La sezione aurea: miti, leggende e qualche verità "matematica"

Mirella Cappelletti Montano
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bari "A. Moro"
mirella.cappellettimontano@uniba.it

LA SEZIONE AUREA: DEFINIZIONE

La sezione aurea è una delle costanti matematiche che più hanno affascinato l'uomo sin dalla sua scoperta, presumibilmente nel VI sec. a. C. ad opera dei Pitagorici.

Come si definisce la sezione aurea?

Supponiamo di voler dividere un segmento AB in due parti, in maniera tale che valga la seguente proporzione

$$AB : AC' = AC' : C'B$$

Il rapporto

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC'}{C'B}$$

rimane costante qualunque sia la lunghezza di AB e questa costante, indicata con φ, prende il nome di **sezione aurea, rapporto aureo, divina proporzione**….

Quanto vale φ?

Supponiamo che $C'B = 1$ e $AC' = x$; allora il rapporto precedente diventa

$$\frac{x+1}{x} = x$$

Il valore della sezione aurea si ottiene quindi risolvendo l’equazione

$$x^2 - x - 1 = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

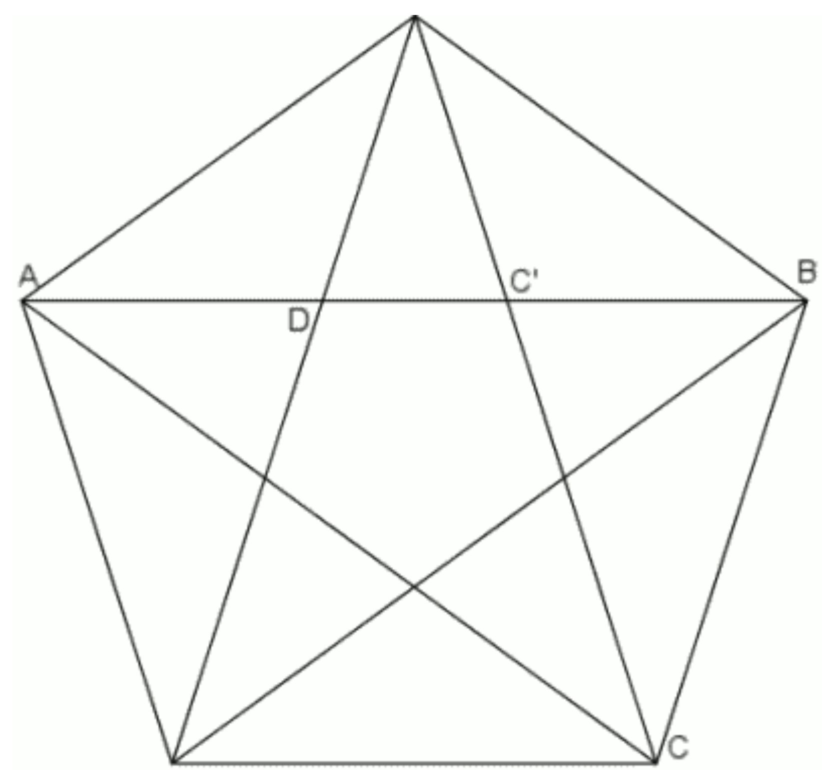
In particolare, la sezione aurea l’unica soluzione positiva della (1) e vale

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}68033...$$

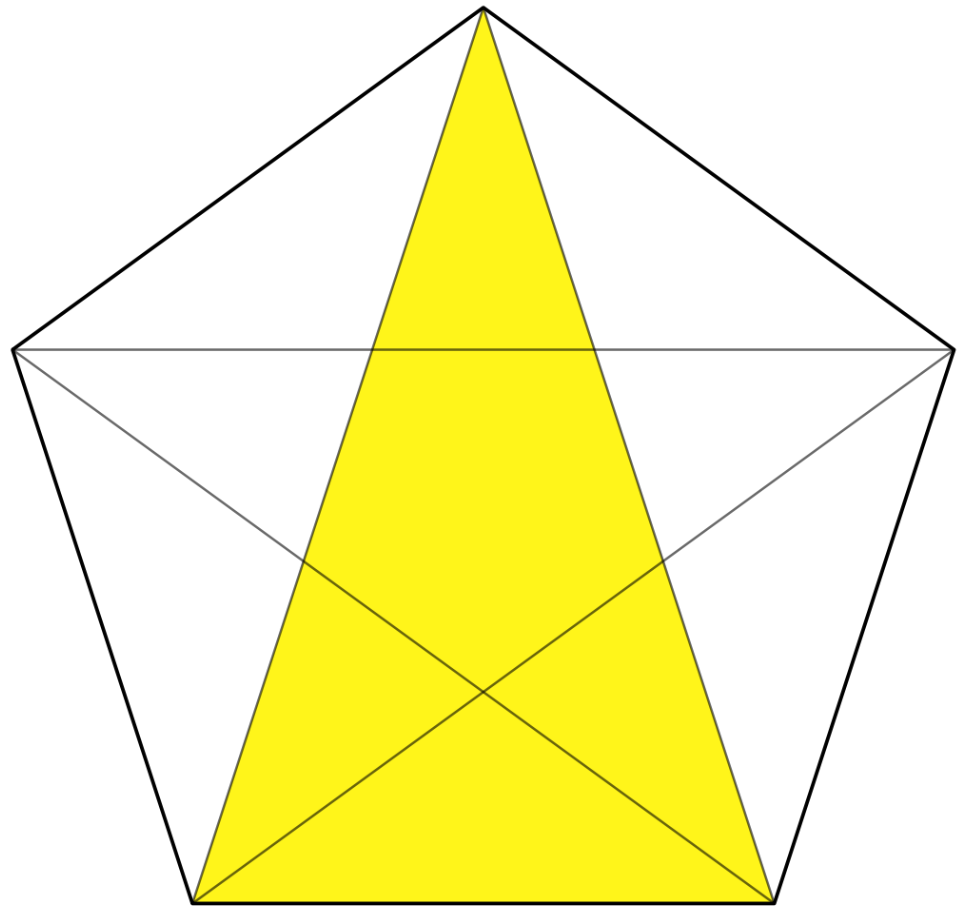
Dalla (1), si possono ottenere curiose proprietà della sezione aurea. Per esempio

$$\varphi^2 = 1 + \varphi = 2{,}168033....$$

La scoperta della numero irrazionale φ è attribuibile ai Pitagorici nel 600 a.C.; essi si resero conto che il rapporto tra diagonale e il lato di un pentagono regolare vale il NUMERO IRRAZIONALE φ.



