Computer Art con i Frattali di Newton

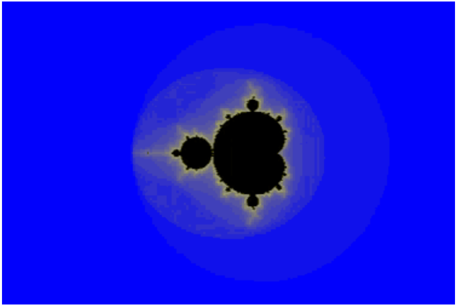
Antonella Falini (antonella.falini@uniba.it)

Che cos'è la "Computer Art"?

- È una forma artistica che utilizza il computer o per la rappresentazione o per il processo di produzione creativo.
- Nel nostro caso utilizzeremo un software predisposto per entrambi gli obiettivi.
- Nella fattispecie, l'implementazione di una procedura prettamente matematica utilizzata in origine per uno scopo specifico, avrà un risvolto interessante come prodotto artistico digitale.

Che cos'è un frattale?

- Il termine *frattale* viene coniato dal matematico Benoît Mandelbrot nel 1975 nel suo libro: *Frattali: Forma, Caso e Dimensione*.
- Si tratta di un *ente geometrico* dotato di alcune proprietà:
  - **autosimilarità** o *quasi* autosimilarità, le caratteristiche essenziali vengono preservate in qualunque scala di grandezza;
  - **infinito** livello di dettaglio;
  - dimensione non intera;
  - non differenziabilità.



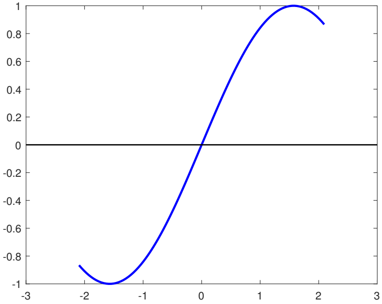
- I frattali di Newton vengono generati mediante l'uso del metodo di Newton.

Il metodo di Newton

Che cos' è? A cosa serve?

- Il metodo di Newton-Raphson è un procedimento *iterativo* utilizzato nella ricerca e nel calcolo degli *zeri di funzione*.

- Data una funzione polinomiale $f(x)$ di un certo grado d, uno *zero* di f è un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.
- Questo significa che $\bar{x}$ è una soluzione dell'equazione polinomiale $f(x) = 0$.
- Osserviamo la figura: la curva blu è il grafico di una funzione $f(x)$.
- I punti dove la curva interseca l'asse orizzontale sono *gli zeri* di $f(x)$.

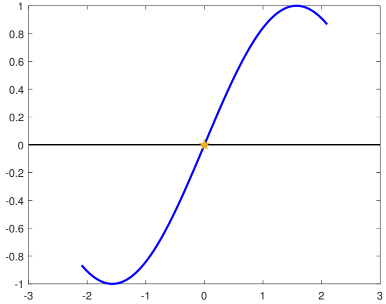


Il metodo di Newton

Che cos' è? A cosa serve?

- Il metodo di Newton-Raphson è un procedimento *iterativo* utilizzato nella ricerca e nel calcolo degli *zeri di funzione*.

- Data una funzione polinomiale $f(x)$ di un certo grado d, uno *zero* di f è un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.
- Questo significa che $\bar{x}$ è una soluzione dell'equazione polinomiale $f(x) = 0$.
- Osserviamo la figura: la curva blu è il grafico di una funzione $f(x)$.
- I punti dove la curva interseca l'asse orizzontale sono *gli zeri* di $f(x)$.

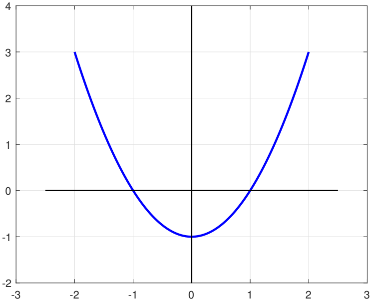


Il metodo di Newton

Che cos' è? A cosa serve?

