda tesa di uno strumento ad arco o della colonna d'aria contenuta nella camera di uno strumento a fiato) e dove v rappresenta la velocità di propagazione dell'onda. Guardando ora le (6.30), ci si rende conto che le componenti del potenziale vettore (e quindi quelle dei campi elettrico e magnetico) si propagano secondo le equazioni delle onde con una velocità c , pari a quella della luce. Di qui l'altra grande scoperta che ebbe origine dalla formulazione delle equazioni di Maxwell: la luce è radiazione elettromagnetica.

La propagazione delle onde materiali richiede la presenza di un mezzo. Si pensi alla vibrazione delle corde (fatte di metallo o budello) di un violino quando vengono sfregate o pizzicate. Le vibrazioni vengono trasmesse all'aria circostante e, soprattutto, al legno d'acero ed abete della cassa armonica, dove si trasformano in vibrazioni dell'aria e da dove, riflesse e amplificate, si diffondono come onde so-

nore nello spazio della stanza, fino a raggiungere e mettere in vibrazione la membrana del timpano all'interno del nostro orecchio. Il mezzo condiziona la propagazione delle onde: ad esempio, la trasmissione del suono sotto la superficie del mare è molto diversa da quella possibile in aria e dipende da profondità, temperatura, salinità, conformazione del fondale. Senza mezzo in cui propagarsi le onde sonore non esistono: lo spazio lontano dall'atmosfera è un luogo privo di suoni, dove non è possibile far sentire la propria voce o godere dell'ascolto della musica.

Non è quindi sorprendente il fatto che Maxwell non esitasse ad ipotizzare anche per le onde elettromagnetiche l'esistenza di un mezzo elastico e invisibile che permeasse il mondo e, vibrando, consentisse la loro propagazione. Egli riprese il concetto di "etere", che era stato introdotto da Huygens nel suo *Trattato sulla luce* (1690) ed era ritenuto alla base dei fenomeni ottici studiati da Young e Fresnel all'inizio del secolo. In analogia con i fenomeni di propagazione delle onde materiali, l'etere assumeva quindi il ruolo di sistema di riferimento privilegiato, non solo per la propagazione delle radiazioni elettromagnetiche, ma in generale per le leggi dell'elettromagnetismo. Il mondo scientifico sembrò quindi accettare il fatto che tali leggi non rispettassero il principio di relatività valido per quelle della meccanica.

6.3. L'esperimento di Michelson-Morley

Solo nel sistema di riferimento assoluto e immobile dell'etere doveva dunque essere possibile verificare l'*esatta* validità delle leggi di Maxwell. In particolare, ogni osservatore in moto rispetto a questo sistema di riferimento avrebbe dovuto misurare una velocità della luce (cioè delle onde elettromagnetiche) *diversa* dal valore della costante che compare nelle equazioni di Maxwell,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 299792 \text{ km/s}, \quad (6.32)$$

interpretata come la velocità della luce *nell'etere*. Doveva perciò essere *possibile*, per un osservatore a riposo sulla superficie terrestre, concepire un esperimento che gli consentisse di rendersi conto del proprio movimento rispetto al sistema di riferimento dell'etere. Secondo la ragionevole ipotesi che tale riferimento fosse approssimato meglio da quello del sistema solare che da quello della terra, la componente principale del moto rispetto all'etere sarebbe stata quella dovuta alla rivoluzione della terra attorno al sole, che si compie con una velocità media u_T di circa 30 km/s (la velocità di un punto della superficie terrestre dovuta alla rotazione della terra attorno al proprio asse è molto inferiore: meno di 0.5 km/s all'equatore). Un esperimento di misura della velocità della luce in un laboratorio terrestre avrebbe quindi dovuto fornire (assumendo la validità delle trasformazioni di Gali-

leo) risultati compresi tra $c - u_T$ e $c + u_T$, a seconda dell'allineamento della direzione della luce con quella della terra. Qualunque fosse in realtà il moto (a priori ignoto) della terra rispetto all'etere (la terra avrebbe anche potuto trovarsi *istantaneamente* in quiete rispetto all'etere), i cambiamenti di direzione tra notte e giorno e da stagione e stagione avrebbero dovuto consentire ad esperimenti effettuati in tempi diversi di rivelare una qualche variazione del valore misurato della velocità della luce.

L'effetto da misurare era piuttosto piccolo, essendo il valore di u_T , per quanto grande rispetto alle velocità che si osservano quotidianamente sulla terra, diecimila volte inferiore a quello di c . Si era consapevoli del fatto che la sua misura non avrebbe certo influito in modo significativo sulle interpretazioni dei dati sperimentali allora esistenti, come quelli forniti dagli studi su generazione e ricezione delle onde elettromagnetiche con cui Heinrich Hertz confermò negli anni 1880 la validità delle conseguenze previste dalle equazioni di Maxwell. Ma la questione dell'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato per lo studio dei fenomeni fisici rivestiva un interesse di carattere filosofico ancor più che scientifico, senza contare le speculazioni, sconfinanti nell'alchimia, su quali fossero le proprietà meccaniche dell'etere (trasparente, fluido, ma anche così rigido da resistere alle più elevate frequenze di radiazione, privo di massa e di struttura microscopica, incompressibile, non viscoso).

Tra i numerosi esperimenti compiuti sul finire del 1800 per dare una risposta al problema, il primo a raggiungere una precisione adeguata all'entità dell'effetto cercato fu quello realizzato da Albert Michelson ed Edward Morley nel 1887. L'esperimento doveva sfruttare l'elevata precisione raggiungibile nella misura dei fenomeni di "interferenza" della luce, con lo scopo di rivelare una seppur piccola velocità del laboratorio rispetto all'etere. L'idea era quella cui abbiamo già accennato e che adesso vogliamo spiegare in maggior dettaglio. *Rispetto all'etere*, per definizione, un raggio di luce ha sempre velocità di modulo c (la velocità "assoluta" della luce) qualunque sia la sua direzione; invece *rispetto al laboratorio* (supposto in moto rispetto all'etere) raggi di luce mandati in direzioni diverse avranno velocità in modulo diverse, poiché, secondo le trasformazioni di Galileo, comporranno diversamente la propria velocità "assoluta" con quella del laboratorio rispetto all'etere. Chiamando il riferimento fisso dell'etere S e il laboratorio S' , la velocità della luce *nel laboratorio* sarà (6.6)

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}, \quad (6.33)$$

dove \vec{v} , in modulo uguale a c , è la velocità della luce nell'etere. Calcoliamo come il modulo di \vec{v}' dipende dalla velocità \vec{u} del laboratorio e dalla direzione del raggio di luce nel laboratorio:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$|\vec{v}|^2 = c^2 = (\vec{v}' + \vec{u}) \cdot (\vec{v}' + \vec{u}) = v'^2 + u^2 + 2 v' u \cos \mathcal{G}'$$

$$v'^2 + 2(u \cos \mathcal{G}')v' - (c^2 - u^2) = 0$$

$$v' = \sqrt{c^2 - u^2 + u^2 \cos^2 \mathcal{G}'} - u \cos \mathcal{G}'$$
(6.34)

(un'analogia soluzione dell'equazione con segno meno davanti alla radice è da escludere, perché porta alla condizione non fisica $v' = -c$ per $u \rightarrow 0$). Abbiamo indicato con \mathcal{G}' l'angolo formato dalla direzione della luce nel laboratorio con quella del moto del laboratorio stesso. Dall'espressione finale si ricavano, ad esempio, i seguenti valori per la velocità della luce misurata nel laboratorio:

$$\mathcal{G}' = 0 \Rightarrow v' = c - u$$
(6.35)

$$\mathcal{G}' = 180^\circ \Rightarrow v' = c + u$$
(6.36)

$$\mathcal{G}' = \pm 90^\circ \Rightarrow v' = c \sqrt{1 - u^2/c^2}$$
(6.37)

Con una misura di laboratorio in cui si mandino raggi di luce in diverse direzioni e se ne misurino le velocità, dovrebbe dunque essere possibile, confrontando i diversi risultati, stabilire il valore della velocità u del laboratorio rispetto all'etere. Ma se la misura della velocità desse sempre lo stesso risultato per *ogni* direzione del raggio di luce, bisognerebbe concludere che il laboratorio è immobile rispetto all'etere ($\vec{u} = \vec{0}$), oppure che le ipotesi fatte – la validità delle trasformazioni di Galileo e/o l'esistenza stessa dell'etere – sono sbagliate.

L'esperimento di Michelson-Morley si proponeva quindi di rivelare *variazioni* nella misura della velocità della luce al variare della sua direzione nel laboratorio. Per comprendere

a fondo il metodo usato, bisognerebbe conoscere le proprietà della luce e le leggi dell'ottica. Cercheremo di dare solo qualche idea fondamentale che consenta di intuire il procedimento. Un'onda lu-

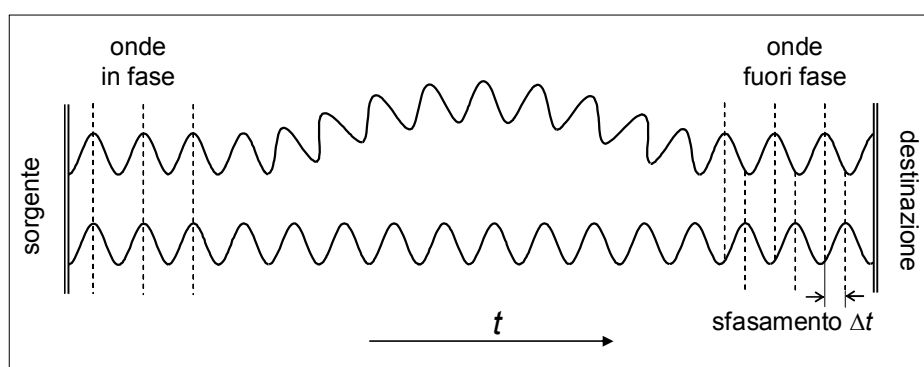


Figura 6.2 – Illustrazione intuitiva di come si crea lo sfasamento tra due onde che percorrono tragitti di diversa lunghezza.

minosa durante il suo percorso “oscilla” secondo fluttuazioni regolari e periodiche caratterizzate da una certa frequenza (ad oscillare sono proprio il campo elettrico e il campo magnetico di cui l'onda è costituita). Due raggi luminosi, provenienti dal-

la stessa sorgente, che si rincontrino dopo aver percorso due tragitti di *diversa lunghezza* possederanno, in generale, due *diverse "fasi"* d'oscillazione: è facile rendersene conto rappresentando le onde come funzioni periodiche sinusoidali del tempo (figura 6.2). Viceversa, se tra due onde luminose provenienti dalla stessa sorgente si misura uno sfasamento temporale Δt , se ne può attribuire la causa a una delle seguenti circostanze (o ad entrambe):

- 1) le due onde hanno percorso tragitti L_1 e L_2 di lunghezza diversa, e quindi $\Delta t = (L_2 - L_1)/v'$;
- 2) se, invece, i percorsi compiuti dai due raggi luminosi sono lunghi uguali ($L_2 = L_1 = L$), devono essere diverse le *velocità* con cui i due percorsi sono stati compiuti: $\Delta t = L/v'_2 - L/v'_1$.

Il caso più interessante per la nostra discussione è quest'ultimo. La misura della differente velocità di due onde luminose che si propagano in direzioni diverse si riconduce quindi alla misura dello sfasamento temporale dell'una rispetto l'altra. Il metodo per misurare lo sfasamento tra due onde luminose si basa sul fenomeno noto in ottica con il nome di interferenza. Due onde della stessa frequenza che si sovrappongono "mescolando" le proprie oscillazioni disegnano, proiettandosi su uno schermo piano, una caratteristica alternanza di righe illuminate e righe oscure (le cosiddette "frange d'interferenza"). La forma della figura che si crea sullo schermo *dipende* dal rapporto $\Delta t/T$ tra lo sfasamento reciproco delle due onde ed il loro periodo di oscillazione: le frange prodotte dall'interferenza di due onde tra loro sfasate ($\Delta t \neq 0$) sono spostate di una quantità ben calcolabile rispetto a quelle generate da due onde perfettamente in fase ($\Delta t = 0$).

L'apparato di misura è schematizzato (in una forma semplificata) in figura 6.3. Gli sperimentatori montarono tutti i componenti sopra una base di pietra girevole, così da poter periodicamente riallineare l'apparato con quella che si presumeva fosse la direzione del moto del laboratorio rispetto all'etere, cioè la velocità di rivoluzione della terra (\vec{u}). Tale direzione cambia, ovviamente, al variare delle stagioni, ma anche dal giorno alla notte, a causa della rotazione terrestre.