Un pentagono regolare è diviso in tre triangoli isosceli dalle due diagonali passanti per ogni suo vertice



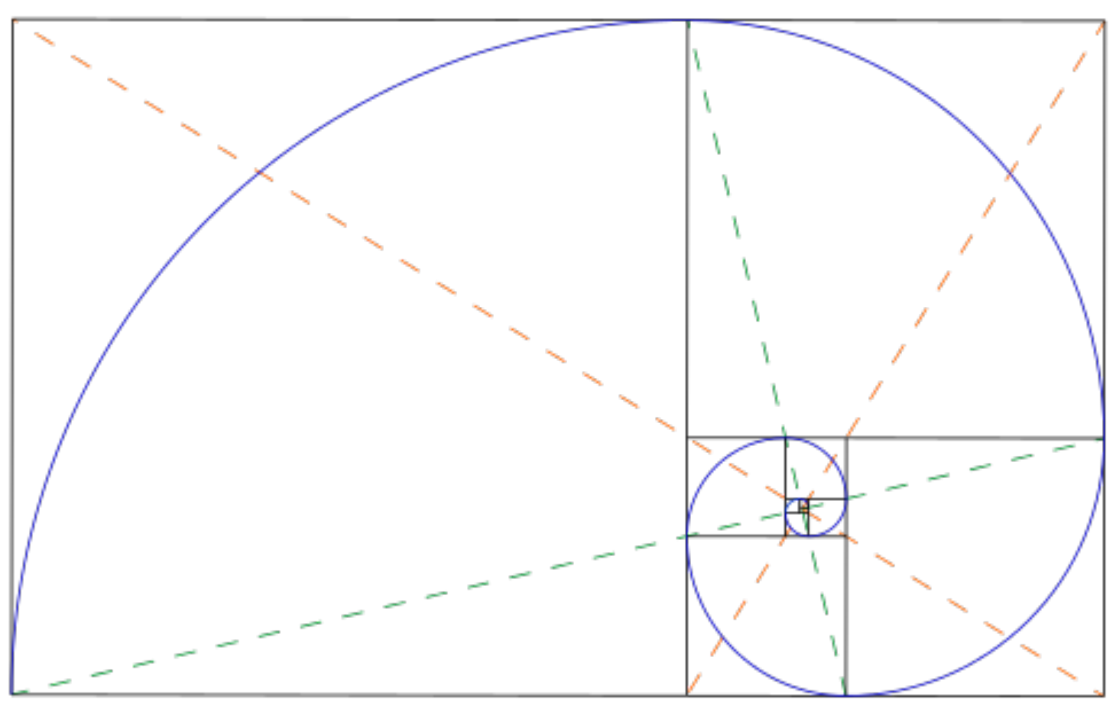
Il triangolo in giallo prende il nome di **triangolo aureo** ed è un triangolo isoscele, con angoli alla base di $72°$, in cui il rapporto tra il lato obliquo e la base è pari a φ

Ciascuno dei due triangoli in bianco è detto **gnomone aureo**. Uno gnomone aureo è un triangolo isoscele con angoli alla base di $36°$ in cui il rapporto tra il lato obliquo e la base è $\frac{1}{\varphi}$

IL RETTANGOLO AUREO

La sezione aurea è stata associata per secoli all'idea di bellezza. Come mai?

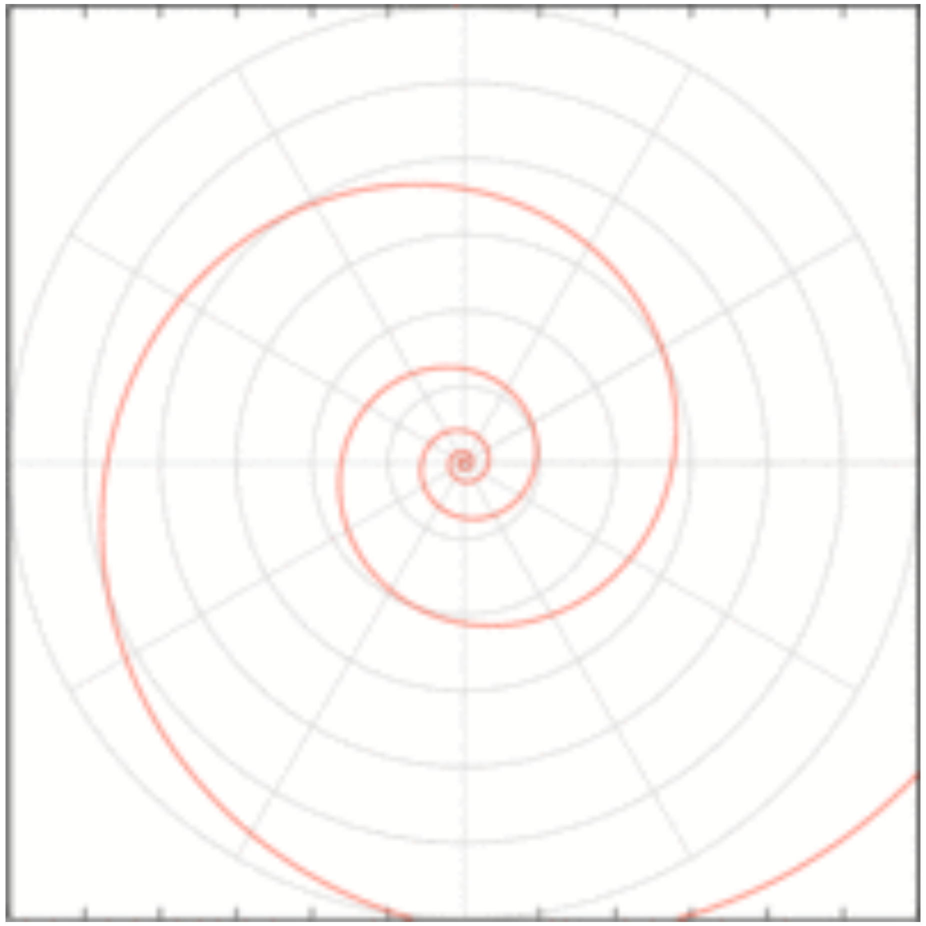
Sin dall'antichità si è ritenuto che il rettangolo aureo, ossia ogni rettangolo in cui base e altezza sono in rapporto aureo tra loro, sia il più esteticamente piacevole da guardare e, per questo, è stato utilizzato in svariate opere d'arte.



LA SPIRALE LOGARITMICA

La spirale logaritmica è un particolare tipo di spirale, che mantiene sempre la stessa forma circolare, ma in cui il raggio della circonferenza “rimpicciolisce" ruotando. Diminuisce inoltre ad ogni giro la distanza tra i bracci.

Si trovano frequentemente esempi di spirali logaritmiche in Natura.