- Il metodo di Newton-Raphson è un procedimento *iterativo* utilizzato nella ricerca e nel calcolo degli *zeri di funzione*.

- Data una funzione polinomiale $f(x)$ di un certo grado d, uno *zero* di f è un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.
- Questo significa che $\bar{x}$ è una soluzione dell'equazione polinomiale $f(x) = 0$.
- Osserviamo la figura: la curva blu è il grafico di una funzione $f(x)$.
- I punti dove la curva interseca l'asse orizzontale sono *gli zeri* di $f(x)$.

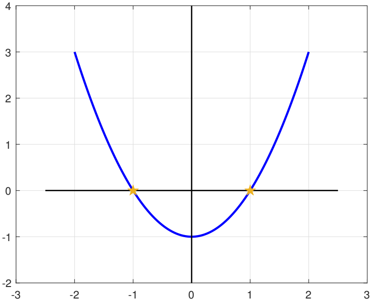


Il metodo di Newton

Che cos' è? A cosa serve?

- Il metodo di Newton-Raphson è un procedimento *iterativo* utilizzato nella ricerca e nel calcolo degli *zeri di funzione*.

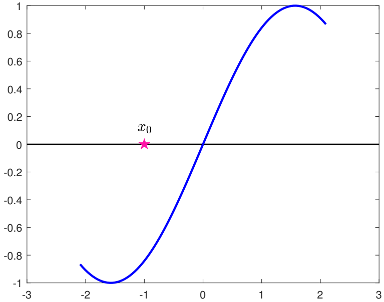
- Data una funzione polinomiale $f(x)$ di un certo grado d, uno *zero* di f è un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.
- Questo significa che $\bar{x}$ è una soluzione dell'equazione polinomiale $f(x) = 0$.
- Osserviamo la figura: la curva blu è il grafico di una funzione $f(x)$.
- I punti dove la curva interseca l'asse orizzontale sono *gli zeri* di $f(x)$.



Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

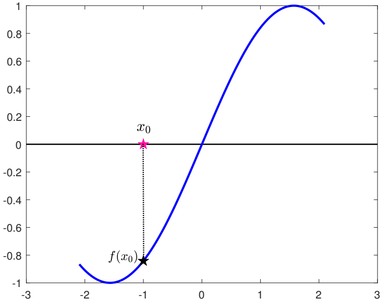


1) Scegliamo un punto iniziale x_0.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

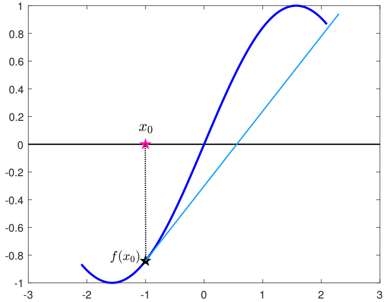


2) Prendiamo l'immagine di x_0 sul grafico della funzione f.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

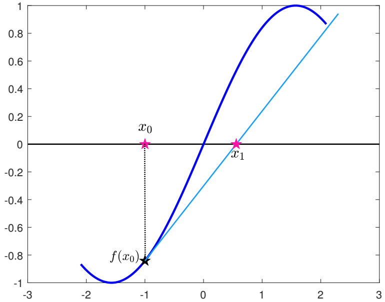


3) Costruiamo la retta tangente.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

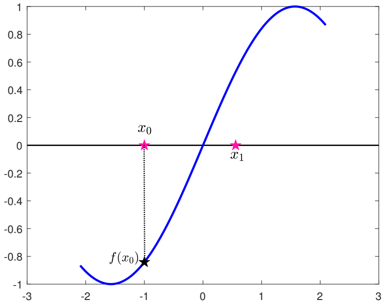


4) Denotiamo con x_1 l'intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

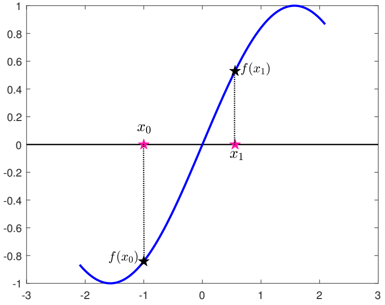


1) Iteriamo la procedura appena descritta, cominciando adesso dal nuovo punto x_1.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