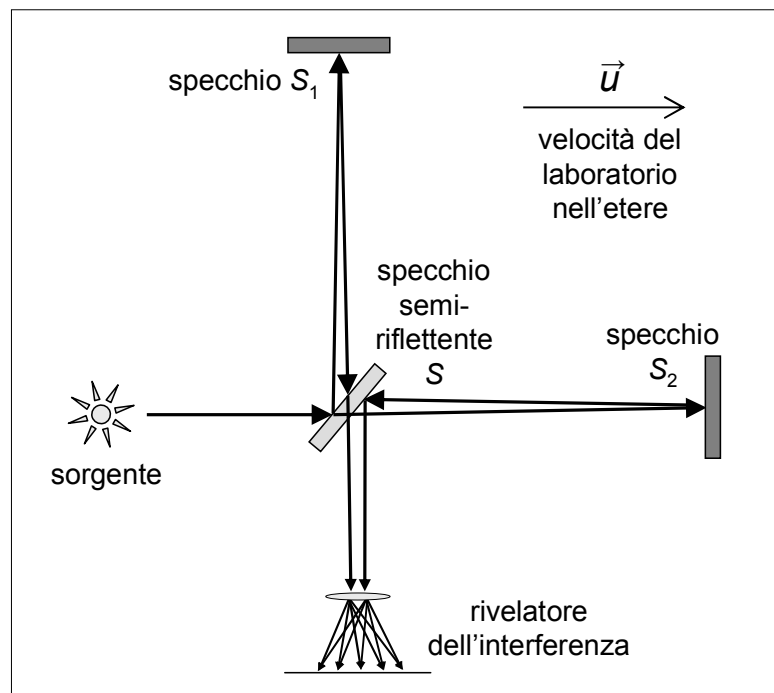


Figura 6.3 – Rappresentazione schematica dell'esperimento di Michelson-Morley.

Una sorgente luminosa, fissa rispetto al resto dello strumento, produce un'onda che si propaga nella direzione di \vec{u} e incontra uno specchio semi-riflettente S . Quest'ultimo in parte riflette, in parte rifrange (cioè si lascia attraversare come un vetro trasparente), suddividendo così la luce incidente in due componenti proiettate in direzioni distinte, quella di \vec{u} e quella ad essa perpendicolare. Ciascuna delle due onde, dopo aver compiuto un percorso lungo l , incide su uno specchio (S_1/S_2) e viene riflessa all'indietro. Ritornate allo specchio semi-riflettente, le due onde riassumono la stessa direzione e raggiungono insieme il dispositivo per l'osservazione delle frange d'interferenza (ad esempio una lente che focalizza la luce sulla superficie di uno schermo). Tra i due fasci di luce ci si aspetta di osservare uno sfasamento dovuto alle *diverse velocità* di percorrenza dei tratti SS_1 e SS_2 : il tratto SS_1 è infatti percorso *parallelamente* a \vec{u} con velocità di modulo $c - u$ in andata (6.35) e $c + u$ al ritorno (6.36), mentre il tratto SS_2 è percorso *perpendicolarmente* a \vec{u} con velocità (6.37) pari a $c\sqrt{1 - u^2/c^2}$ (sia all'andata e al ritorno). Ricordiamo che queste sono le velocità rispetto al laboratorio ottenute convertendo la velocità della luce nell'etere (c) tramite le trasformazioni di Galileo. Il fascio che percorre il braccio parallelo a \vec{u} impiega dunque il tempo

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= t_{\square}^{\text{andata}} + t_{\square}^{\text{ritorno}} = \frac{l}{(v'_{\square})^{\text{andata}}} + \frac{l}{(v'_{\square})^{\text{ritorno}}} \\ &= \frac{l}{c - u} + \frac{l}{c + u} = \frac{2lc}{c^2 - u^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - u^2/c^2}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

mentre lungo il braccio perpendicolare a \vec{u} il tempo di percorrenza è

$$\begin{aligned} t_{\perp} &= t_{\perp}^{\text{andata}} + t_{\perp}^{\text{ritorno}} = \frac{l}{(v'_{\perp})^{\text{andata}}} + \frac{l}{(v'_{\perp})^{\text{ritorno}}} \\ &= \frac{l}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{l}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Le due onde ritornano in S avendo accumulato il ritardo reciproco

$$\Delta t = t_{\square} - t_{\perp} = \frac{2l}{c} \left[\frac{1}{1 - u^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right], \quad (6.40)$$

che è non nullo se e solo se $u \neq 0$. La posizione delle frange d'interferenza proiettate sullo schermo permetterebbe di rivelare questo sfasamento. Ad esempio, per $u = 30$ km/s e $l = 11$ m (lunghezza dei bracci usati nell'esperimento), lo sfasamen-

to atteso sarebbe $\Delta t \approx 3.7 \cdot 10^{-13}$ s, da confrontare con il periodo d'oscillazione della luce usata $T \approx 2 \cdot 10^{-12}$ s⁽¹⁾.

Le osservazioni furono compiute di giorno e di notte e ripetute in tutte le stagioni dell'anno. Il risultato complessivo delle misure fu la determinazione di un limite superiore per l'entità dello sfasamento, pari a un quarantesimo di quello atteso. I risultati mostravano con sconcertante precisione che l'effetto cercato non esisteva.

Quanto l'esito di queste misure deludesse le aspettative del mondo scientifico è testimoniato dalle numerose riproposizioni dell'esperimento, in varianti sempre più sofisticate, nei cinquant'anni successivi. Ma il continuo affinamento delle tecniche sperimentali e il conseguente miglioramento della precisione delle misure non fecero che rafforzare sempre di più la significatività del risultato.

6.4. La contrazione di Fitzgerald-Lorentz

La battaglia per la strenua difesa del concetto di etere continuava nel frattempo anche sul fronte delle possibili spiegazioni teoriche.

Tra le interpretazioni del risultato dell'esperimento di Michelson-Morley ce n'era una immediata, ma non priva di inquietanti connotazioni: la terra doveva effettivamente essere in quiete rispetto all'etere. L'ipotesi, che sembrava resuscitare antiche visioni cosmologiche, venne giustificata con l'esistenza di un meccanismo di *trascinamento* di strati superficiali dell'etere da parte dei corpi materiali in movimento. Questo meccanismo, grazie al quale la terra si sarebbe trovata *localmente* ferma nel riferimento dell'etere, avrebbe potuto ridurre l'entità dello sfasamento atteso come risultato dell'esperimento fino ad un valore compatibile con il limite sperimentale. Da un lato, però, l'ipotesi era incompatibile con la spiegazione che la fisica classica dava del fenomeno dell'aberrazione stellare. Non mancarono poi verifiche sperimentali dirette del meccanismo di trascinamento: ad esempio, l'esperimento di Michelson-Morley fu ripetuto molto più tardi (1935) da G. W. Hammar racchiudendo uno solo dei due bracci tra pesanti blocchi di piombo, che, esercitando la loro forza di trascinamento sull'etere, avrebbero dovuto creare

¹ Esiste in verità una complicazione tecnica: di fatto è impossibile raggiungere la condizione sperimentale in cui i due bracci SS_1 e SS_2 abbiano lunghezza *esattamente* uguale. Basterebbe una differenza di lunghezza Δl piccolissima, pari anche solo ad una *frazione* della "lunghezza d'onda" λ (il "passo" dell'oscillazione, legato al periodo dalla relazione $\lambda = c \cdot T$) della luce usata ($\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ m), per produrre uno sfasamento $\Delta t = \Delta l/v'$ che maschererebbe completamente quello dovuto alla velocità del laboratorio, oggetto della misura. Per eliminare la dipendenza da questo effetto non voluto, nell'esperimento di Michelson-Morley ogni rilevazione veniva in realtà ripetuta una seconda volta dopo una rotazione dell'intero apparato di 90° , tale da scambiare tra di loro i due bracci. Scopo della misura diventava quindi determinare la *differenza* tra i due sfasamenti, cioè uno *spostamento* delle frange d'interferenza tra prima e dopo la rotazione, risultato che avrebbe significato univocamente la presenza di una velocità di deriva non nulla del laboratorio.

un'asimmetria tra i due bracci e modificare il risultato dell'esperimento. Ma l'esito dell'esperimento fu che la presenza del piombo non aveva alcuna influenza sulla misura.

Due anni dopo l'esperimento di Michelson-Morley, George Fitzgerald e poi, indipendentemente, Hendrik Lorentz proposero un'altra spiegazione del dato sperimentale che lasciava inalterata l'idea di etere in quiete assoluta. L'ipotesi prevedeva che un corpo viaggiante con velocità v rispetto all'etere subisse una contrazione di un fattore $\sqrt{1-u^2/c^2}$ nella direzione del proprio moto. L'effetto della contrazione non era direttamente riscontrabile dallo stesso osservatore in moto, poiché anche l'unità campione da lui usata per compiere una misura di lunghezza avrebbe dovuto subire una contrazione della stessa entità.

Secondo questa ipotesi, nell'interpretazione dell'esperimento di Michelson-Morley il cammino ottico nella direzione di \vec{u} , e quindi il tempo di percorrenza t_{\square} (6.38), dev'essere contratto del fattore $\sqrt{1-u^2/c^2}$:

$$\begin{aligned} t_{\square} &= \frac{2l\sqrt{1-u^2/c^2}}{c} \frac{1}{1-u^2/c^2} \\ &= \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ &= t_{\perp} \end{aligned} \quad (6.41)$$

e diventa perciò uguale al tempo di percorrenza del braccio perpendicolare (6.39), che invece non subisce contrazione. Di conseguenza, lo sfasamento risultante è ora nullo qualsiasi sia la velocità \vec{u} del laboratorio, in accordo con l'esito dell'esperimento.

Grazie ad un intervento correttivo ad hoc, la teoria dell'etere era di nuovo salva. Ma gli aspetti concettuali più importanti rimanevano privi di spiegazioni soddisfacenti. La ragione della contrazione sembrava essere attribuita a reali effetti elettromagnetici prodotti dal moto dei corpi nell'etere, effetti ai quali però non si dava un inquadramento coerente nell'ambito degli studi, evidentemente correlati, sulla relazione tra campo elettromagnetico, moto dei portatori di carica e struttura dei corpi materiali, che lo stesso Lorentz stava compiendo. Tanto meno si riteneva di poter risolvere il problema della diversità di comportamento delle leggi dell'elettromagnetismo rispetto a quelle della meccanica. Ma, soprattutto, l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato per lo studio dei fenomeni fisici non era messa in discussione. Il problema della "disparità" tra il riferimento dell'etere e quelli in moto rispetto ad esso sembrava essere addirittura aggravato dall'esistenza del fenomeno della contrazione. Il meccanismo della contrazione

spaziale *annullava*, secondo le intenzioni di chi l'aveva proposto, qualsiasi effetto dovuto alla velocità del laboratorio rispetto all'etere. Ma, in questo modo, diventava impossibile stabilire con una misura *quale* fosse il riferimento dell'etere. Da un lato, quindi, ci si aspettava che le leggi dell'elettromagnetismo potessero essere verificate esattamente solo rispetto all'etere; dall'altro, sembrava che l'etere fosse *sperimentalmente* indistinguibile dagli altri sistemi di riferimento.

L'ipotesi della contrazione era stata formulata con l'espresso intento di eliminare una "spiacevole" contraddizione tra la teoria dell'etere e l'evidenza sperimentale. Anche per il modo in cui era nata, essa possedeva quindi un evidente carattere di artificiosità. La sua validità generale sarebbe poi stata confutata, molti anni dopo, dall'esperimento di Kennedy e Thorndike (1932), compiuto come test della teoria della relatività ristretta. Utilizzando un apparato come quello dell'esperimento di Michelson-Morley, ma adottando questa volta due bracci di lunghezze tra loro significativamente diverse, i due scienziati avrebbero mostrato che l'ipotesi della contrazione spaziale non era da sola sufficiente a rendere conto dei risultati ottenuti al *variare* della velocità dello strumento di misura rispetto ad un ipotetico etere.

Negli anni precedenti alla pubblicazione (1905) della relatività ristretta, stavano prendendo forma, grazie al lavoro degli scienziati Joseph Larmor, Woldemar Voigt e soprattutto dello stesso Lorentz, le corrette equazioni di trasformazione di coordinate rispetto le quali le leggi dell'elettromagnetismo sono covarianti – note, appunto, come trasformazioni di Lorentz. La forma completa di queste equazioni, che dovevano affiancare ma non sostituire le trasformazioni di Galileo (6.3), considerate ancora valide per i fenomeni meccanici, è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (6.42)$$

Più tardi mostreremo come queste equazioni *derivino* dai principi fondamentali della relatività ristretta, di cui costituiscono lo strumento matematico principale. Tuttavia esse furono introdotte con un significato completamente diverso da quello che avrebbero poi assunto nella teoria di Einstein. Esse rappresentano infatti il punto di arrivo di diversi tentativi che furono compiuti alla ricerca delle trasforma-

zioni che dovevano lasciare invariate le equazioni di Maxwell nel passaggio dal riferimento dell'etere ad uno in movimento. Il meccanismo della contrazione delle lunghezze, precedentemente postulato per rendere conto del risultato dell'esperimento di Michelson-Morley, era incorporato in queste equazioni. Il concetto di sistema di riferimento privilegiato rimaneva inalterato e anzi, si connotava di ulteriori elementi di artificiosità, come l'introduzione del meccanismo della *dilatazione del tempo*, che si affiancava così a quello della contrazione delle lunghezze. A causa della peculiare interdipendenza tra coordinate spaziali e coordinata temporale presente nelle equazioni di trasformazione, gli intervalli *temporali* misurati in un laboratorio in movimento sembravano infatti dover subire una *dilatazione* rispetto a quelli misurati nell'etere. La misura del tempo, come già quella della lunghezza, diventava così un'ulteriore ragione di disparità tra etere e riferimenti in moto. Vedremo nel seguito come la teoria della relatività porterà ad un vero e proprio ribaltamento di prospettiva nell'interpretazione di questi concetti.