Galassia a spirale, ripresa dal telescopio Hubble

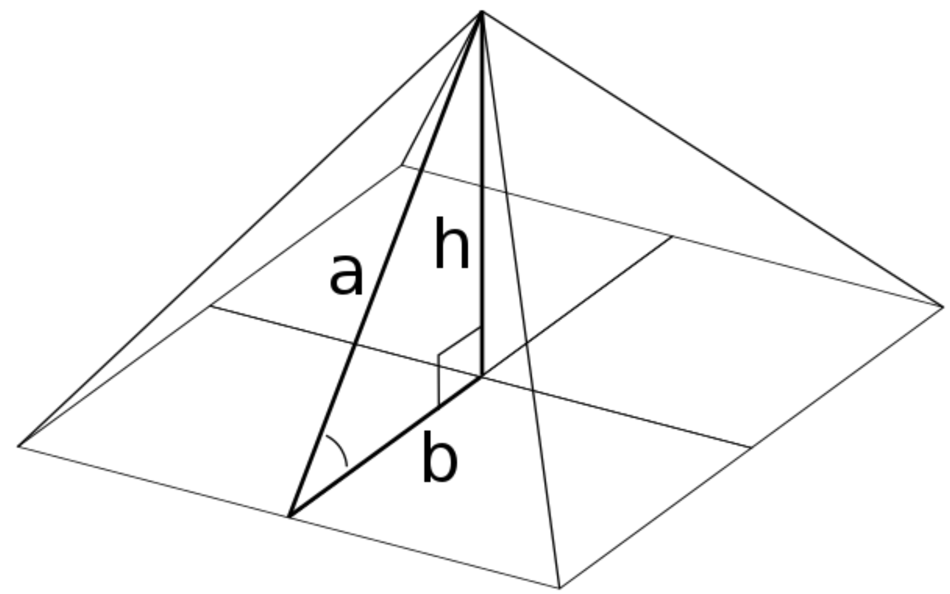
Esemplare di Nautilus Pompilius
MuMa, Museo della Matematica
Dipartimento di Matematica, UNIBA

SEZIONE AUREA E MONDO DELL'ARTE

Dal mondo dell'arte vengono alcuni dei miti che riguardano la sezione aurea.

AVVERTENZA: L'unico modo per essere certi che un artista ha usato le proporzioni auree nel suo lavoro è che questo venga esplicitamente detto dall'artista stesso.

LA PIRAMIDE DI CHEOPE A GIZA



Una fiorente letteratura, citando anche Erodoto, si è occupata del fatto che le proporzioni della piramide di Cheope rispettino più o meno la sezione aurea.

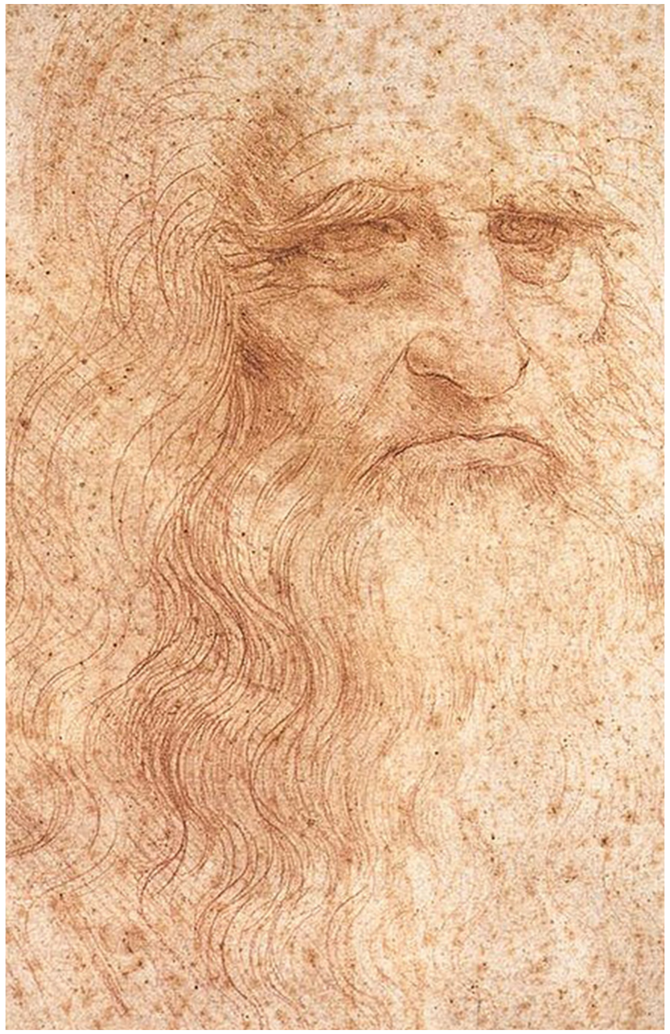
È stato fatto di proposito dai costruttori? A molti studiosi sembra improbabile che gli architetti che hanno progettato la Piramide di Cheope, che risale al 2550 a. C. circa, potessero sapere cosa fosse la sezione aurea.

LEONARDO DA VINCI

Ci sono molti riferimenti nelle opere di Leonardo da Vinci al rapporto aureo.

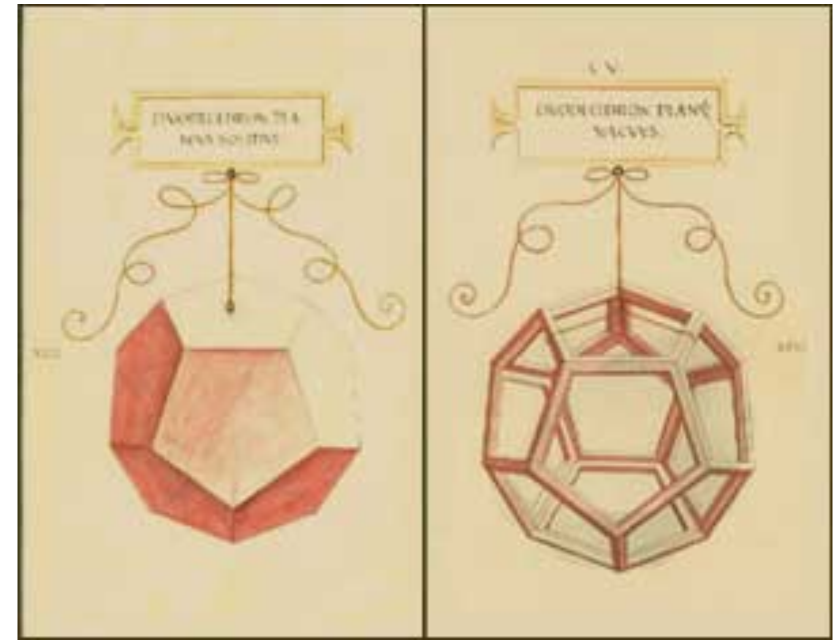
Ad esempio, Leonardo si occupò delle illustrazioni dei cosiddetti solidi platonici (gli unici 5 poliedri regolari che si possono inscrivere in una sfera) nell'opera "De Divina Proportione" di Luca Pacioli (1509).

Nel calcolo di volumi misurazioni in alcuni dei solidi platonici, si può ritrovare la sezione aurea.