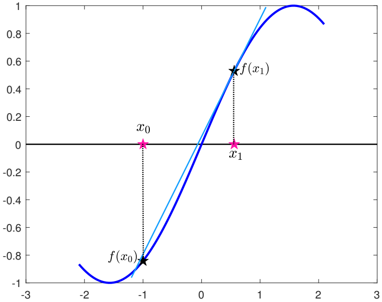


2) Prendiamo l'immagine di x_1 sul grafico della funzione f.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.

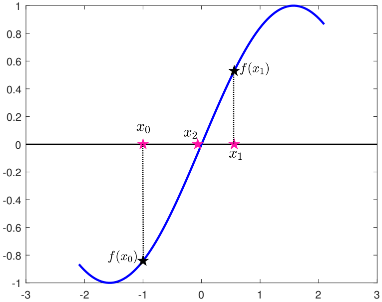


3) Costruiamo la retta tangente.

Il metodo di Newton

Come funziona?

- Il metodo di Newton viene anche detto metodo delle tangenti.
- Prendiamo una funzione $f(x)$ che abbia un unico zero nel punto $\bar{x} = 0$.



4) Denotiamo con x_2 l'intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse.

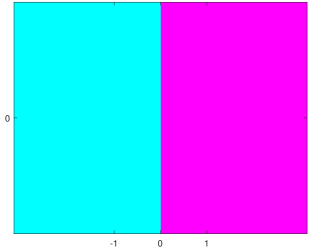
- Con il metodo di Newton viene prodotta una sequenza di valori: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$
- Come facciamo a sapere se abbiamo raggiunto la soluzione cercata?
- La scelta del punto iniziale x_0 è fondamentale:
  - Quando il punto iniziale non permette di raggiungere la soluzione cercata si parla di *non convergenza*.
- A volte è necessario iterare il metodo un numero considerevole di volte.
- Il procedimento viene arrestato quando:
  - la distanza fra due punti successivi $|x_n - x_{n-1}|$ è “sufficientemente piccola”;
  - viene raggiunto un numero massimo di iterazioni, stabilito a priori.

I frattali di Newton

- I frattali di Newton si ottengono applicando il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di funzioni nel *piano complesso*.
- Il piano complesso è come un piano cartesiano dove sull'asse orizzontale mettiamo i numeri *reali* e sull'asse verticale mettiamo i numeri *immaginari*.
- I numeri immaginari sono come i numeri reali, ma li denotiamo aggiungendo la lettera i.
- I numeri complessi permettono di dare significato alle radici n-esime con n pari di numeri negativi. Per esempio: $\sqrt{-1}$; $\sqrt[4]{-3}$, ecc..
- I numeri complessi permettono di trovare tutte le d soluzioni delle equazioni polinomiali di qualunque grado d esse siano.

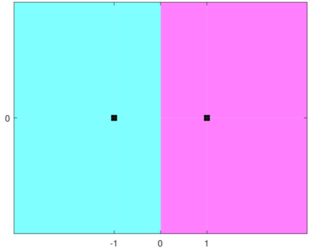
Un primo esempio

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^2 - 1$.
- Gli zeri di f sono $\bar{z}_1 = -1$ e $\bar{z}_2 = 1$, in quanto $f(\bar{z}_1) = f(\bar{z}_2) = 0$.
- Coloriamo di azzurro tutti i punti del piano complesso che convergono alla soluzione $\bar{z}_1$ mediante il metodo di Newton.
- Coloriamo di magenta tutti i punti del piano complesso che convergono alla soluzione $\bar{z}_2$ mediante il metodo di Newton