Anche in questa occasione, i tentativi di risolvere le contraddizioni esistenti senza rinunciare al concetto di etere stavano comportando una progressiva deriva verso idee sempre meno intuitive e sempre più difficili da giustificare con teorie fisicamente accettabili.

Utili a capire come venisse inteso il significato della contrazione della lunghezza e della dilatazione del tempo sono le parole di Larmor (*Etere e Materia*, 1900): “*Se le forze interne di un sistema materiale nascono da azioni elettrodinamiche tra i sistemi di elettroni che costituiscono gli atomi, allora l'effetto dell'impartire ad un sistema materiale rigido un'uniforme velocità di traslazione è di produrre una contrazione uniforme del sistema nella direzione del moto, della quantità $\varepsilon^{-1/2}$ [$= \sqrt{1 - u^2/c^2}$]”.*

Le trasformazioni di Lorentz erano considerate come una conseguenza delle interazioni elettromagnetiche e quindi una loro proprietà esclusiva. Rispetto a fenomeni come il moto dei pianeti o la caduta dei gravi, per i quali dovevano continuare a valere le trasformazioni di Galileo, la fisica dei processi elettromagnetici costituiva ancora un mondo a parte.

6.5. I postulati della relatività ristretta

Mai come alla fine del 1800 si poteva guardare al complesso delle acquisizioni della mente umana come ad una trionfale consacrazione del metodo “scientifico” fondato da Galileo. Nel corso del secolo, l'insieme delle conoscenze della fisica aveva assunto l'aspetto di una costruzione imponente: la meccanica, fondata sulle leggi di Newton, prediceva con grande precisione il moto di qualsiasi corpo; erano state formulate le leggi che descrivono i fenomeni termici stabilendone la connessione con le applicazioni meccaniche ed erano già state proposte le idee per una loro interpretazione in termini statistici (Maxwell, Boltzmann); la concezione ato-

mica della materia, sebbene considerata ancora non più che un'ipotesi, era alla base di ben consolidate leggi della chimica. Ma, soprattutto, i fenomeni connessi con l'elettricità ed il magnetismo, dopo essere stati oggetto di intensa ricerca da parte di un numero sempre crescente di studiosi (Coulomb, Gauss, Oersted, Ohm, Ampère, Faraday, ecc.), avevano trovato nel fondamentale lavoro di Maxwell una trattazione di completezza e sintesi mirabili. La scoperta, che ne derivò, della natura ondulatoria dei campi elettrici e magnetici era destinata a segnare in modo determinante la successiva evoluzione delle conoscenze scientifiche e tecnologiche. Basti menzionare i primi esperimenti sulla trasmissione di segnali condotti da Heinrich Hertz e da Guglielmo Marconi, che già nel 1901 dimostrò di essere in grado di far viaggiare un segnale su una distanza di oltre tremila chilometri attraverso l'Atlantico. Gli ultimi anni del secolo videro inoltre la scoperta dei raggi X (Röntgen), che avrebbe presto rivoluzionato la diagnostica medica, e quella della radioattività (Becquerel, Curie).

Tuttavia, proprio la nuova formulazione dell'elettromagnetismo ad opera di Maxwell fece emergere gravi problemi concettuali che, alle soglie del ventesimo secolo, determinarono la crisi della teoria classica e della concezione corrente dello spazio-tempo. Da un lato, come abbiamo visto, la natura ondulatoria dei campi sembrava presupporre, in contrasto con il principio di relatività su cui era fondata la meccanica di Galileo e Newton, l'esistenza di un sistema di riferimento preferenziale, quello del mezzo di propagazione, per la descrizione dei fenomeni elettromagnetici. Esisteva poi un'intera classe di fenomeni, connessi con l'emissione e l'assorbimento della radiazione da parte della materia (le righe spettrali dell'atomo, la radiazione di corpo nero), per i quali l'interpretazione nell'ambito della teoria maxwelliana dava risultati non consistenti con la realtà o addirittura paradossali. Ciascuno di questi problemi era come una sfida lanciata alla comunità scientifica. Gli sforzi compiuti per cercarne le risposte sfociarono all'inizio del ventesimo secolo in una rivoluzione concettuale senza precedenti nella storia di tutte le scienze, portando alla formulazione della teoria della relatività da parte di Einstein e alla proposizione delle prime idee della meccanica quantistica, cui lo stesso Einstein diede contributi fondamentali.

Il 1905 fu l'*annus mirabilis* di Albert Einstein (1879-1955). Egli pubblicò sugli *Annalen der Physik*, a breve distanza l'uno dall'altro, quattro scritti destinati a cambiare per sempre la visione che l'uomo ha dell'universo. Il primo riguardava aspetti della teoria cinetica molecolare del calore ed includeva una spiegazione teorica del cosiddetto moto browniano (il movimento disordinato e imprevedibile delle particelle sospese in un fluido). Con il secondo scritto Einstein aprì la strada alla teoria corpuscolare della luce e quindi alla meccanica quantistica, postulando che la luce fosse costituita di singole quantità elementari, successivamente chiamate fotoni; riuscì così a spiegare il fenomeno, scoperto da Hertz, in cui una lamina metallica irraggiata dalla luce emette elettroni (il cosiddetto effetto fotoelettrico). Questa interpretazione, confermata poi dagli esperimenti di Robert Millikan, gli

sarebbe valsa il premio Nobel. Gli ultimi due scritti, *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento* e *L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto energetico?* contengono, rispettivamente, l'enunciazione completa della teoria della relatività ristretta e la derivazione di alcune sue implicazioni, tra cui la famosa equazione di equivalenza tra massa ed energia. La nuova teoria discende interamente da due soli postulati, che possono essere così formulati:

- 1) Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali (principio di relatività).
- 2) La luce si propaga nello spazio vuoto con una velocità che ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali.

Il primo postulato recupera il concetto di relatività come principio universalmente valido non solo per le leggi della meccanica, ma per tutte le leggi della fisica, quindi anche quelle dell'elettromagnetismo e dell'ottica. Come vedremo, infatti, la relatività ristretta fornisce la piena giustificazione delle trasformazioni di Lorentz, estendendone la validità alla meccanica; allo stesso tempo essa *non* è in contraddizione con la meccanica newtoniana e con le trasformazioni di Galileo, che ne costituiscono il caso limite per velocità piccole rispetto a quella della luce.

Il secondo postulato eleva, di fatto, a principio il risultato dell'esperienza di Michelson-Morley (tuttavia non citata da Einstein), eliminando ogni riferimento all'etere: le onde elettromagnetiche si propagano *nel vuoto*.

Ci apprestiamo a dimostrare che i principi fondamentali della relatività *implicano* le trasformazioni di Lorentz (6.42) come le corrette equazioni che permettono di passare da un sistema di riferimento all'altro – di *qualsiasi* natura sia il fenomeno descritto.

6.6. Il nuovo concetto di tempo

Per prima cosa è necessario rivedere il significato di tempo. Il fatto che la luce abbia la stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento ha infatti una prima, importante conseguenza: lo scorrere del tempo non è lo stesso in tutti i riferimenti, ragion per cui sarà necessario considerare *coordinate temporali distinte* ($t \neq t'$) nei due sistemi inerziali S e S' tra i quali si opera la trasformazione. Ci si può rendere conto di questa proprietà attraverso un semplice esempio di “esperimento pensato”.

Consideriamo come laboratorio il vagone di un treno (sistema di riferimento S'), in moto rispetto a terra (riferimento S) con velocità \vec{u} costante e diretta verso “destra” (v. figura 6.4). Una sorgente di luce posta in quiete nel punto di mezzo del vagone emette, all'istante $t = 0$, due segnali in direzioni opposte. I due segnali si propagano con la *stessa velocità* c in entrambe le direzioni. Essi raggiungono quindi la parete dell'estremità destra e quella dell'estremità sinistra del vagone,

poste alla *stessa distanza* dalla sorgente, *simultaneamente*. Vediamo ora cosa

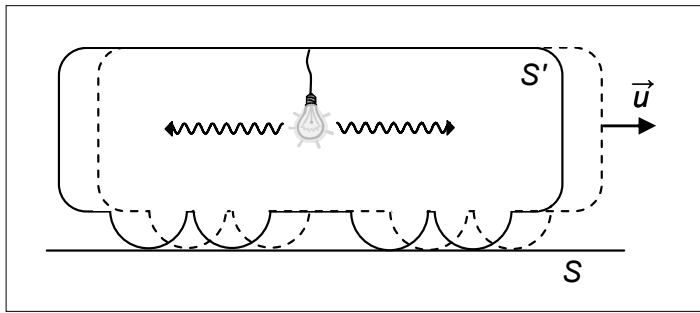


Figura 6.4 – Relatività della simultaneità: l'esempio della sorgente di luce all'interno del vagone di un treno.

succede se lo stesso fenomeno viene osservato da un osservatore fermo sulla terra. Sappiamo, per postulato, che *anche in S la velocità del segnale luminoso è uguale a c*, in entrambe le direzioni. Tuttavia, mentre il segnale si propaga, l'osservatore di S vede il vagone spostarsi verso destra: la parete di sinistra va

quindi incontro al segnale, quella di destra sfugge da esso. L'osservatore di S conclude che il segnale raggiunge la parete di sinistra prima di quella di destra: l'arrivo del segnale alle due estremità del vagone è simultaneo per l'osservatore del vagone, ma non per l'osservatore fermo a terra.

La simultaneità diventa un concetto relativo. E' quindi necessario abbandonare la nozione di tempo assoluto. Mentre le trasformazioni di Galileo possono sempre essere descritte scegliendo la condizione $t = t'$, per dedurre le nuove equazioni di trasformazione sarà *essenziale* assumere che ciascun riferimento sia dotato di un proprio orologio.

Riguardo alla misura del tempo bisogna compiere alcune precisazioni. Cosa significa dotare di orologio un sistema di riferimento? In verità, *ogni* punto dello spazio all'interno di un sistema di riferimento deve teoricamente possedere un orologio, se si vuole essere in grado di registrare l'istante in cui un qualsiasi evento (ad esempio il passaggio di un corpo per *quel* punto) si verifichi. In generale è quindi necessario dotare il riferimento di un "reticolo" di orologi *tra loro sincronizzati*. E qual è la procedura giusta per operare la sincronizzazione? Non è corretto pensare di trasportare tutti gli orologi nello stesso punto (ad esempio l'origine) del riferimento, sincronizzarli e poi riportarli nelle sedi ad essi assegnate, poiché lo spostamento degli orologi in generale ne altera la marcia. Si tratta di un effetto non necessariamente connesso con la relatività della simultaneità: anche in meccanica classica è prevedibile che ciò possa accadere. Lo spostamento di un orologio comporta infatti il suo trasferimento temporaneo su di un sistema di riferimento non inerziale (ad esempio a bordo di un treno che lo trasporti da una città ad un'altra): la partenza e l'arrivo, per lo meno, implicano un'accelerazione del mezzo di trasporto. Nei momenti di non inerzialità del moto dell'orologio, le leggi fisiche che ne determinano il funzionamento vengono alterate. Ad esempio, un orologio a pendolo potrebbe mutare il proprio periodo di oscillazione se sottoposto ad altre forze (apparenti) oltre alla forza peso. Il metodo più giusto e "naturale" di sincronizzare gli orologi è basato sul secondo postulato della relatività ristretta ed è, di fatto, quello utilizzato per la messa a punto della rete oraria mondiale. L'orologio posto, ad esempio, nell'origine viene scelto come quello che fornisce l'orario di

riferimento, rispetto al quale tutti gli altri si devono sincronizzare. L'osservatore che lo possiede spedisce, all'istante $t = 0$ da lui misurato, un segnale elettromagnetico, *avente velocità c* . Il generico osservatore, conoscendo la propria posizione e quindi la propria distanza d dalla sorgente del segnale, all'istante della ricezione sa che è trascorso un tempo $\Delta t = d/c$ dall'emissione ($t = 0$) e regola quindi il proprio orologio in modo che esso segni l'ora $t = d/c$. Un secondo segnale, spedito ad un successivo tempo fissato t_0 , consente al generico osservatore (che si aspetta di riceverlo all'istante $t_0 + d/c$) di verificare, ed eventualmente correggere, la propria sincronia di marcia con quello di riferimento.

Anticipiamo qui un ulteriore elemento di novità nella concezione dello spazio-tempo rispetto alla relatività di Galileo. Se, come abbiamo visto, la percezione della simultaneità di due eventi è ora un fatto relativo, perde automaticamente validità anche un'altra ipotesi classica, quella dello spazio assoluto. Pensiamo al procedimento di misura della lunghezza di un'asta (cioè della distanza tra due punti dello spazio): se l'asta si muove rispetto all'osservatore, per misurarne la lunghezza egli deve localizzarne *simultaneamente* i due estremi vedendoli passare davanti a sé. Ma sappiamo che il modo in cui un osservatore giudica la simultaneità di due eventi dipende dal sistema di riferimento. Allora anche la misura della lunghezza dipende dal sistema di riferimento.