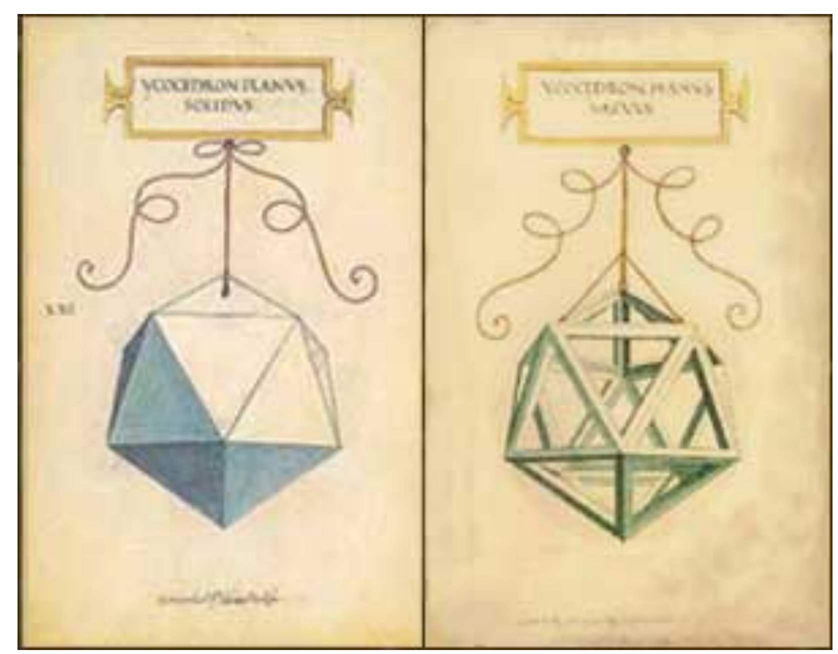
Autoritratto (1515 ca)

Ad esempio, il volume del dodecaedro regolare (solido platonico costituito da 12 facce, ciascuna delle quali è un pentagono regolare) di lato unitario è



$$15\varphi\sqrt{3-\varphi}\,.$$

Il volume dell'icosaedro regolare (solido platonico costituito da 20 facce, ciascuna delle quali è un triangolo equilatero) di lato unitario è

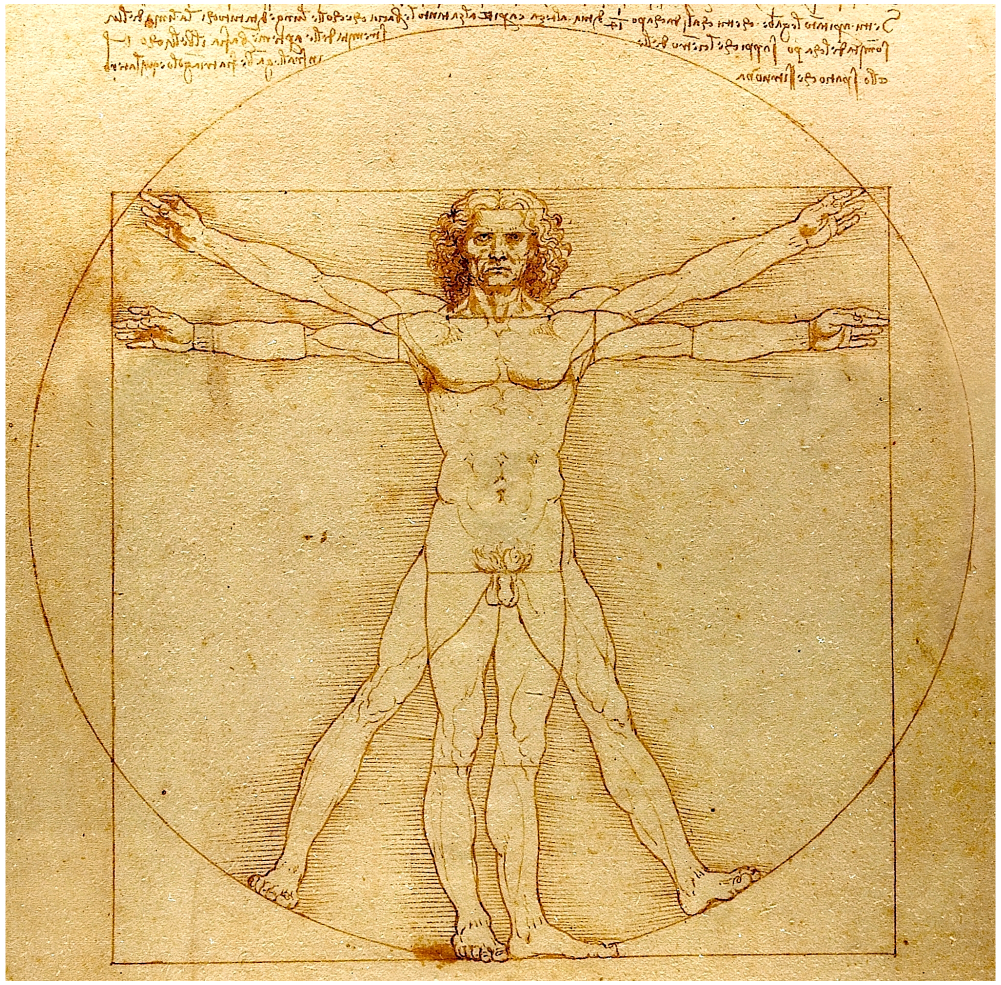


$$\frac{5}{6}\varphi^5\,.$$

SEZIONE AUREA E CORPO UMANO

Inoltre, Leonardo si occupò di identificare, attingendo alla tradizione classica, proporzioni aggraziate per il corpo umano a cui gli artisti avrebbero dovuto ispirarsi per le loro opere.

Il suo famosissimo "Uomo Vitruviano" è un esempio della sua ricerca sulla materia.



Uomo Vitruviano (1490 ca)

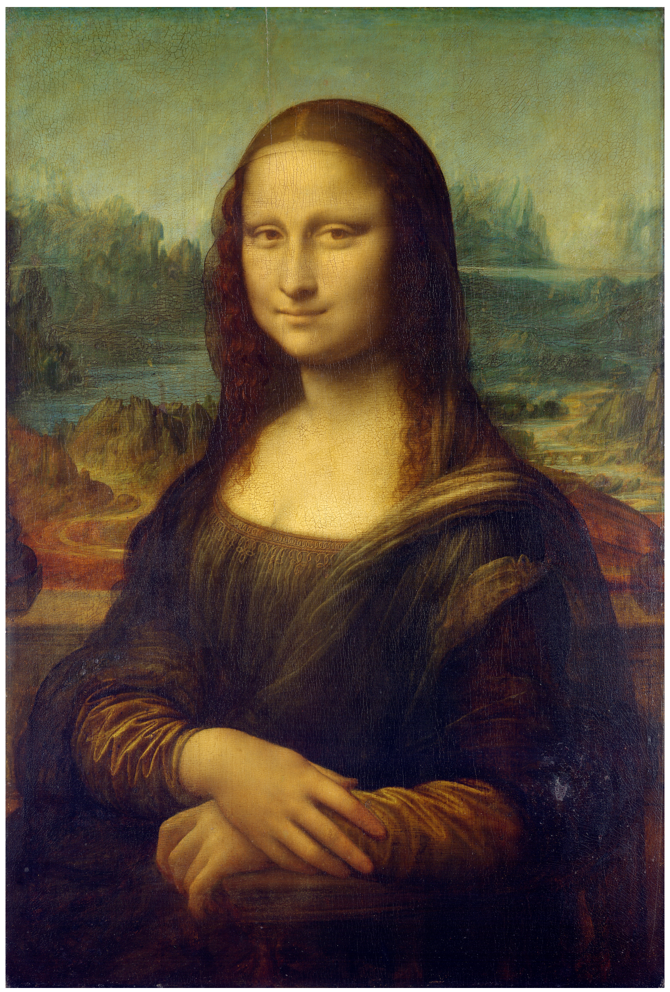
L’Uomo Vitruviano è ispirato al De Architectura di Vitruvio (15 a. C. circa).