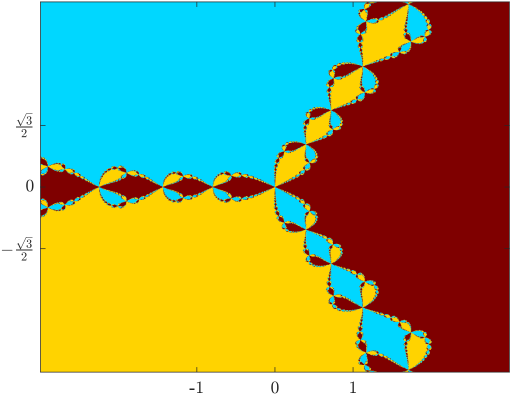
Un primo esempio

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^2 - 1$.
- Gli zeri di f sono $\bar{z}_1 = -1$ e $\bar{z}_2 = 1$, in quanto $f(\bar{z}_1) = f(\bar{z}_2) = 0$.
- Coloriamo di azzurro tutti i punti del piano complesso che convergono alla soluzione $\bar{z}_1$ mediante il metodo di Newton.
- Coloriamo di magenta tutti i punti del piano complesso che convergono alla soluzione $\bar{z}_2$ mediante il metodo di Newton



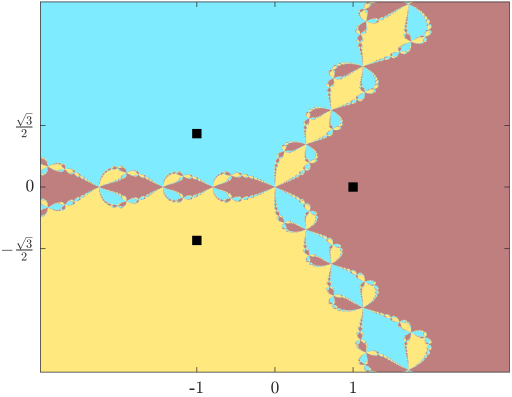
Esempi: convergenza

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 1$.
- La f data ha grado 3, quindi ci sono 3 zeri: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$
- Scegliamo quindi tre colori per identificare i punti del piano complesso che convergono rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mediante il metodo di Newton.



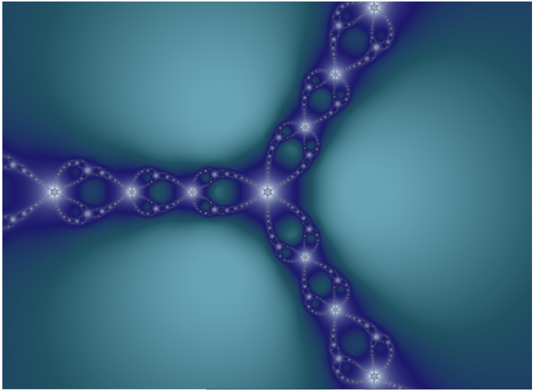
Esempi: convergenza

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 1$.
- La f data ha grado 3, quindi ci sono 3 zeri: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$
- Scegliamo quindi tre colori per identificare i punti del piano complesso che convergono rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mediante il metodo di Newton.



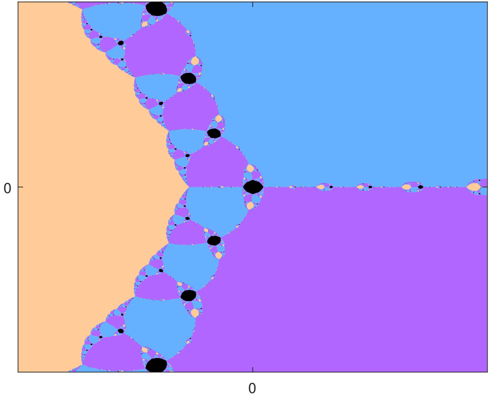
Esempi: convergenza

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 1$.
- Possiamo anche scegliere di colorare i punti del piano complesso in base al numero di iterazioni impiegate per raggiungere la convergenza.