6.7. Le trasformazioni di Lorentz

Possiamo finalmente mostrare come la forma matematica delle trasformazioni di Lorentz (6.42) derivi dai due postulati della relatività ristretta, oltre che da assunzioni del tutto generali sull'omogeneità e l'isotropia del continuo spazio-temporale. Ci riferiamo alla stessa scelta particolare di orientazioni e posizioni reciproche degli assi già utilizzata per illustrare le trasformazioni di Galileo e rappresentata nella figura 6.1. Vogliamo trovare le nuove relazioni

$$\begin{cases} x' = x'(x, y, z, t) \\ y' = y'(x, y, z, t) \\ z' = z'(x, y, z, t) \\ t' = t'(x, y, z, t) \end{cases} \quad (6.43)$$

che permettono di passare dalle coordinate di S a quelle di S' .

Cominciamo con l'osservare che esse devono essere lineari. Trasformazioni non lineari violerebbero infatti una proprietà dello spazio-tempo che non è messa in

discussione: la sua *omogeneità*. Qualunque esperimento deve dare gli stessi risultati se viene ripetuto *nelle stesse condizioni fisiche* in punti diversi dello spazio e in tempi diversi.

Supponiamo, ad esempio, che la coordinata x si trasformi secondo la relazione quadratica $x' = a x^2$ e verifichiamo cosa succede quando l'osservatore di S' misura la lunghezza di un'asta collocata a riposo lungo l'asse x nel riferimento S . Supponiamo che la lunghezza misurata dall'osservatore di S sia, ad esempio, unitaria. In un primo caso l'osservatore di S pone l'asta con estremi in $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$: la sua lunghezza viene misurata da S' come

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2^2 - x_1^2) = a(4 - 1) = 3a \quad (6.44)$$

(non deve necessariamente stupirci che la lunghezza misurata in S' sia *diversa* da quella misurata in S , poiché i due riferimenti sono in moto l'uno rispetto l'altro e sappiamo già che la misura di una lunghezza dipende dal sistema di riferimento). Se la stessa asta viene collocata adesso dall'osservatore di S in un altro punto dello spazio, per esempio con estremi in $x_1 = 4$ e $x_2 = 5$, l'osservatore di S' misurerà questa volta la lunghezza

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2^2 - x_1^2) = a(25 - 16) = 9a. \quad (6.45)$$

Quindi, anche se la lunghezza dell'asta è sempre unitaria in S , la misura compiuta dall'osservatore di S' dà *risultati diversi a seconda del punto dello spazio* in cui l'asta è stata posta. Ci si può rendere conto, ripetendo l'esercizio ad esempio con la relazione $x' = a x$, che ciò non succede se la trasformazione è lineare nelle coordinate.

Le trasformazioni cercate sono dunque descritte da equazioni di primo grado:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases} \quad (6.46)$$

Rispetto alla forma più generale delle possibili trasformazioni lineari, abbiamo tralasciato i termini costanti, che si annullano per la condizione scelta (6.2), secondo cui gli orologi sono sincronizzati allo stesso tempo $t = t' = 0$ quando i due riferimenti coincidono. Ci sono altre semplificazioni che possiamo applicare in base alla geometria specifica dei sistemi di riferimento S e S' . Guardando la figura 6.1,

vediamo che il piano $x'y'$ (luogo dei punti tali che $z' = 0$) coincide sempre con il piano xy ($z = 0$). Vale quindi la condizione

$$z = 0 \Leftrightarrow z' = 0 \quad \text{qualsiasi siano } x, y \text{ e } t, \quad (6.47)$$

che implica l'annullamento di tre su quattro dei coefficienti nella terza equazione:

$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0. \quad (6.48)$$

Analogamente, poiché il piano $x'z'$ coincide sempre con il piano xz ,

$$y = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \quad \text{qualsiasi siano } x, z \text{ e } t, \quad (6.49)$$

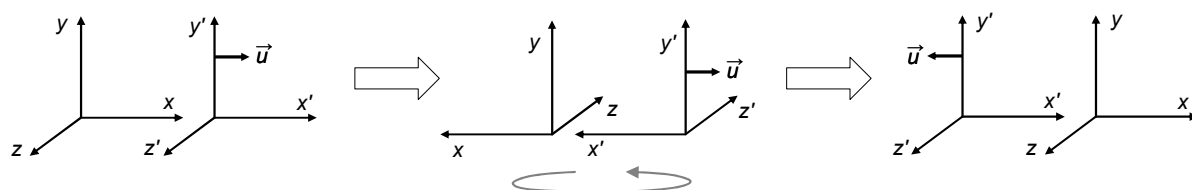
e quindi

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0. \quad (6.50)$$

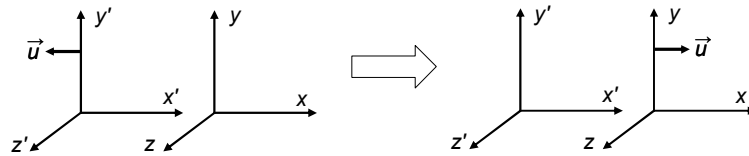
Seconda e terza equazione sono adesso così semplificate:

$$\begin{cases} y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \end{cases} \quad (6.51)$$

Applicando ora il principio di relatività, possiamo determinare a_{22} e a_{33} . Illustriamo il procedimento per a_{22} . Immaginiamo di invertire contemporaneamente le direzioni degli assi x, z, x' e z' . L'equazione per y non cambia. Tuttavia possiamo renderci conto, con alcuni passaggi, che i ruoli di S e S' risultano scambiati. Facciamo seguire all'inversione degli assi una rotazione collettiva dei due riferimenti:



Per l'ipotesi di *isotropia* dello spazio, nulla deve cambiare quando si osserva l'intero sistema da una prospettiva ruotata. Adesso *applichiamo il principio di relatività*: poiché tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti, la traslazione degli osservatori di S' rispetto a S è equivalente alla traslazione, con velocità uguale e opposta, degli osservatori di S rispetto a S' :



Abbiamo così ottenuto una configurazione che differisce da quella di partenza solo per lo scambio tra simboli “apostrofati” e simboli non apostrofati. Se è vera la prima delle (6.51) (che continua a valere perché l’inversione degli assi ha lasciato invariati gli assi y e y'), dev’essere quindi vera anche la

$$y = a_{22}y'. \quad (6.52)$$

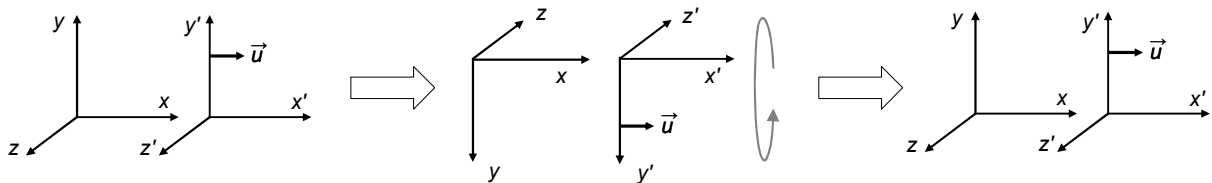
Insieme esse implicano che

$$y' = a_{22}a_{22}y' \Rightarrow a_{22}^2 = 1 \Rightarrow a_{22} = +1, \quad (6.53)$$

dove la scelta del segno tiene conto del fatto che per $t = t' = 0$ gli assi y e y' devono essere sovrapposti e concordi. Con procedimento del tutto analogo, partendo dall’inversione degli assi x, y, x' e y' , si giunge al risultato $a_{33} = +1$. In conclusione, le coordinate y e z , corrispondenti alle due direzioni trasversali rispetto al moto relativo dei due sistemi di riferimento, rimangono invariate: abbiamo ottenuto la seconda e la terza delle equazioni di trasformazione cercate:

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6.54)$$

Le rimanenti equazioni per le coordinate x e t possono essere semplificate utilizzando di nuovo l’ipotesi d’isotropia dello spazio. L’inversione simultanea delle direzioni degli assi y, z, y' e z' porta infatti ad una configurazione che, con un opportuno cambiamento di prospettiva, risulta identica a quella di partenza:



Le equazioni di trasformazione devono quindi essere invarianti per cambiamento simultaneo dei segni di y, z, y' e z' : in altre parole devono essere contemporaneamente valide la relazione

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ \text{e la} \quad x' &= a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z + a_{14}t, \end{aligned} \quad (6.55)$$

così come la

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \quad (6.56)$$

e la $t' = a_{41}x - a_{42}y - a_{43}z + a_{44}t$.

Sommando due a due le precedenti espressioni (ciascuna moltiplicata per 1/2), i termini in y e in z si elidono:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{14}t \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases} \quad (6.57)$$

Possiamo inoltre esprimere i parametri della trasformazione di x in funzione della velocità u di S' rispetto a S , osservando (figura 6.1) che la coordinata x dell'origine di S' ($x' = 0$) è uguale a ut :

$$\begin{aligned} x = ut &\Rightarrow x' = 0 \\ 0 &= a_{11}ut + a_{14}t = (a_{11}u + a_{14})t \\ \Rightarrow a_{11}u + a_{14} &= 0 \Rightarrow a_{14} = -a_{11}u. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Le equazioni di partenza sono ora ridotte alle seguenti:

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases} \quad (6.59)$$

Esse rappresentano la forma più generale di trasformazioni compatibili, allo stesso tempo, con le ipotesi di omogeneità e isotropia dello spazio e con il principio di relatività. Le trasformazioni di Galileo (6.3) ne sono un caso particolare, ottenibile richiedendo, in aggiunta, il sussistere della nozione di tempo assoluto

$$\begin{aligned} \underline{\Delta t'} &= a_{41}\Delta x + a_{44}\Delta t \\ \underline{\Delta t'} &\equiv \underline{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_{41} = 0 \\ a_{44} = 1 \end{cases} \Rightarrow t' = t \quad (\Delta t = 0) \end{aligned} \quad (6.60)$$

e di quella di spazio assoluto

$$\begin{aligned} \underline{\Delta x'} &= a_{11}(\Delta x - u\Delta t) \\ \underline{\Delta x'} &\equiv \underline{\Delta x} \Rightarrow a_{11} = 1. \end{aligned} \quad (6.61)$$

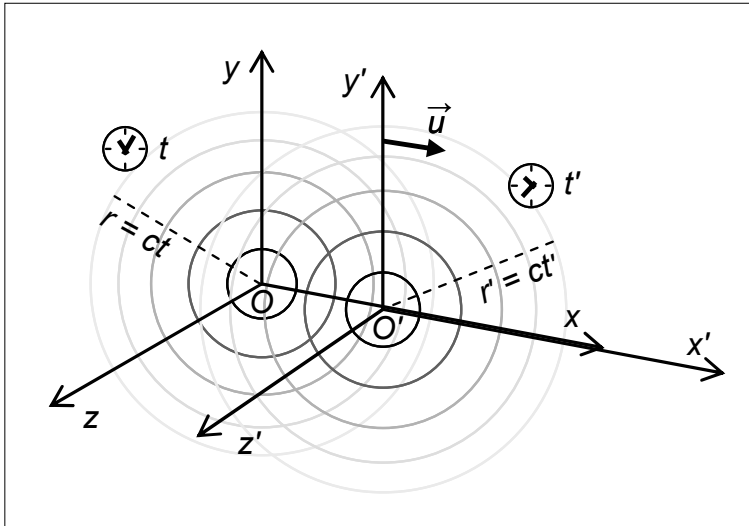


Figura 6.5 – L'esperimento delle sfere di luce.