Nelle didascalie che compaiono sopra e sotto il disegno, Leonardo, seguendo Vitruvio, presenta tutta una serie di proporzioni tra parti del corpo e il corpo intero che dovrebbero ispirare gli artisti a creare figure esteticamente piacevoli.

Queste proporzioni spesso si rifanno alla sezione aurea.

Per esempio, l’ombelico divide il corpo in due parti, che sono in rapporto aureo tra loro.

Inoltre, in molte delle opere di Leonardo gli studiosi hanno visto indizi dell'utilizzo del rettangolo aureo. Non si può, comunque, asserire una cosa del genere con certezza.



La Gioconda (1503-1506 ca)

La vergine delle rocce (1483-1485)

IL PALAZZO DELL'ONU A NEW YORK

La facciata del Palazzo dell'Onu a New York è un rettangolo aureo?

In realtà no, in quanto il rapporto tra la sua altezza e la sua larghezza è circa 1,76.

La leggenda metropolitana circa la presenza del rapporto aureo nella pianta del palazzo dell'ONU deriva dal fatto che originariamente alla sua progettazione dovevano contribuire i più famosi architetti del mondo, tra cui Le Corbusier.

Alla fine il progetto fu però affidato al solo Oscar Niemeyer.

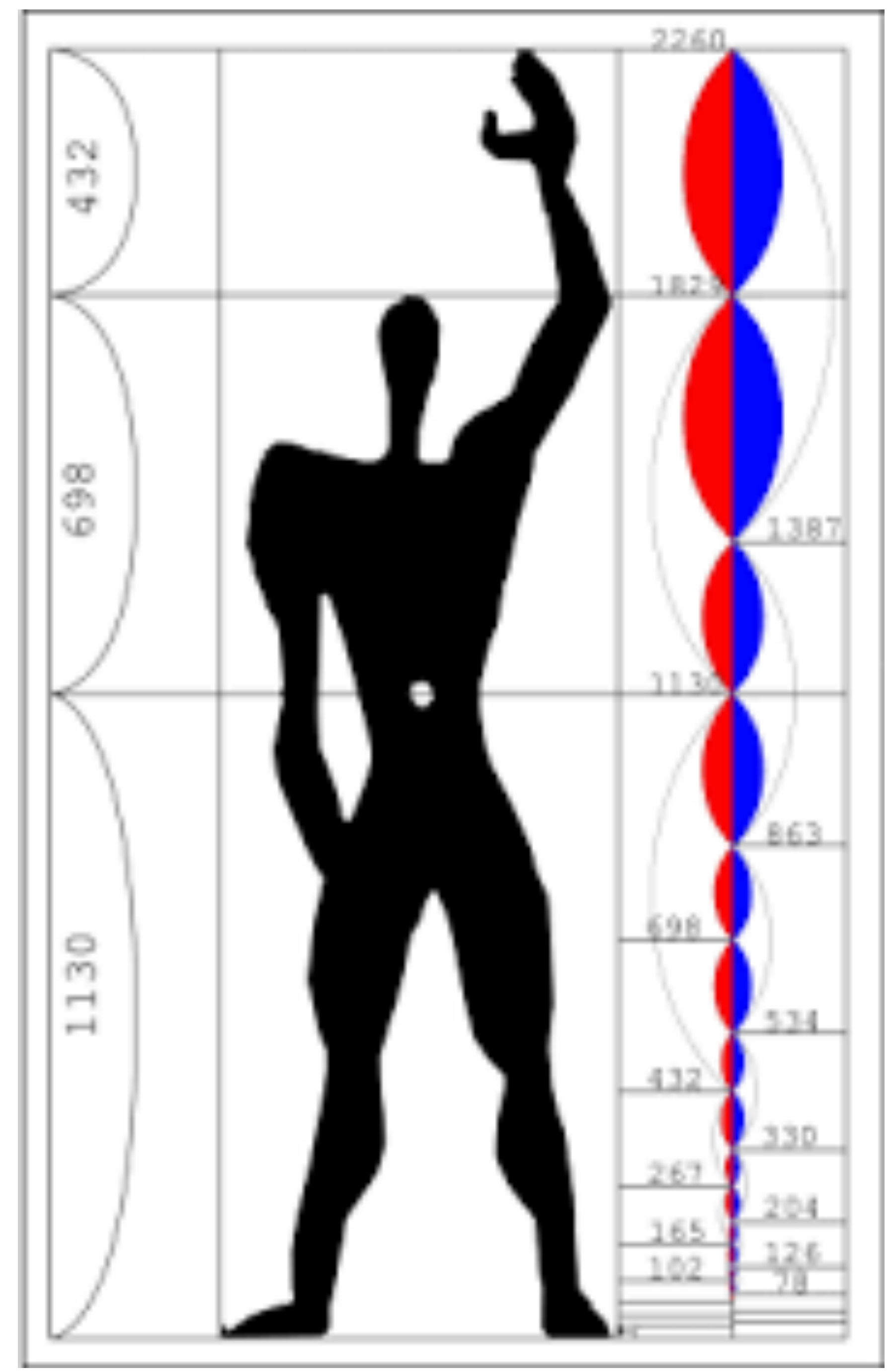
Palazzo dell'Onu a New York (1949-1950)

LE CORBUSIER E IL MODULOR

Il Modulor è una scala di proporzioni introdotta dall'architetto svizzero Le Corbusier (1887-1965) a partire dal 1948 per creare una sorta di architettura a "misura d'uomo".

Si basava su rigide proporzioni matematiche, che ricalcavano le misure ideali del corpo umano (Vitruvio) e facevano intervenire la sezione aurea e i numeri di Fibonacci.

Le Corbusier applicò queste proporzioni a molti degli edifici che ha progettato, e nel tempo fu utilizzata anche per mobili e complementi d'arredo.



LA SEZIONE AUREA: VERITA' MATEMATICHE

I NUMERI DI FIBONACCI

Leonardo da Pisa (1170-1242), detto Fibonacci, è uno dei matematici più noti del Medioevo. La sua opera più famosa è il *Liber Abbaci* (1202).