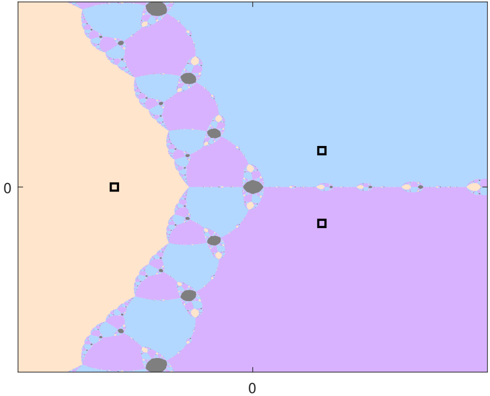
Esempi: NON convergenza

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 2z + 2$
- Anche in questo caso ci sono 3 zeri: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$.
- Scegliamo quindi tre colori per identificare i punti del piano complesso che convergono rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mediante il metodo di Newton.



Esempi: NON convergenza

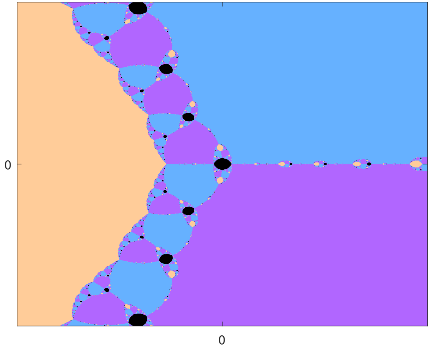
- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 2z + 2$
- Anche in questo caso ci sono 3 zeri: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$.
- Scegliamo quindi tre colori per identificare i punti del piano complesso che convergono rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mediante il metodo di Newton.



Esempi: NON convergenza

- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 2z + 2$
- Anche in questo caso ci sono 3 zeri: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$.
- Scegliamo quindi tre colori per identificare i punti del piano complesso che convergono rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mediante il metodo di Newton.

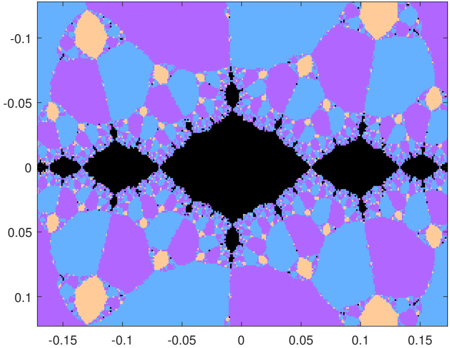
- Il colore nero indica quei punti che non raggiungono nessuno degli zeri cercati mediante il metodo di Newton.
- Siamo quindi in una situazione di *non convergenza*.



Esempi: NON convergenza

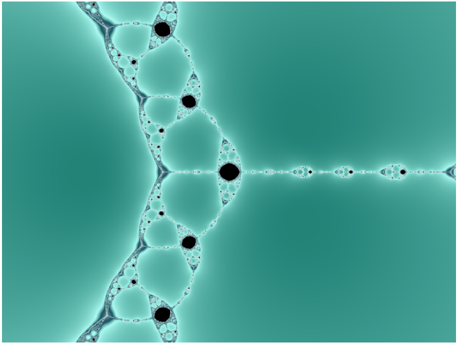
- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 2z + 2$
- Anche in questo caso ci sono 3 zeri: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$.
- Scegliamo quindi tre colori per identificare i punti del piano complesso che convergono rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mediante il metodo di Newton.

- Il colore nero indica quei punti che non raggiungono nessuno degli zeri cercati mediante il metodo di Newton.
- Siamo quindi in una situazione di *non convergenza*.