Il fatto che le trasformazioni di Galileo, come abbiamo visto, non preservino la forma delle equazioni di Maxwell implica che i concetti di spazio assoluto e tempo assoluto sono incompatibili con le leggi dell'elettromagnetismo. Essi violano quindi il principio di relatività nella sua forma *più generale*, che postula l'universalità di *tutti* i fenomeni fisici. La relatività di Einstein sostituisce

queste idee, evidentemente troppo radicali, con un altro tipo di vincolo sulle proprietà dello spazio-tempo: l'invariabilità della velocità della luce nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Non ci resta che imporre che questa proprietà sia soddisfatta dalle (6.59). Per far ciò consideriamo un altro esperimento "pensato". Supponiamo che all'istante $t = t' = 0$, quando i due riferimenti sono sovrapposti, dall'origine comune venga emesso un segnale elettromagnetico, ad esempio un impulso luminoso. Quest'ultimo forma un'onda sferica, che si propaga in tutto lo spazio circostante con la stessa velocità c in entrambi i riferimenti e in ogni direzione (v. figura 6.5 – rimandiamo al paragrafo 6.9 per un commento sulla difficoltà di rappresentare intuitivamente questo processo). Il fronte d'onda, come visto in S , è rappresentato dalla superficie sferica centrata in O e di raggio crescente linearmente col tempo t , secondo l'espressione $r = ct$. In S' la sfera di luce è centrata in O' e si espande accrescendo il proprio raggio proporzionalmente a t' ($r' = ct'$). Valgono quindi, simultaneamente, le relazioni

$$\begin{cases} r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ r'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases} \quad (6.62)$$

Riesprimiamo la seconda di queste equazioni in termini delle coordinate non apostrofate, usando le (6.59):

$$a_{11}^2 (x - ut)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2. \quad (6.63)$$

Sviluppiamo e raccogliamo i termini in x, y, z, t

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(ua_{11}^2 + c^2 a_{41}a_{44})xt = (c^2 a_{44}^2 - u^2 a_{11}^2)t^2 \quad (6.64)$$

e confrontiamo il risultato, termine per termine, con la prima delle (6.62):

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \\ u a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} = 0 \\ c^2 a_{44}^2 - u^2 a_{11}^2 = c^2 \end{cases} \quad (6.65)$$

Per risolvere il sistema, cominciamo col ricavare a_{41} dalla seconda equazione per sostituirlo nella prima. Arrangiando i termini si ottiene

$$c^2 a_{44}^2 a_{11}^2 = u^2 a_{11}^4 + c^2 a_{44}^2. \quad (6.66)$$

Moltiplichiamo poi entrambi i membri della terza equazione per a_{11}^2 :

$$c^2 a_{44}^2 a_{11}^2 = u^2 a_{11}^4 + c^2 a_{11}^2. \quad (6.67)$$

Dal confronto delle due precedenti espressioni otteniamo le soluzioni

$$a_{11}^2 = a_{44}^2 = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \Rightarrow a_{11} = a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (6.68)$$

dove nell'estrarre le radici abbiamo scelto le soluzioni positive (gli assi x e x' , t e t' devono essere concordi). Ricaviamo infine a_{41} dalla seconda equazione:

$$a_{41} = -\frac{u}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (6.69)$$

Sostituendo nella (6.59) le soluzioni (6.68) e (6.69), otteniamo le trasformazioni di Lorentz (6.42), che riscriviamo, definendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (6.70)$$

nella notazione sintetica

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (6.71)$$

Le trasformazioni inverse si possono ottenere, oltre che invertendo algebricamente le precedenti, anche, più semplicemente, applicando il principio di relatività, che impone la *reciprocità* del moto relativo dei due sistemi di riferimento: come abbiamo già visto, scambiare tra loro coordinate apostrofate e coordinate non apostrofate, invertendo contemporaneamente il verso della velocità relativa, deve condurre a relazioni altrettanto valide:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{cases} \quad (6.72)$$

Anticipiamo qui un'importante conseguenza dei postulati della relatività ristretta, della quale rimandiamo la discussione ai paragrafi seguenti. La relazione (6.68) ammette soluzioni reali solo per $u < c$: la velocità della luce rappresenta quindi un limite superiore per la velocità di traslazione tra sistemi di riferimento.

6.8. Il principio di corrispondenza

Prima di analizzare i principali elementi di novità della teoria di Einstein, è importante chiarire in che modo essa raccolga l'eredità della meccanica classica.

La proposizione di nuove teorie segue come naturale linea guida quello che nel linguaggio della fisica moderna è noto come "principio di corrispondenza". Tale principio ricevette una formulazione esplicita quando Niels Bohr lo utilizzò, ai primordi della meccanica quantistica, per sviluppare la sua teoria atomica (1923). Noi lo enunciamo attraverso le parole dello stesso Einstein: "*Ogni teoria, prima o poi, viene smentita. Ma se nella teoria c'è del buono, quel buono dev'essere ripreso e incorporato nella teoria successiva.*"

Tra le idee che guidarono Einstein verso la nuova teoria ci fu certamente la necessità di mantenere una *continuità* con la meccanica di Galileo e Newton, il cui ruolo nella descrizione dei moti dei corpi sulla terra e dei pianeti rimaneva indi-

scusso. Sia la teoria dell'etere, sia i tentativi di Lorentz ed altri di spiegarne gli insuccessi, andavano decisamente nella direzione di creare una *netta separazione* tra meccanica (per la quale continuavano ad essere usate le trasformazioni di Galileo) ed elettromagnetismo (compatibile solo con le trasformazioni di Lorentz, esse stesse considerate alla stregua di concreti effetti elettromagnetici). Einstein comprese invece che le regole con cui le leggi della natura si trasformano da un riferimento all'altro risiedono unicamente nelle proprietà dello spazio-tempo e devono quindi essere uguali per *tutti* i fenomeni. Egli dedusse le nuove equazioni di trasformazione avendo in mente un postulato implicito (una sorta di “principio zero”), secondo cui esse avrebbero dovuto *includere come caso limite* la relatività di Galileo ed essere quindi applicabili alle leggi della meccanica oltre che a quelle dell'elettromagnetismo.

Il confine di validità tra relatività galileiana e relatività einsteiniana è rappresentato da una transizione graduale e continua. Il parametro di transizione è la *velocità*: le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo nel *limite in cui la velocità è piccola rispetto a quella della luce*:

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{array} \right\} \xrightarrow{u/c \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad (6.73)$$

Abbiamo qui utilizzato la condizione $\gamma \xrightarrow{u/c \rightarrow 0} 1$. Il significato della (6.73) è che la descrizione classica del moto dei corpi continua ad essere valida come *approssimazione* della più rigorosa trattazione relativistica. Tale approssimazione è anzi molto buona per la maggior parte delle applicazioni, grazie al fatto che tutti i corpi che si muovono sulla terra e gli stessi pianeti hanno velocità piccolissime rispetto a quella della luce. Abbiamo già visto come una delle velocità più grandi che si incontrano nella meccanica classica, quella della rivoluzione della terra, è solo un decimillesimo di quella della luce. Ci si può fare un'idea quantitativa della lenta e progressiva deviazione delle previsioni della relatività di Einstein da quella di Galileo all'aumentare della velocità del moto guardando la figura 6.6. In essa il “fattore relativistico” o “fattore di Lorentz” $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ è rappresentato graficamente in funzione del rapporto v/c , dove v è la velocità del corpo considerato (ovvero del sistema di riferimento solidale con esso). Il valore del fattore di Lorentz, che tende a 1 per piccoli valori del rapporto v/c e a $+\infty$ per v/c tendente a 1, è un indice di quanto, per una data velocità, le equazioni di Lorentz sono diverse dalle trasformazioni di Galileo. Più grande è il fattore di Lorentz, più gli effetti relativistici diventano non trascurabili. Per l'asse orizzontale abbiamo adottato una scala logaritmica, in modo da rendere tra loro distinguibili i punti corrispondenti

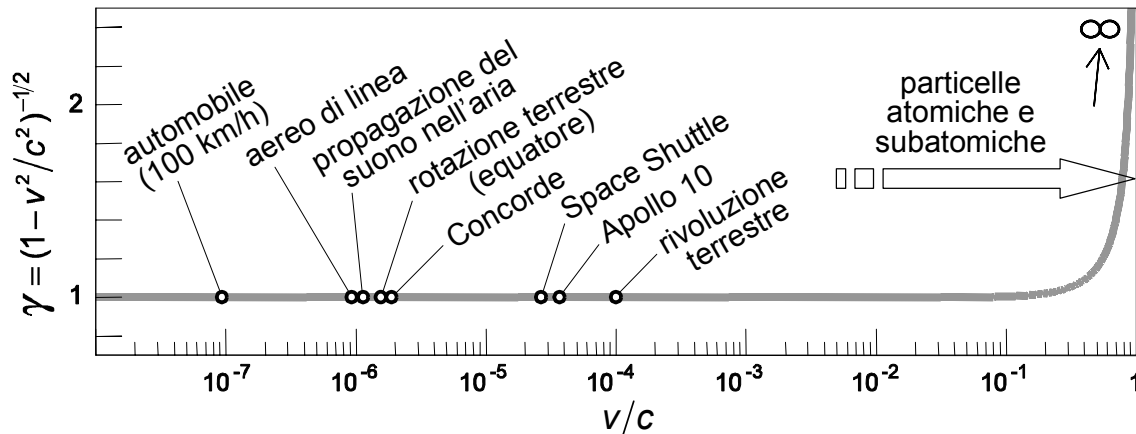


Figura 6.6 – L’andamento del fattore di Lorentz γ , che esprime la deviazione della relatività ristretta rispetto alla meccanica classica, in funzione del rapporto v/c . I punti sovrapposti alla curva corrispondono ad alcuni valori tipici del rapporto v/c .

alle velocità tipiche dell’uomo e dei suoi mezzi di trasporto, di diversi ordini di grandezza inferiori a quella della luce. Infatti, come si può vedere, esiste un grande divario tra il “regime” delle basse velocità, ben descritto dalla meccanica classica, e quello delle velocità “relativistiche” proprie delle particelle subatomiche. Il fatto che l’andamento in funzione di v/c sembri piatto, nella scala adottata, fino a quasi $v/c \approx 10^{-1}$, non deve però fuorviare: anche piccolissime deviazioni di γ da 1, benché non rappresentabili nel grafico, possono condurre al manifestarsi di fenomeni relativistici ben rilevabili.

Al regime dei valori di γ molto diversi da 1 (detto regime “ultra-relativistico”) appartengono le particelle elementari prodotte ed accelerate ad altissime energie nei grandi laboratori della fisica subnucleare, come, per citarne solo alcuni, il CERN (Organizzazione Europea per la Ricerca Nucleare) di Ginevra, il DESY (Deutsches Elektronen-synchrotron) di Amburgo e il Fermilab (Fermi National Accelerator Laboratory) di Chicago. Per funzionare, le macchine usate in questi laboratori devono essere progettate tenendo conto di tutti gli effetti previsti dalla relatività ristretta. L’uso quotidiano che si fa della relatività ristretta e delle trasformazioni di Lorentz negli esperimenti di fisica subnucleare costituisce una delle verifiche più convincenti di questa teoria.

Ma non dimentichiamo che in verità siamo *quotidianamente* circondati da fenomeni prettamente relativistici: la luce e tutti i fenomeni elettromagnetici. Anche questi fenomeni possono essere pensati in termini di oggetti in movimento: i cosiddetti fotoni o “quanti di luce”, che possiedono velocità esattamente uguale a c .

Vogliamo ora ripetere l’esercizio con cui nel paragrafo 6.2 abbiamo dimostrato la non covarianza dell’elettromagnetismo rispetto alle trasformazioni di Galileo, usando questa volta le trasformazioni di Lorentz. Le derivate del potenziale scalare (6.28) diventano adesso (tralasciando qualche passaggio intermedio)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \gamma^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 \frac{u}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 V'}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V'}{\partial z'^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \gamma^2 u^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 u \frac{\partial V'}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2}
\end{aligned} \tag{6.74}$$

L'equazione del potenziale scalare dell'elettromagnetismo è quindi, come atteso, covariante:

$$\begin{aligned}
-\frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\
&= \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} \left[\cancel{\gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)} \right]_{=1} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left[\cancel{\gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)} \right]_{=1} \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2} \\
&= \nabla^2 V' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Abbiamo dunque verificato con un esempio che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate le leggi dell'elettromagnetismo.

Quando applichiamo le trasformazioni di Lorentz all'equazione del potenziale gravitazionale, scopriamo qualcosa di inatteso:

$$\begin{aligned}
4\pi\gamma \rho_M &= \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} \\
&= \gamma^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} - 2\gamma^2 \frac{u}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} \\
&\xrightarrow{u/c \rightarrow 0} \nabla^2 \varphi'
\end{aligned} \tag{6.76}$$

La legge di gravitazione di Newton (di cui, ricordiamo, la precedente equazione è una riscrittura nel linguaggio dei campi) è covariante solo nel limite non relativistico, ma non lo è esattamente e in generale. Bisogna concludere che anch'essa è, in verità, solo un'approssimazione di una teoria più generale.

La relatività di Einstein risolve, da una lato, il problema della non covarianza delle leggi dell'elettromagnetismo e, dall'altro, arriva a mettere in discussione quella che è stata una delle teorie di maggior successo nella storia della fisica, capace di descrivere con apparentemente infallibile accuratezza i moti di tutti i costituenti del sistema solare e di prevedere, ad esempio, il verificarsi delle eclissi con

un anticipo di centinaia di anni. Anche questo problema trova la sua soluzione all'interno stesso dell'opera scientifica di Einstein. E' di dieci anni successiva alla nascita della relatività ristretta la formulazione della *relatività generale*, una nuova e affascinante teoria della gravitazione, di forma covariante, che ottenne immediatamente i suoi primi successi con la spiegazione della precessione dell'orbita di Mercurio, di entità ingiustificabilmente grande secondo la teoria newtoniana, e con la previsione, subito confermata, dell'incurvamento della luce stellare transitante in prossimità del sole. Come esempio dell'importanza attuale della nuova teoria, ci limitiamo a menzionare il fatto che i sistemi di navigazione satellitare (GPS) possono raggiungere la precisione oggi richiesta solo grazie a correzioni nella misura del tempo calcolate con le equazioni della relatività generale. Ma le più profonde implicazioni della relatività generale sulla natura dello spazio-tempo (buchi neri, onde gravitazionali) sfuggono ancora oggi alla possibilità di verifica da parte dell'uomo.