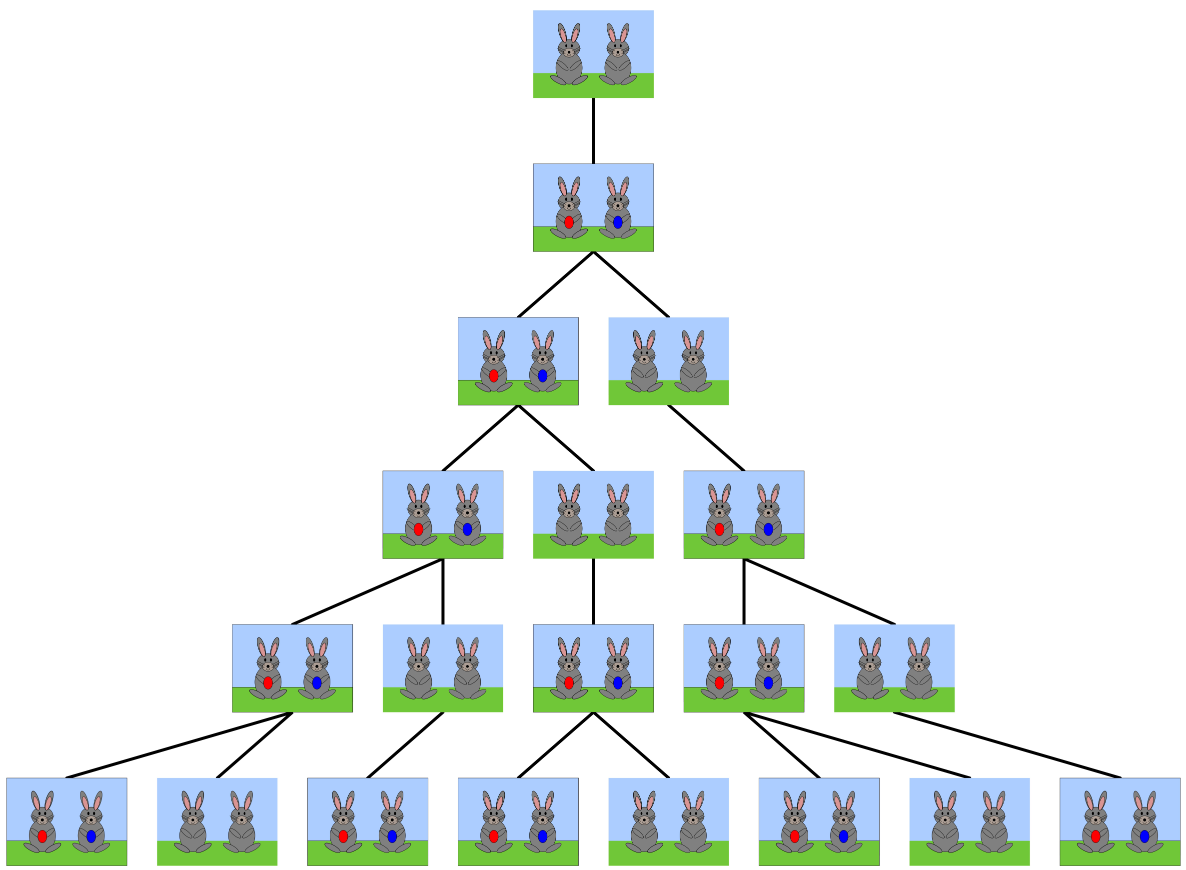
Il Liber Abbaci è un trattato di Matematica destinato soprattutto ai mercanti, per aiutarli a gestire la propria contabilità, ad effettuare cambi di valute e calcolare il prezzo delle merci.

Il libro contiene una delle prime trattazioni presentate nel mondo occidentale della numerazione posizionale indiana (unità, decine, centinaia…) che Fibonacci aveva appreso durante un suo soggiorno nell'attuale Algeria.

Nel XII capitolo del Liber Abbaci, viene presentato il seguente problema.

Un allevatore dispone di una una coppia di conigli (maschio e femmina) appena nati. Questa coppia diventa fertile al compimento del primo mese di età e, da quel momento, ogni mese, dà vita a un’altra coppia di conigli. A loro volta, essi sono fertili al compimento del primo mese di vita e, da quel momento, generano una coppia di conigli al mese…

Quante coppie di conigli ci saranno nell’allevamento dopo un anno?



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FibonacciRabbit.svg?uselang=it

Si inizia con 1 coppia di conigli.

Dopo 1 mese, essa sarà fertile.

Dopo 2 mesi, si hanno a disposizione 2 coppie di conigli, di cui, però, solo una fertile.

Dopo 3 mesi, ci saranno 3 (2+1) coppie di conigli, perché solo una di esse ha potuto generare.

Dopo 4 mesi, ci saranno 5 (3+2) coppie di conigli, in quanto solo 2 delle coppie precedenti sono fertili.

….e così via.

In questo modo, sono definiti infiniti numeri F_n, ove ogni F_n indica quante coppie di conigli ci sono dopo n mesi.

In particolare, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,.$$

La risposta alla domanda è $F_{12} = 233$, ma possiamo iterare il procedimento per ogni n, ottenendo quella che prende il nome di sequenza (o successione) di Fibonacci.

Esplicitamente, i numeri che compongono la sequenza di Fibonacci sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610….

I numeri che compongono la sequenza di Fibonacci, hanno la straordinaria proprietà di comparire in Natura in molte situazioni inaspettate.

Ad esempio, la maggior parte dei fiori hanno un numero di petali (3, 5, 8, 13, 21…) che è uno dei numeri della successione di Fibonacci.

Le inflorescenze che si trovano al centro di girasoli, margherite o nel cavolo romano si dispongono in spirali orarie e antiorarie, il cui numero è generalmente un numero di Fibonacci.

I NUMERI DI FIBONACCI E SEZIONE AUREA

Consideriamo i numeri della successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233….Osserviamo che

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{5}{3} \simeq 1{,}66666 \qquad \frac{21}{13} \simeq 1{,}615 \qquad \frac{89}{55} \simeq 1{,}61818 \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{8}{5} = 1{,}6 \qquad \frac{34}{21} \simeq 1{,}619 \qquad \frac{144}{89} \simeq 1{,}6179 \qquad \ldots\ldots$$