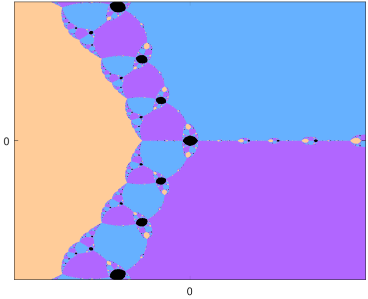
Esempi: NON convergenza

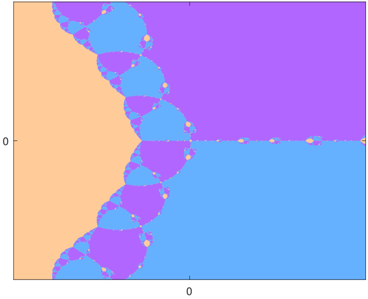
- Analizziamo la funzione $f(z) = z^3 - 2z + 2$
- Coloriamo i punti del piano complesso in base al numero di iterazioni impiegate per raggiungere la convergenza.
- Nelle zone di non convergenza, lasciamo il colore nero.



Esempi: dalla *non* convergenza alla *convergenza*

- Per “correggere” il nostro metodo è possibile introdurre un parametro R detto di *rilassamento* o di *smorzamento*.
- Analizziamo la funzione precedente e poniamo $R = 1.05$

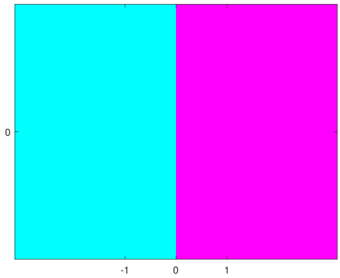




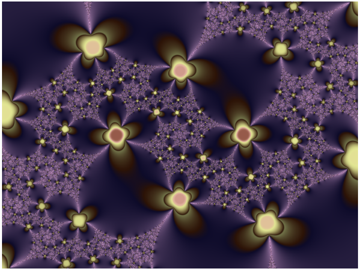
- Senza R.
- $R = 1.05$

Esempi: dalla *convergenza* alla *non* convergenza

- Cosa succede se utilizziamo il parametro R anche in situazioni di convergenza?
- Prendiamo la funzione $f(z) = z^2 - 1$ e consideriamo $R = 1 + i$



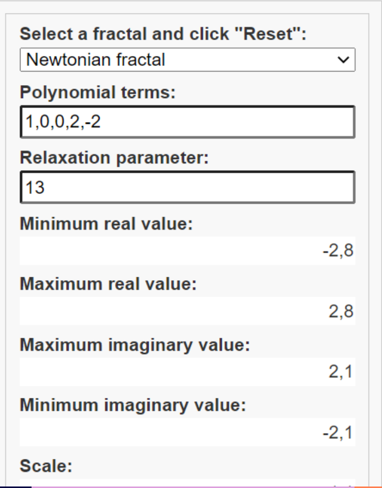
- La convergenza si ottiene senza utilizzare R.



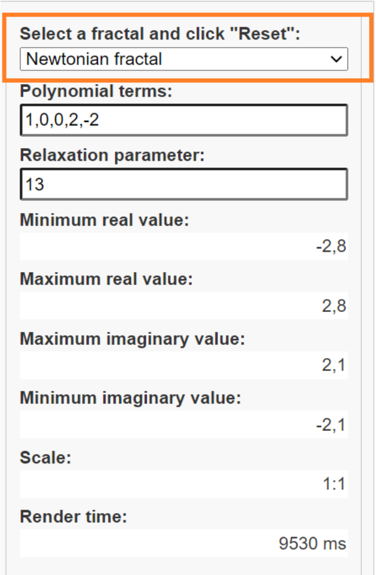
- Con $R = 1 + i$ non si ottiene convergenza.