6.9. I “paradossi” della relatività

Ritorniamo ora all'esperimento delle sfere di luce per una considerazione. Questo semplice esempio, forse l'illustrazione più immediata che si può dare del postulato sulla velocità della luce, mette in evidenza come tale postulato sia in realtà piuttosto lontano dalle nostre capacità di rappresentazione intuitiva. Viene infatti spontaneo domandarsi: com'è possibile che gli osservatori dei punti O e O' , mentre si allontanano l'uno dall'altro, abbiano *entrambi* ragione nell'affermare di essere *al centro* della sfera di luce che si espande (figura 6.5)?

Questo dubbio rappresenta uno dei numerosi paradossi con cui la relatività tende a mettere in discussione la nostra idea di spazio-tempo. La parola “paradossi” deve essere qui intesa nel suo significato etimologico di situazioni che vanno al di là del nostro modo di sentire. Ne abbiamo già incontrati due, la relatività della simultaneità e quella delle misure di lunghezza, che riprenderemo in maggior dettaglio nei paragrafi seguenti. La “spiegazione” di questi paradossi è sempre la stessa: il secondo postulato della relatività (che oggi non abbiamo ragione di mettere in discussione di fronte a numerose conferme sperimentali, cominciate con l'esperimento di Michelson-Morley) implica che osservatori di diversi sistemi di riferimento hanno una diversa percezione dello spazio e del tempo.

Poiché, a questo punto, abbiamo già accettato il concetto di relatività della simultaneità (l'esperimento del vagone), l'esempio delle sfere di luce dovrebbe risultare un po' più plausibile se si ragiona nel seguente modo: all'istante t' l'osservatore in O' vede una sfera di luce di raggio r' . In particolare, egli vede la luce raggiungere all'istante t' i punti $+r'$ e $-r'$ sull'asse x' . Ma dal punto di vista di O la sfera di luce *non* raggiunge il punto $+r'$ allo stesso istante t in cui essa raggiunge il punto $-r'$.

E' vero, dunque, che la teoria prevede circostanze che contraddicono il nostro senso comune. Ma non c'è conflitto. Il senso comune non è nient'altro che un'intuizione che ci deriva dall'esperienza quotidiana. Tutti i paradossi della relatività nascono quando osservatori in moto relativo con velocità confrontabili con quella della luce confrontano le proprie esperienze, mentre la velocità massima raggiungibile oggi dall'uomo e dalle sue macchine è ben al di sotto della velocità della luce. Non si tratta quindi di fenomeni di cui possiamo avere un'esperienza diretta paragonabile a quella, seppur straordinaria, dello spettacolo offerto da un'eclissi di sole, o della visione, possibile grazie agli strumenti ottici, della vita microscopica all'interno del tessuto di una foglia.

Nel caso specifico, non ci capiterà mai di vivere nella realtà un'esperienza come quella delle sfere di luce: non potendo noi muoverci, nemmeno con un mezzo, a velocità confrontabili con quella della luce, vedremo infatti il fronte d'onda raggiungere l'infinito senza, praticamente, esserci ancora spostati. In altre parole, gli osservatori O e O' della realtà quotidiana non arrivano mai a considerarsi osservatori "distinti" l'uno dall'altro nel momento dell'osservazione dell'onda luminosa.

Se, nel futuro, capiterà all'uomo di viaggiare tra le stelle con velocità prossime a quella della luce, allora egli sarà nella prospettiva giusta per avere un'esperienza personale di aspetti dello spazio-tempo per noi oggi incomprensibili. In quel momento egli potrà ammirare con i propri occhi la grandezza del mondo descritto dalla teoria di Einstein.

6.10. La velocità limite

Abbiamo già notato in precedenza che il postulato sulla costanza della velocità della luce ha tra le sue conseguenze l'esistenza di un limite superiore per il modulo della velocità (\vec{u}) di traslazione reciproca dei sistemi di riferimento. Il fattore di Lorentz γ non è infatti definito per $|\vec{u}| > c$. Oltretutto esso diverge all'infinito per $|\vec{u}| \rightarrow c$, confermando l'idea che la velocità della luce sia un limite invalicabile. Per comprendere meglio questi aspetti è utile conoscere le equazioni di trasformazione della velocità di un punto materiale. Per ricavarle, scriviamo le trasformazioni di Lorentz in forma differenziale

$$dx' = \gamma(dx - u dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{u}{c^2} dx\right) \quad (6.77)$$

e calcoliamo le velocità come rapporti incrementali:

$$\begin{aligned}
v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - u dt)}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\
v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\
v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dz}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Di nuovo, le trasformazioni inverse si ottengono, per il principio di relatività, cambiando il segno alla velocità di traslazione. Riassumiamo i risultati per le trasformazioni dirette e inverse:

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \\ v_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \\ v_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \end{array} \right. \tag{6.79}$$

E' immediato verificare che nel limite $u/c \rightarrow 0$ si riottengono le leggi di composizione classica della velocità [(6.4) e le ovvie relazioni inverse].

Vediamo ora cosa succede quando si compongono tra di loro due velocità "relativistiche" (cioè abbastanza vicine a quella della luce), considerando alcuni casi rappresentativi, illustrati nella figura 6.7.

1° esempio. Una particella si muove lungo l'asse x del sistema di riferimento S con velocità di modulo $v=0.7c$. S' è in moto rispetto a S con velocità u di modulo $0.5c$. Consideriamo due casi: nel primo sia u diretta in verso concorde con v , nel secondo in verso opposto: $u = \pm 0.5c$. Quanto vale la velocità v' della particella rispetto a S' nei due casi? Usando le trasformazioni di Galileo otterremmo i risultati che l'intuito ci suggerirebbe:

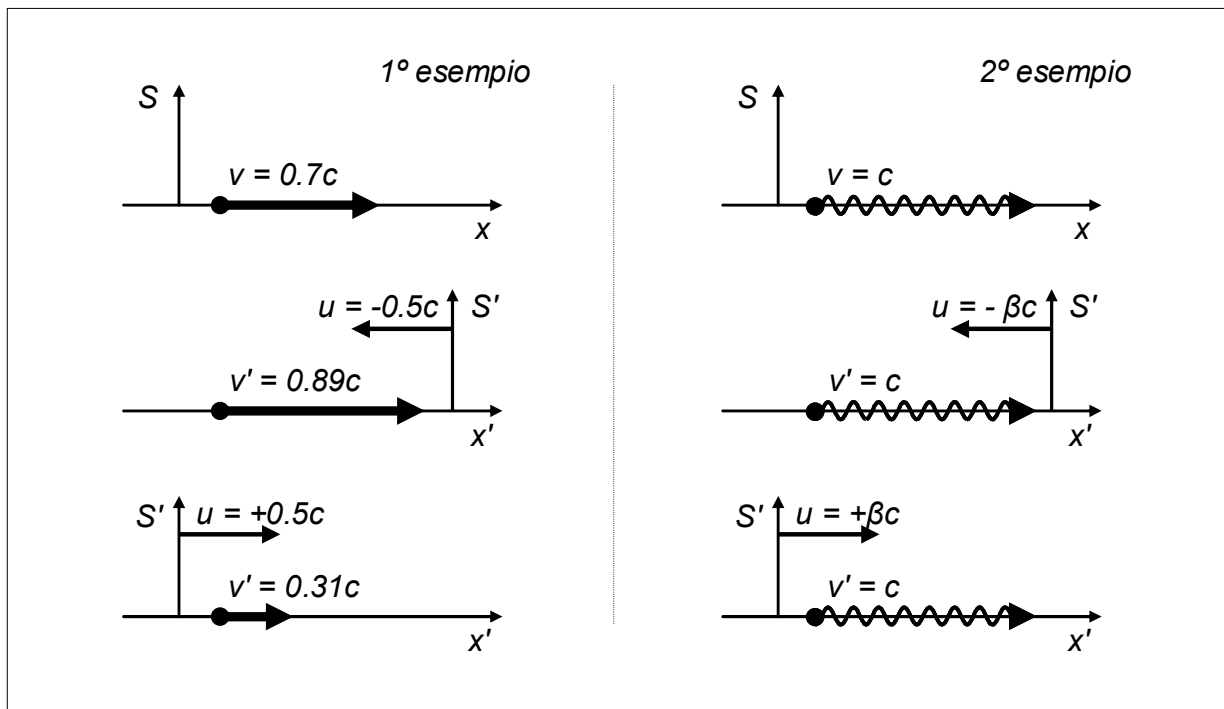


Figura 6.7 – Illustrazione degli esempi discussi nel testo sulla composizione relativistica delle velocità.

$$v'_{\text{Galileo}} = v - u = 0.7c - (\pm 0.5c) = \begin{cases} 0.2c \\ 1.2c \end{cases} \quad (6.80)$$

Applicando invece la legge di composizione relativistica (componente x), troviamo:

$$v'_{\text{Einstein}} = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v} = \frac{0.7c - (\pm 0.5c)}{1 - \frac{(\pm 0.5c)}{c^2}0.7c} = \begin{cases} 0.31c \\ 0.89c \end{cases} \quad (6.81)$$

In particolare, nel secondo caso, la velocità risultante è *minore* di c , contrariamente alla previsione classica: secondo la meccanica relativistica è impossibile, andando velocemente incontro ad un oggetto che si muove, aumentare la propria velocità relativa rispetto ad esso *oltre* la velocità della luce.

2° esempio. Ripetiamo l'esempio precedente nel caso limite in cui una o entrambe le velocità che si compongono siano in modulo proprio uguali a c . Sappiamo già cosa dobbiamo trovare, come diretta conseguenza del postulato della velocità della luce. Verifichiamo, comunque, esplicitamente che le trasformazioni delle velocità rispettano questo principio. Abbiamo in questo caso $v = c$ in S . Possiamo pensare ad esempio all'osservazione di un fotone, particella che si muove appunto con velocità c . Senza specificare numericamente quanto vale la velocità di S' rispetto a S , la indichiamo genericamente con $u = \pm \beta c$, dove β può assumere tutti i valori

compresi tra 0 e 1. Nel caso classico e in quello relativistico troviamo quindi, rispettivamente,

$$v'_{\text{Galileo}} = v - u = c - (\pm\beta c) = (1 \mp \beta) c$$

$$v'_{\text{Einstein}} = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v} = \frac{c - (\pm\beta c)}{1 - \frac{(\pm\beta c)}{c^2}c} = \frac{c(1 \mp \beta)}{1 \mp \beta} = c \quad (6.82)$$

La velocità del fotone vale dunque sempre c nella meccanica relativistica, qualsiasi sia β , cioè in qualsiasi sistema di riferimento in moto rispetto a S . Secondo la meccanica classica, invece, essa dipende dal modulo e dalla direzione della velocità relativa tra i sistemi di riferimento.

La velocità della luce rappresenta quindi una barriera che non può essere oltrepassata nemmeno componendo tra di loro velocità prossime o uguali a quelle della luce. Nell'universo osservato, del resto, non sono mai stati scoperti particelle o segnali che si propagano nel vuoto con velocità superiori a quella della luce.

Abbiamo visto che le differenze tra meccanica relativistica e meccanica newtoniana si annullano quando tutte le velocità sono piccole rispetto a quella della luce. In maniera forse concettualmente più efficace, si può identificare l'essenza della diversità tra le due teorie proprio con il concetto di velocità limite, assente nella meccanica di Newton. Con successive applicazioni delle trasformazioni di Galileo per le velocità, è infatti sempre possibile arrivare a porsi in un sistema di riferimento inerziale in cui la velocità del moto che si sta osservando diventi grande a piacere. D'altra parte, il limite $u/c \rightarrow 0$, che fa passare con continuità dalle trasformazioni di Lorentz a quelle di Galileo, può anche essere riletto come limite in cui la massima velocità consentita, c , tende all'infinito.

Come abbiamo accennato nel paragrafo 6.1, secondo il terzo principio di Newton un corpo che risente di un'influenza esterna è in grado di trasmettere la propria reazione all'istante, indipendentemente dalla distanza alla quale si trova la sorgente dell'interazione. Questa interpretazione del fenomeno dell'interazione tra due corpi è accettabile solo in una teoria che ammetta la presenza di entità fisiche che si propagano con velocità infinita e possano quindi attraversare lo spazio in un tempo nullo. La fisica moderna spiega l'interazione elettromagnetica, quella "debole" e quella nucleare o "forte" con la presenza di particelle mediatrici che vengono scambiate tra gli oggetti interagenti. Ad esempio, l'interazione elettromagnetica tra due particelle cariche consiste, a livello fondamentale, nello scambio di fotoni. Come i fotoni, anche le altre particelle mediatrici (i "bosoni vettori", che trasmettono l'interazione debole, e i "gluoni", che trasmettono l'interazione forte) sono soggette alle stesse limitazioni dello spazio-tempo che regolano il moto delle particelle "materiali" e, in particolare, non possono propagarsi nello spazio con velocità superiore a quella della luce. Nella meccanica relativistica cessa quindi di valere la terza legge della dinamica nella sua formulazione tradizionale, legata alle

idee di azione e reazione. Viene quindi ereditato direttamente come principio quello della conservazione della quantità di moto. Mostriamo in seguito qual è la corretta definizione di quantità di moto che, generalizzando quella classica come richiesto dal principio di corrispondenza, rende relativisticamente covariante il principio di conservazione.