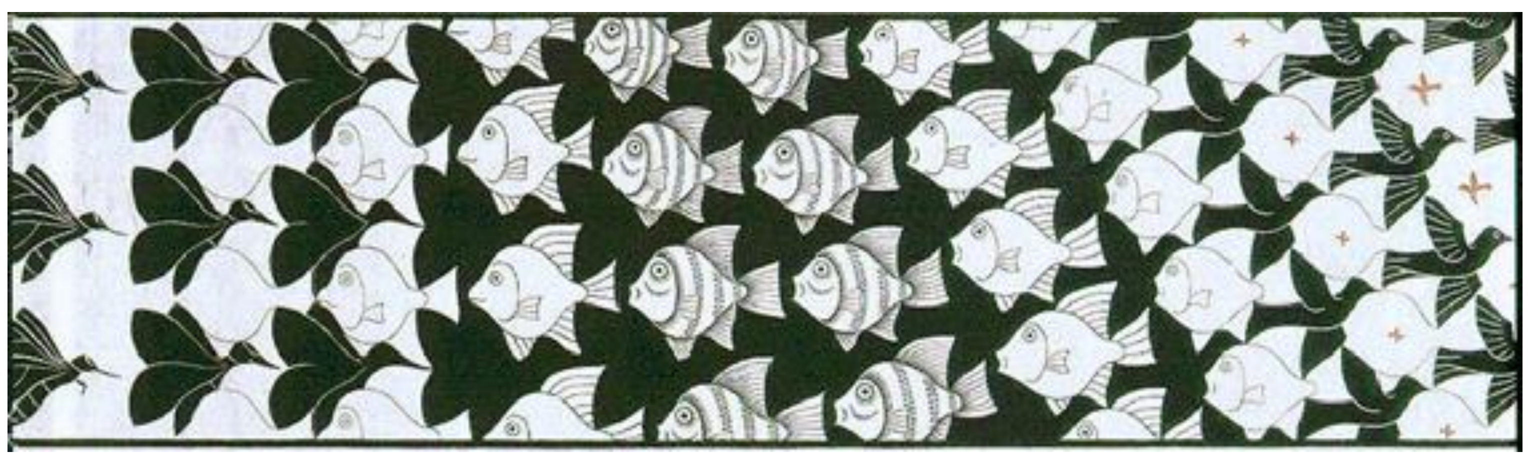
$$\frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625 \qquad \frac{55}{34} \simeq 1{,}6176 \qquad \frac{233}{144} \simeq 1{,}61805 \qquad \ldots..$$

Il rapporto $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ si avvicina sempre più a φ man mano che n aumenta. Matematicamente si dice che $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Questo risultato fu intuito da Keplero, ma dimostrato anni dopo da Robert Simson (1687-1768).

LA TASSELLATURA DI PENROSE

Un celebre problema in Matematica consiste nel voler ricoprire completamente (senza lasciare“buchi”) con “tasselli” di una certa forma un piano, creando un tema, o tassellatura, che si ripeta a intervalli regolari e sia invariante per certe rotazioni.



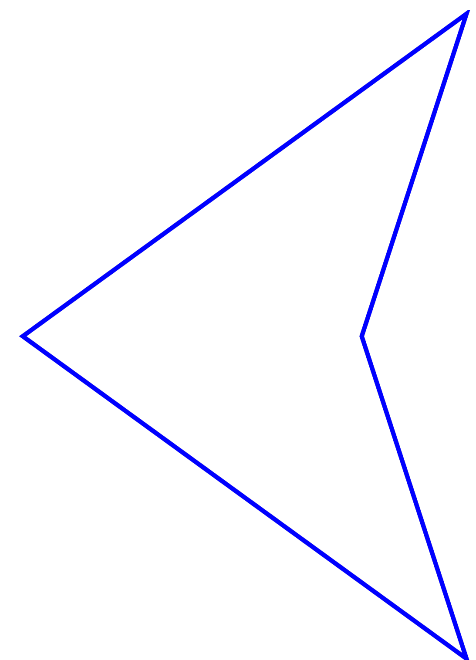
Questa operazione si può fare ricoprendo il piano con triangoli, quadrati ed esagoni regolari. In tal caso si parla di un problema a simmetria tripla (la tassellatura non risente di una rotazione di un terzo dell’angolo giro), quadrupla (un quarto dell’angolo giro) o sestupla (un sesto dell’angolo giro).

Con i pentagoni regolari la cosa non funziona.

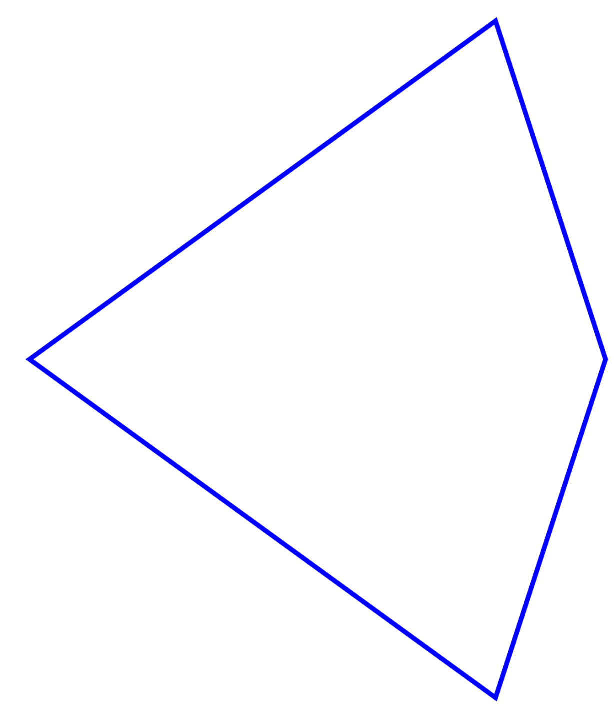
Per questo, per molto tempo, i matematici hanno pensato che non si potesse creare una tassellatura con ordine ripetitivo a simmetria quintupla (ossia che fosse invariante rispetto a rotazioni di un quinto dell'angolo giro).

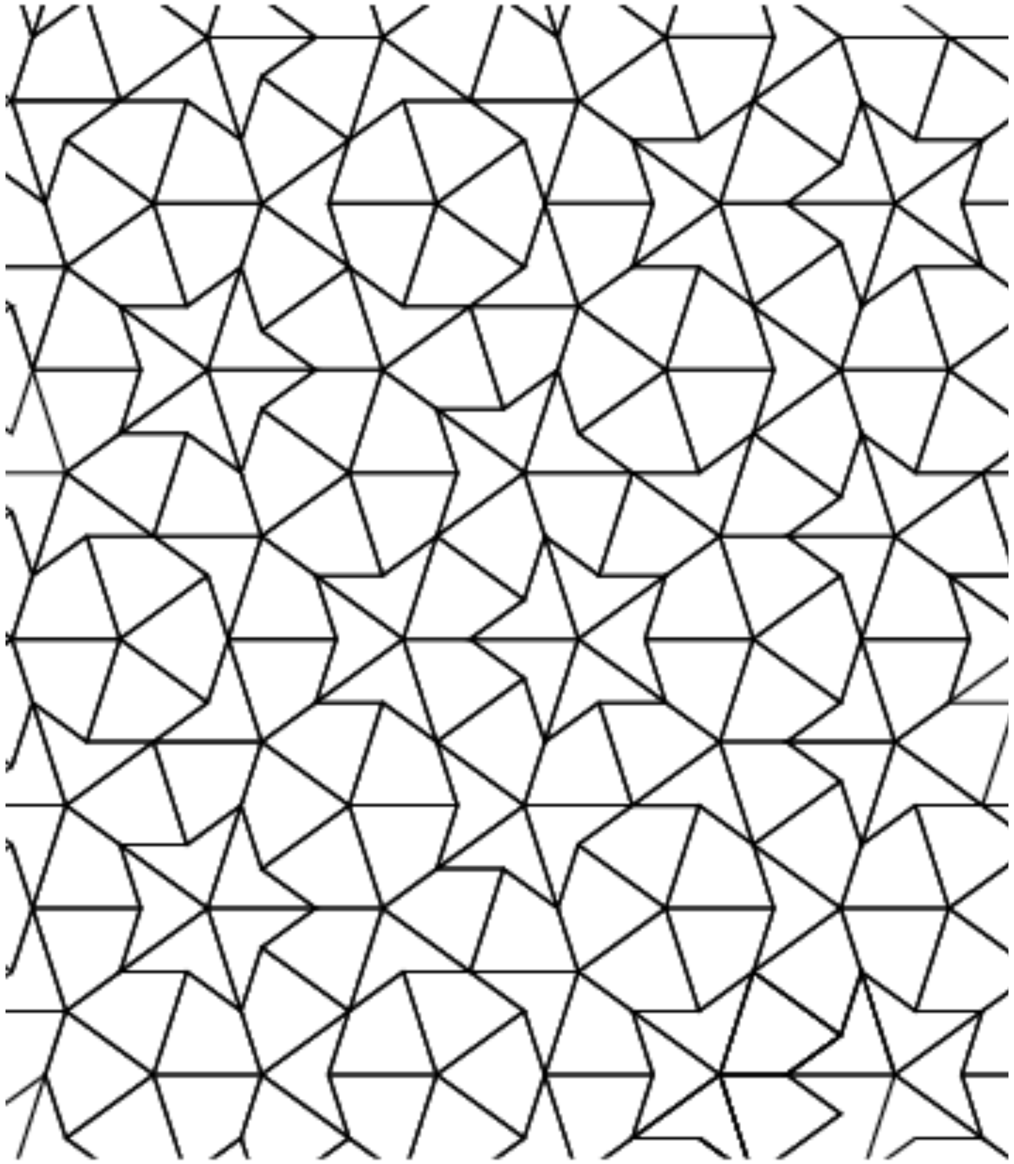
Negli anni '70, Roger Penrose e John Horton Conway, invece, hanno provato che è possibile coprire tutto un piano con "tasselli" che sono combinazioni di triangoli e gnomoni aurei. Questi schemi non si ripetono esattamente con periodicità, ma sono molto regolari.