Creiamo dei frattali di Newton

- Colleghiamoci al seguente link:
  `http://usefuljs.net/fractals/index.html?`
- Apparirà la schermata seguente:

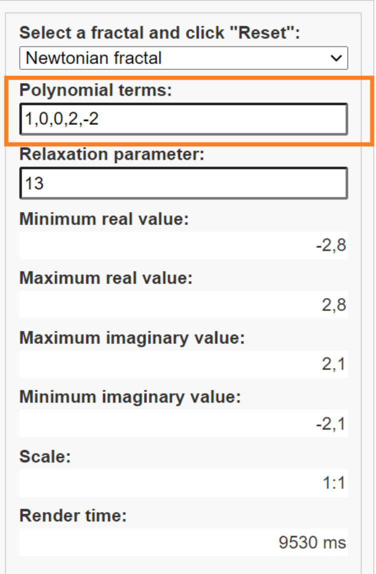


Creiamo dei frattali di Newton



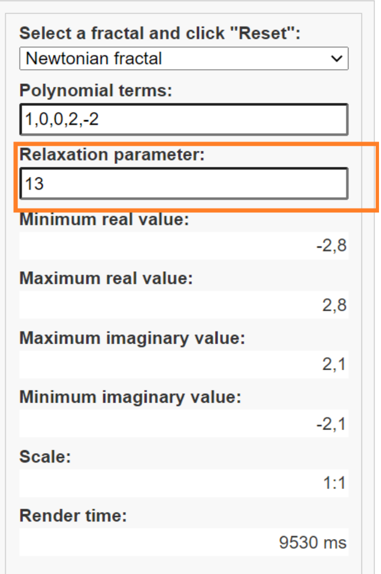
- Possiamo selezionare diversi tipi di frattali dal menù a tendina.

Creiamo dei frattali di Newton



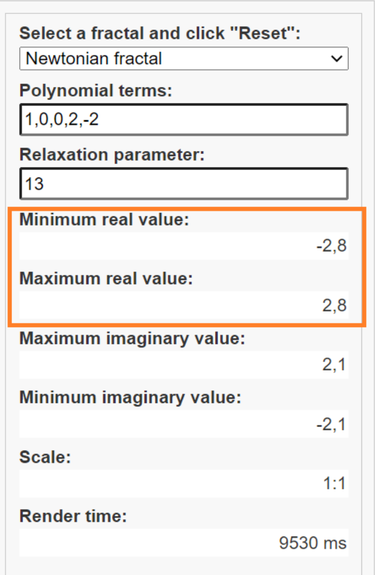
- Dobbiamo scrivere in ordine i coefficienti corrispondenti alle potenze monomiali.
  Esempio: sia $f(z) = z^4 + 2z - 2$
  Le potenze monomiali sono: $\{z^4, z^3, z^2, z^1, z^0\}$
  I coefficienti corrispondenti sono: $1, 0, 0, 2, -2$.

Creiamo dei frattali di Newton



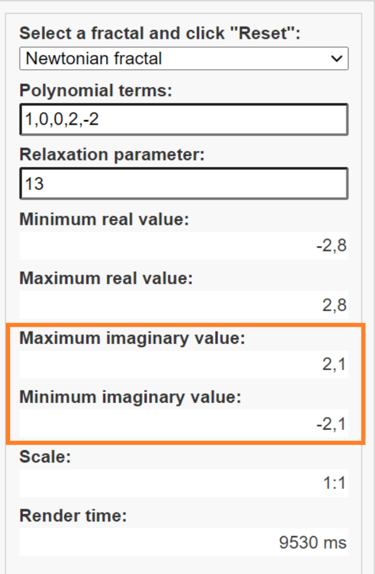
- È il valore del parametro R di smorzamento.

Creiamo dei frattali di Newton



- Indicano la “larghezza” della finestra grafica.

Creiamo dei frattali di Newton



- Indicano l'"altezza" della finestra grafica.

Esempi conclusivi

1) Visualizzare il frattale della funzione $f(z) = z^3 - 1$ con $R = 1 + i$.
    - Cosa succede cambiando il numero di iterazioni?
2) Visualizzare i frattali delle seguenti funzioni polinomiali:
   $\mathrm{f(z)} = \mathrm{z}^8 + 15z^4 - 16 \quad \mathrm{R} = 2$
   $\mathrm{f(z)} = \mathrm{z}^4 + 2z - 2 \quad \mathrm{R} = 13$