6.11. La contrazione delle lunghezze

Abbiamo già accennato a come la nuova nozione di relatività della simultaneità si rifletta anche sul concetto di misura di lunghezza. Ora che conosciamo le equazioni di trasformazione delle coordinate, possiamo esaminare un po' più in dettaglio questo aspetto.

Consideriamo i soliti sistemi di riferimento S e S' in moto traslatorio rettilineo e uniforme l'uno rispetto all'altro. Supponiamo che in S' sia posta, ferma lungo l'asse x' , un'asta rigida di lunghezza l_0 , le cui estremità coincidano con i punti di ascisse x'_1 e x'_2 . Per gli osservatori di S' la lunghezza dell'asta è

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \quad (6.83)$$

Quanto vale la lunghezza della stessa asta come misurata dagli osservatori del riferimento S , che la vedono traslare davanti a loro con velocità u in direzione dell'asse x ? Per rispondere alla domanda, utilizziamo le espressioni che mettono in relazione le coordinate degli estremi dell'asta nei due sistemi di riferimento:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - ut_1), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - ut_2). \quad (6.84)$$

Compiere "al volo" la misura di un'asta che si muove vuol dire annotare *simultaneamente* le coordinate che i due estremi assumono ad un *qualsiasi* istante t (l'asta è rigida e quindi la sua lunghezza non varia nel tempo):

$$t_1 = t_2 = t. \quad (6.85)$$

Si ha dunque

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - \cancel{ut} - x_1 + \cancel{ut}) = \gamma(x_2 - x_1) \\ l_0 = \gamma l \quad (6.86)$$

$$l = l_0 \gamma^{-1} = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} < l_0$$

Gli osservatori di S misurano quindi una lunghezza *minore* di quella misurata dagli osservatori di S' . Conseguenza generale della teoria della relatività ristretta è quindi che la lunghezza di un corpo misurata da un osservatore rispetto quale il corpo

si muove è *contratta*, nella direzione del moto, del fattore $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - u^2/c^2}$ rispetto alla lunghezza misurata nel riferimento solidale con il corpo. La lunghezza l_0 è detta “lunghezza a riposo” o “lunghezza propria” del corpo. Se un corpo viene visto viaggiare ad una velocità prossima a quella della luce, esso subisce la massima contrazione:

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} \xrightarrow{u \rightarrow c} 0. \quad (6.87)$$

Il lettore avrà già notato che l’entità della contrazione è esattamente quella che fu ipotizzata da Lorentz come tentativo di giustificare l’esito dell’esperimento di Michelson-Morley. Conviene quindi approfondire il significato profondamente diverso di quell’ipotesi. A parte il considerare l’effetto come dovuto ad una sorta d’interazione tra il materiale del corpo in movimento e quello dell’etere, essa assegnava (intenzionalmente) ad uno ed un solo riferimento un ruolo privilegiato. Rivediamo, nell’ottica della teoria dell’etere, il procedimento di misura della lunghezza di un’asta in movimento. Supponiamo prima che *l’asta sia in quiete in un riferimento M che si muove rispetto all’etere (riferimento E)*. L’osservatore M ne misura la lunghezza e trova che essa vale l_0 . L’osservatore E, invece, vede l’asta traslare davanti a lui con velocità u . Per il meccanismo della contrazione di Lorentz, egli misura quindi la lunghezza contratta $l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} < l_0$. Invertendo il ruolo dei due osservatori, *sia adesso l’asta in quiete rispetto all’etere* e sia l_0 la sua lunghezza come misurata dall’osservatore E. L’osservatore M misura la lunghezza dell’asta, vedendola passare davanti a sé, utilizzando un “regolo campione”, che i “laboratori dell’etere” hanno fabbricato certificandone l’unitarietà della lunghezza. Ma il regolo campione, quando viene usato da M, a causa del suo moto rispetto l’etere non è più di lunghezza unitaria: esso si è contratto di un fattore $\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Perciò la misura ottenuta confrontando l’asta (non contratta perché a riposo nell’etere) con il regolo (contratto) fornisce all’osservatore M un valore più grande: $l = l_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2} > l_0$. In conclusione, l’osservatore dell’etere è sempre il solo ed unico osservatore che ha il “privilegio” di vedere *contratti* gli oggetti che si muovono rispetto a lui. Tutti gli altri osservatori vedono invece come *allungati* gli oggetti che si trovano nell’etere.

Nella relatività ristretta la logica è ribaltata. La contrazione delle lunghezze è una sorta di limitazione imposta dalla natura dello spazio-tempo al moto dei corpi, quando questi assumono velocità che si avvicinano a quella massima consentita. Il fenomeno rispetta in pieno il principio della *reciprocità* delle osservazioni compiute da diversi sistemi di riferimento: *ogni* osservatore inerziale vede contratte le lunghezze degli oggetti che si trovano a riposo *nei riferimenti che si muovono rispetto a lui*, in confronto a quelle degli oggetti che egli vede fermi nel *proprio* sistema di riferimento. I sistemi di riferimento rimangono tutti fra loro equivalenti, non c’è un osservatore privilegiato. Può essere utile pensare all’analogia con la

regola della prospettiva: vediamo le persone lontane sempre più piccole di quelle a noi vicine (e di quanto esse stesse si vedano se si guardano allo specchio); contemporaneamente, da lontano siamo noi a sembrare più piccoli.

6.12. La dilatazione dei tempi e il paradosso dei gemelli

Forse più ancora del fenomeno, quasi prospettico, della contrazione delle lunghezze, ci stupisce e ci affascina, sollecitando la nostra immaginazione, il concetto di relatività del tempo. Vediamo ora più in dettaglio quali siano le sue conseguenze.

Riferiamoci di nuovo ai due sistemi in moto reciproco S e S' . Consideriamo la misura della durata di un evento che ha luogo in una posizione x' fissa del riferimento S' . L'orologio posto in x' (fermo rispetto a S') misura il tempo t'_1 quando l'evento ha inizio e t'_2 quando l'evento termina. La durata dell'evento misurata da S' è quindi

$$T_0 = t'_2 - t'_1. \quad (6.88)$$

Vogliamo calcolare come viene misurata la durata dello stesso evento dagli osservatori di S , rispetto al quale il punto in cui si verifica l'evento si muove con velocità \vec{u} . Usiamo le trasformazioni di Lorentz inverse:

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1 \right), \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2 \right). \quad (6.89)$$

Poichè $x'_1 = x'_2 = x'$ (inizio e fine dell'evento hanno luogo per ipotesi nello stesso punto di S'), sottraendo le due equazioni troviamo

$$t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{u}{c^2} x' - t'_1 - \frac{u}{c^2} x' \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) \quad (6.90)$$

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} > T_0$$

In conclusione, un orologio in moto rispetto all'evento ne misura una durata *dilatata* di un fattore γ rispetto a quella misurata dall'orologio "locale". Pensando all'evento come al trascorrere di un intervallo di tempo generico, possiamo quindi dire che *ogni orologio in moto ritarda* rispetto all'orologio locale. Il tempo misurato "sul posto", che scorre sempre più velocemente, è detto "tempo proprio". Lo

stesso intervallo di tempo, misurato da un osservatore che si muove con velocità prossima a quella della luce, tenderebbe addirittura all'infinito.

Come nel caso della contrazione delle lunghezze, l'effetto è completamente reciproco e non determina il privilegio di nessun riferimento rispetto agli altri: *ogni osservatore inerziale* constata che tutti gli orologi in moto rispetto a lui hanno una marcia rallentata rispetto al suo.

Le conseguenze più interessanti di questo fenomeno nascono tuttavia dal fatto che, talvolta, la reciprocità del moto relativo di due sistemi di riferimento può venir meno, quando intervengono effetti di non inerzialità del moto di uno dei due, e il ritardo accumulato dall'orologio che ha viaggiato più velocemente può venire drasticamente alla luce. E' questo il fenomeno che si indica col nome di "paradosso dei gemelli", o, per chi vuole sottolineare che si tratta di un effetto reale e ben compreso e non di una contraddizione concettuale, semplicemente "effetto gemelli". La sua enunciazione tradizionale ha per protagonisti, appunto, due gemelli ed una nave spaziale. Supponiamo che uno di due gemelli parta a bordo di una navicella spaziale e compia un lungo viaggio con velocità costante e prossima a quella della luce, lasciando l'altro gemello sulla Terra. Dopo alcuni anni egli ritorna sulla Terra e si ricongiunge al fratello. Per tutto il tempo in cui è stato sulla navicella, il gemello viaggiatore ha vissuto in un mondo in cui lo scorrere del tempo e tutti i fenomeni, compresi i processi biologici dell'invecchiamento, erano rallentati. Al suo ritorno sulla Terra egli sarà quindi rimasto più giovane del fratello. Se, ad esempio, egli ha viaggiato per dieci anni, secondo quanto indicato dall'orologio della navicella, con una velocità pari a $0.9c$, per il fratello, sulla Terra, saranno trascorsi $10/\sqrt{1-(0.9)^2} = 23$ anni. Può sorgere il dubbio che il ragionamento violi il principio di relatività: dire che il gemello A ha viaggiato rispetto al gemello B equivale a dire che è stato B a viaggiare, con velocità invertita, rispetto ad A . Ma non è così: il principio di relatività vale per i sistemi inerziali; anche solo per partire, invertire la marcia a metà del viaggio e atterrare, il gemello della navicella ha dovuto trasferirsi temporaneamente "a bordo" di sistemi non inerziali, rompendo così irreparabilmente la simmetria speculare del proprio moto rispetto a quello del fratello. Sarà difficile che l'effetto possa un giorno essere sperimentato sugli orologi "biologici" di esseri viventi, data la difficoltà di raggiungere velocità sufficientemente vicine a quella della luce: ad esempio, se nel precedente esempio numerico si utilizzasse la velocità massima dello Space Shuttle, si concluderebbe che, dopo dieci anni, il gemello che ha viaggiato risulta più giovane di un decimo di secondo. Che l'effetto sia reale è tuttavia confermato dall'esito di diversi esperimenti, consistenti, ad esempio, nel confronto dei tempi misurati da un orologio atomico lasciato a terra e da un altro fatto volare a bordo di un aereo. Incidentalmente, questi esperimenti hanno anche confermato l'entità, predetta dalla teoria della relatività generale, di un contributo gravitazionale alla dilatazione del tempo.

I fisici che studiano le particelle elementari verificano quotidianamente l'effetto della dilatazione del tempo. Esiste un esempio tipico che dimostra quanto l'effetto possa essere concreto ed importante. Quando i raggi cosmici provenienti dallo

spazio interagiscono con l'atmosfera terrestre, essi producono particelle chiamate "muoni" (o leptoni μ). I muoni decadono (cioè si disintegrano spontaneamente) dopo un tempo medio *proprio* di sopravvivenza (misurato cioè quando la particella è a riposo in laboratorio) pari a $2.2 \cdot 10^{-6}$ s. *Se non esistesse il fenomeno della dilatazione del tempo*, durante questa breve vita i muoni potrebbero percorrere al massimo (assumendo che essi viaggino proprio alla velocità della luce) una distanza pari a $2.2 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^8 = 660$ m: di quelli contati sulla cima di una montagna, solo una frazione piccolissima potrebbe quindi raggiungere il livello del mare. Di fatto, invece, la quantità di muoni che ce la fanno è di molte volte superiore. Ciò si spiega con il fatto che, *per un osservatore terrestre*, la vita media di un muone risulta notevolmente dilatata, cosicché i muoni percorrono in realtà parecchi chilometri prima di morire.

6.13. La generalizzazione relativistica delle leggi della meccanica

La formulazione relativistica della dinamica del punto materiale può essere costruita attraverso una sorta di metodo induttivo, che procede lungo le seguenti linee guida:

- 1) Viene ereditato dalla meccanica classica il principio d'inerzia, che definisce la classe dei sistemi di riferimento inerziali e ne postula l'esistenza.
- 2) Si richiede alla nuova formulazione di essere covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Essa soddisferà così, automaticamente, il principio di relatività ed il postulato dell'invarianza della velocità della luce.
- 3) Dev'essere rispettato il principio di corrispondenza: le grandezze e le leggi fisiche, nella loro nuova formulazione, devono ricondursi a quelle classiche nel limite di velocità piccole rispetto a quella della luce.

Accenneremo solo ad alcuni aspetti del problema, senza dare una forma rigorosa a tutte le affermazioni. In particolare, la covarianza delle nuove leggi diventa pienamente riconoscibile quando esse vengono tradotte nella notazione matematica dei "quadrivettori", che uniscono in un'unica entità coordinate spaziali e coordinata temporale da un lato, quantità di moto ed energia dall'altro. Tuttavia eviteremo, in questa sede, l'introduzione di nuovi formalismi.