Dardo



Aquilone





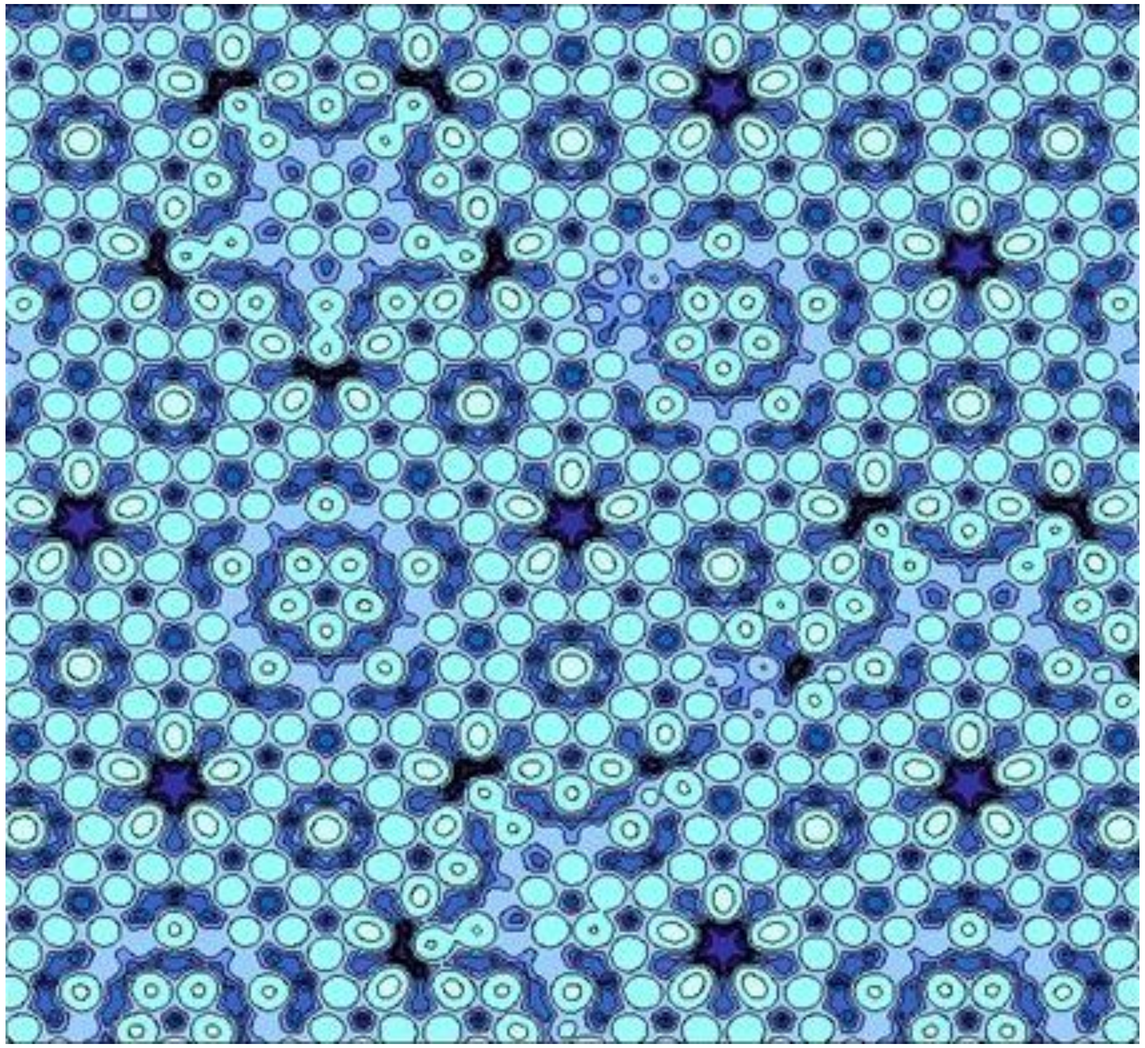
Tassellatura a simmetria quintupla con dardi e aquiloni

I QUASI-CRISTALLI

Si possono fare simili costruzioni nello spazio, non solo nel piano.

Queste questioni di Matematica “pura” hanno trovato riscontro nella realtà. Infatti, nel 1984, D. Schectman scoprì i cosiddetti quasi-cristalli, ossia dei materiali i cui atomi non si dispongono in maniera totalmente amorfa (come per esempio succede nel vetro) o in maniera regolare (come per esempio nel cloruro di sodio), ma hanno una struttura quasi-regolare e a simmetria “quintupla”, come le tassellature di Penrose.

A questa scoperta è stato assegnato il Premio Nobel per la Chimica nel 2011.



Modello atomico di un quasi-cristallo, precisamente una lega di Argento e Alluminio

Dipartimento di Matematica
Direttore
Prof.ssa Addolorata Salvatore
(addolorata.salvatore@uniba.it)

Laurea in Matematica
Laurea Magistrale in Matematica

Coordinatore del Consiglio di Corso di Studi
Prof. Luciano Lopez
luciano.lopez@uniba.it

www.dm.uniba.it