Il punto di partenza è la ricerca di una nuova definizione per la quantità di moto. Da un lato, infatti, abbiamo visto che la seconda legge della dinamica (6.1) è covariante rispetto alle trasformazioni di Galileo, che lasciano invariato il vettore accelerazione e quindi il secondo termine, $d\vec{Q}/dt \equiv m\vec{a}$, dell'equazione. E' immediato verificare, derivando le trasformazioni delle velocità (6.79), che il vettore accelerazione non è, invece, covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Abbiamo inoltre già notato come, nello scegliere la nuova forma della terza legge della di-

namica, si debba rinunciare a quello che nella meccanica classica era il punto di partenza (il concetto di azione e reazione), per adottare direttamente come principio la sua più importante conseguenza, la conservazione della quantità di moto nei sistemi isolati. La definizione classica della quantità di moto di una particella di massa m_0 e velocità \vec{v} è $\vec{Q} = m_0 \vec{v}$. Utilizzando questa definizione e prendendo in considerazione semplici esempi di urti elastici tra particelle identiche di massa m_0 , è possibile dimostrare (ma non lo faremo) che il principio di conservazione della quantità di moto ($m_0 \vec{v}_1 + m_0 \vec{v}_2 =$ vettore costante prima e dopo l'urto) non è, in generale, covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz (mentre lo è, ovviamente, rispetto a quelle di Galileo). La nuova e corretta relazione funzionale tra \vec{Q} e \vec{v} viene quindi ricercata come quella capace di restituire al principio di conservazione la covarianza che, in quanto legge fisica, esso deve possedere. Con questo procedimento induttivo si arriva alla definizione relativistica di quantità di moto di una particella:

$$\vec{Q} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} = m \vec{v} \quad (6.91)$$

Si riesce, quindi, formalmente, a riscrivere la quantità di moto in una forma simile a quella della meccanica classica, definendo la “massa relativistica” o “massa variabile”

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.92)$$

che *dipende dalla velocità* della particella. Essa è legata alla “massa a riposo” o “massa invariante” m_0 attraverso il fattore di Lorentz e si riduce a m_0 nel limite $v/c \rightarrow 0$. La definizione (6.91) preserva, così, il principio di corrispondenza. Viene poi spontaneo generalizzare la seconda legge della meccanica classica (6.1) semplicemente sostituendo a \vec{Q} la sua espressione relativistica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} [m(v) \vec{v}]. \quad (6.93)$$

In meccanica classica l'energia cinetica T di un punto materiale avente velocità \vec{v} è uguale al lavoro fatto dalla forza totale \vec{F} agente sulla particella per farne aumentare la velocità da zero al valore $|\vec{v}|$ (teorema delle forze vive). Mantenendo, anche in relatività, la stessa definizione per l'energia cinetica, avremo

$$\begin{aligned}
 dT &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} dt = d(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = (m d\vec{v} + \vec{v} dm) \cdot \vec{v} \\
 &= m\vec{v} \cdot d\vec{v} + v^2 dm.
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

Eleviamo ora al quadrato la (6.92),

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \frac{m_0^2 c^2}{c^2 - v^2}, \\
 m^2 c^2 - m^2 v_x^2 - m^2 v_y^2 - m^2 v_z^2 &= m_0^2 c^2,
 \end{aligned} \tag{6.95}$$

e differenziamo l'espressione risultante membro a membro ($m_0^2 c^2$ è costante):

$$2mc^2 dm - 2mv_x^2 dm - 2m^2 v_x dv_x - 2mv_y^2 dm - 2m^2 v_y dv_y - 2mv_z^2 dm - 2m^2 v_z dv_z = 0. \tag{6.96}$$

Dividendo per $2m$ e raccogliendo, otteniamo:

$$c^2 dm = m\vec{v} \cdot d\vec{v} + (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dm = m\vec{v} \cdot d\vec{v} + v^2 dm. \tag{6.97}$$

Calcoliamo quindi l'energia cinetica della particella integrando la (6.94):

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{v=0}^v (m\vec{v} \cdot d\vec{v} + v^2 dm) = \int_{m(v=0)}^{m(v)} c^2 dm = \int_{m_0}^m c^2 dm \\
 &= mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2.
 \end{aligned} \tag{6.98}$$

Verifichiamo ora che nel limite $v/c \ll 1$ si riottienga l'espressione classica dell'energia cinetica. Per far ciò utilizziamo un'approssimazione che un teorema dell'analisi matematica sull'espansione in serie delle funzioni derivabili ci fornisce:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{per } v/c \ll 1. \tag{6.99}$$

Sostituendo nella (6.98), otteniamo immediatamente il risultato atteso:

$$T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \xrightarrow{v/c \ll 1} \frac{1}{2} m_0 v^2. \tag{6.100}$$

Il principio di corrispondenza è rispettato. Notiamo anche che nel limite opposto, cioè per $v \rightarrow c$, l'energia cinetica tende all'infinito: in accordo con il concetto di velocità limite, occorre un lavoro infinito per portare una particella alla velocità della luce.

Rivediamo ora la nuova legge (6.93), generalizzazione del secondo principio di Newton, che in meccanica relativistica descrive i moti accelerati dal punto di vista dinamico. Sviluppiamo la derivata della quantità di moto:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt}[m(v)\vec{v}] = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm(v)}{dt}\vec{v} \\ &= m\vec{a} + \frac{dm(v)}{dt}\vec{v}.\end{aligned}\tag{6.101}$$

Poiché, in generale, il modulo della velocità v in un moto accelerato dipende dal tempo, anche la massa relativistica è una funzione del tempo e il secondo termine nel membro destro dell'equazione è non nullo. Utilizzando la relazione $\vec{F} \cdot \vec{v} dt = c^2 dm$ ricavabile confrontando la (6.94) con la (6.97) (quindi $dm/dt = \vec{F} \cdot \vec{v} / c^2$) abbiamo

$$\vec{F} - \frac{1}{c^2}(\vec{F} \cdot \vec{v})\vec{v} = m\vec{a}.\tag{6.102}$$

Dunque, in dinamica relativistica l'accelerazione non ha, in generale, la stessa direzione della forza che la produce. La relazione funzionale tra forza e accelerazione viene complicata, rispetto alla meccanica classica, dalla presenza di un termine dipendente dalla velocità.

Analizziamo ora l'espressione dell'energia cinetica (6.98): vi compare la differenza tra un termine che dipende dalla velocità ed un termine costante. Il primo termine è quello che viene identificato con l'*energia totale relativistica* di una particella libera:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m c^2.\tag{6.103}$$

L'energia totale è quindi uguale alla somma dell'energia cinetica e del termine costante $m_0 c^2$:

$$E = T + m_0 c^2.\tag{6.104}$$

La quantità $m_0 c^2$ è detta *energia a riposo*, poiché rappresenta l'energia che la particella possiede quando la sua velocità è nulla. Il fatto che anche una particella priva di velocità possieda un'energia non nulla non è in contrasto con la meccanica

classica, in cui l'energia è definita a meno di una costante arbitraria (il teorema della conservazione dell'energia meccanica pone un vincolo sulla *variazione* dell'energia, non sul suo valore assoluto). La relatività fissa il valore di tale costante attribuendole un significato ben definito, quello di quantità di energia contenuta nella massa della particella. Una parte dell'energia a riposo, o tutta, può trasformarsi in energia cinetica o in un'altra forma di energia. L'equazione (6.104) stabilisce infatti una nuova legge di conservazione dell'energia, che racchiude in sé e generalizza le due leggi classiche di conservazione della massa e conservazione dell'energia meccanica, non più valide singolarmente. Massa ed energia sono ora equivalenti, manifestazioni della stessa entità fisica. Anche se dimensionalmente non sono la stessa cosa, esse differiscono solo per il quadrato della costante universale c . Nella fisica delle alte energie è d'uso utilizzare addirittura la stessa unità di misura per le due quantità, sottintendendo il fattore c^2 che permette di passare dall'una all'altra. Nei processi, tipicamente relativistici, che coinvolgono nuclei o particelle subnucleari le trasformazioni di energie a riposo in energia cinetica avvengono infatti continuamente. Ad esempio, una particella può decadere in due particelle più leggere e più veloci: in questo caso, parte dell'energia a riposo della particella madre è trasformata in energia cinetica.

L'equazione di equivalenza tra massa ed energia (6.103) è senza dubbio la conseguenza più nota della relatività di Einstein, e non ingiustificatamente. Essa fornisce la chiave per la comprensione dei più fondamentali processi dell'universo, dal big bang al risplendere del sole. Ma, soprattutto, le sue implicazioni hanno condizionato l'evoluzione della scienza e della tecnologia del ventesimo secolo, fino a produrre conseguenze capaci di cambiare il corso della storia: il fungo atomico di Hiroshima ne costituisce la più sconvolgente manifestazione. Senza la sua cognizione non esisterebbero oggi le tecniche di datazione dei reperti archeologici e le tecnologie spaziali, mentre la diagnostica medica, la ricerca nel campo della fisica degli acceleratori e, naturalmente, le tecniche di produzione di energia sarebbero ancora al loro precedente stadio evolutivo.

Come esempio di applicazione della famosa formula di Einstein, consideriamo una delle possibili reazioni di fissione nucleare che avvengono all'interno del reattore di una centrale per la produzione di energia. Quando un neutrone "lento" (cioè avente energia cinetica trascurabile rispetto alla propria energia a riposo) è assorbito da un nucleo fermo di uranio-235 (^{235}U), quest'ultimo ha un'elevata propensione a rompersi in due "frammenti", nuclei più piccoli, per esempio di bario-141 (^{141}Ba) e kripton-92 (^{92}Kr), rilasciando inoltre alcuni neutroni, in questo caso tre (v. figura 6.8). Detta T l'energia cinetica posseduta dai prodotti della reazione, la conservazione dell'energia totale è descritta dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} E_{\text{iniziale}} &= m_0^{235\text{U}} c^2 + m_0^{\text{neutrone}} c^2 \\ = E_{\text{finale}} &= m_0^{141\text{Ba}} c^2 + m_0^{92\text{Kr}} c^2 + 3m_0^{\text{neutrone}} c^2 + T. \end{aligned} \quad (6.105)$$

L'energia cinetica T prodotta nella reazione può quindi essere calcolata come diminuzione della massa totale:

$$\begin{aligned} T &= -\Delta m_{\text{TOT}} c^2 \\ &= m_0^{235\text{U}} c^2 + m_0^{\text{neutrone}} c^2 - \left[m_0^{141\text{Ba}} c^2 + m_0^{92\text{Kr}} c^2 + 3m_0^{\text{neutrone}} c^2 \right] \quad (6.106) \\ &\cong 3 \cdot 10^{-11} \text{ J.} \end{aligned}$$

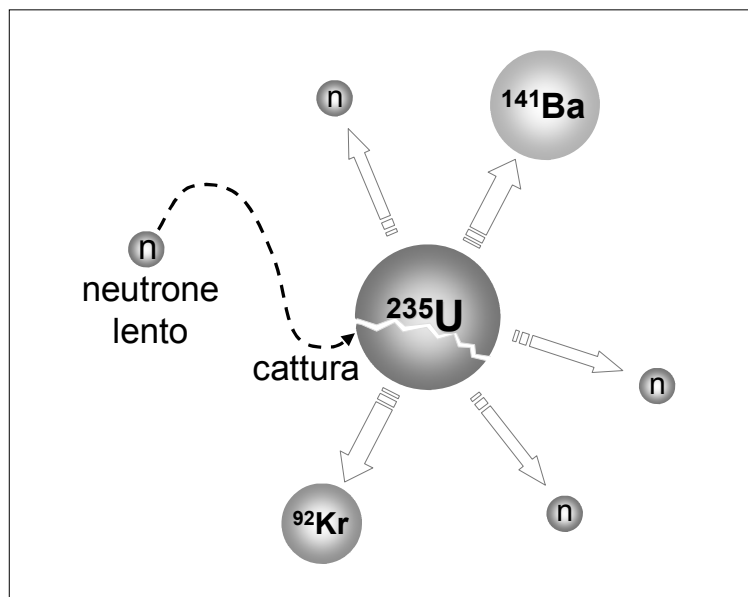


Figura 6.8 – Una possibile reazione di fissione dell'uranio-235.

Ogni singola reazione di fissione genera questa quantità di energia, piccola rispetto all'energia a riposo del nucleo di uranio (circa $3.5 \cdot 10^{-8}$ J), ma enorme rispetto, ad esempio, ai circa $6.5 \cdot 10^{-19}$ J posseduti da una molecola di biossido di carbonio prodotta nella combustione di petrolio o carbone. Nel processo a catena in cui i neutroni prodotti da ciascuna fissione innescano nuove fissioni, l'energia prodotta complessivamente nel reatto-

re raggiunge le proporzioni necessarie allo sfruttamento da parte delle attività umane. L'energia cinetica dei prodotti della fissione si trasforma rapidamente in calore a causa delle frequenti collisioni che essi subiscono con la materia circostante. Il calore trasforma acqua in vapore e quest'ultimo muove le turbine che producono energia elettrica. Al termine del ciclo, la piccola energia estratta dalla massa di un nucleo contribuisce ad animare la vita di un'intera città. E gli abitanti della città sperimentano così ogni giorno, inconsapevolmente, la potenza della teoria di Einstein.