VARIABILI AZIONE-ANGOLO, ALGEBRE E MECCANICA QUANTISTICA

E Celeghini

Dipartimento di Fisica and INFN,
Universitá di Firenze, Italy
E-mail: celeghini@fi.infn.it

En el científico se conjuntan preocupaciones de hombre inteligente con la paciencia del imbecil - Nicolás Gómez Dávila

Firenze, 7 aprile 2010

Un postulato della QM

Roman "Advanced Quantum Theory", Postulato II (a): Gli operatori QM sono ottenuti sostituendo una coppia di variabili coniugate classiche con le corrispondenti quantizzazioni

Variabili classiche canonicamente coniugate?

Poisson brackets $\{f, g\} = 1 \;\; \Rightarrow$ Commut. $[\hat{f}, \hat{g}] = i\,\hbar\,\widehat{\{f, g\}}$

Quante? posizione-momento, azione-angolo ....

La sola corrispondenza veramente realizzata $\{q, p\} \;\; \Rightarrow \;\; [X, P]$

QM (più o meno) esiste solo nello spazio configurazione/momento.

Meccanica classica moderna $\Rightarrow$ Sistemi integrabili

Parentesi di Poisson, variabili azione-angolo

$$\{S_i, S_j\} = 0 \qquad \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0, \qquad \{\Phi_i, S_j\} = \delta_{ij}$$

$$\dot{S}_i = 0 \quad \dot{\Phi}_i = \omega_i(S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

E la quantizzazione delle variabili azione-angolo $\{\Phi, S\} = 1$?

Quantizzazione configurazione/momento: Weyl-Heisenberg algebra

Esistono altre algebre per le variabili azione-angolo?

$T(1)$

Traslazioni continue in una dimensione

Spazio di definizione: la retta. Ciascun punto $x \in \mathcal{R}$.

Set completo di operatori commutanti: l'operatore hermitiano X.

Base dello spazio di Hilbert $|x\rangle \qquad -\infty < x < \infty$

$$X|x\rangle = |x\rangle x \qquad T(y)|x\rangle = |x+y\rangle \qquad -\infty < y < \infty$$

$$T(x)\,T(y) = T(x+y) \qquad T(0) = \mathcal{I} \qquad T(y)^{-1} = T(-y)$$

$$T(y+dy) \;=\; T(y) + dy\,\frac{dT(y)}{dy} \qquad T(y+dy) = \; T(dy)T(y)$$

$$T(dy) \approx \; 1 \;-i\,dy\,P \qquad \frac{dT(y)}{dy} = -\,i\,P\,T(y) \qquad T(y) = e^{-iPy}$$

uirrep: P hermitiano $\Rightarrow$ $P\,|p\rangle = |p\rangle\,p \qquad p \in \mathcal{R} \qquad -\infty < p < \infty$

$$U^{p}(x)\,|p\rangle \;=\; |p\rangle\, e^{-ipx}$$

Parametro di gruppo x representation label p entrambi continui e infiniti.

ORTONORMALITA' $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; U_p^{\dagger}(x)\, U^{p'}(x) \;=\; 2\pi\,\delta(p-p')$$

COMPLETEZZA $$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\; U_p^{\dagger}(x)\, U^{p}(x') \;=\; 2\pi\,\delta(x-x')$$

($\psi(x)$ a quadrato sommabile , $\in \mathcal{C}_{\infty}$, supporto compatto , procedura di limite)

Basi coniugate

"stati localizzati" $|x\rangle$ $\Leftrightarrow$ "stati traslazionalmente invarianti" $|p\rangle$

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\, e^{-ipx}\, dp \qquad |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\, e^{ipx}\, dx$$

Applicando P sui primi, si trova che, sulle funzioni di x,

$$P = -i \frac{d}{dx}$$

La relazione fondamentale é $\langle p \,|\, x \rangle = e^{-ipx}$

Il gruppo $SO(2)$

Un gioco simile funziona anche con l'altro gruppo de Lie unidimensionale SO(2): $X \; \Rightarrow \; \Phi$.

Spazio di definizione: il cerchio. Ogni punto $\phi \in \mathcal{R}$, però, questa volta, modulo 2π o, alternativamente, $0 \leq \phi < 2\pi$.

Set completo di operatori commutanti: operatore hermitiano Φ.

Base dello spazio di Hilbert $|\phi\rangle \qquad 0 \leq \phi < 2\pi$

$$\Phi|\phi\rangle = |\phi\rangle\,\phi \qquad U(\chi)|\phi\rangle = |\chi + \phi\rangle \qquad 0 \leq \chi < 2\pi$$

$$U(\chi)\,U(\phi) = U(\chi+\phi) \qquad U(0) = \mathcal{I} \qquad U(\phi)^{-1} = U(-\phi)$$

$$U(\phi+d\phi) = U(\phi) + d\phi\frac{dU(\phi)}{d\phi} \quad U(\phi+d\phi) \;=\; U(d\phi)\,U(\phi)$$

$$U(d\phi) \approx\; 1\; -i\,d\phi\,J \qquad\qquad \frac{dU(\phi)}{d\phi} = -\,i\,J\,U(\phi) \qquad U(\phi) = e^{-iJ\phi}$$

uirrep: J hermitiano $\;\Rightarrow\;$ $J\,|m\,\rangle \;=\; |m\,\rangle\,m$ $\qquad -\infty < m < \infty$

MA $m \in \mathcal{I}$ cioé m intero.

Il parametro di gruppo ϕ rimane continuo ma fimito mentre il representation label m é ora infinito ma discreto.

ORTONORMALITA'
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\, U_n^\dagger(\phi)\, U^m(\phi) \;=\; \delta_n^m$$

COMPLETEZZA
$$\sum_n U_n^\dagger(\phi)\, U^n(\chi) \;=\; \delta(\phi-\chi)$$

Basi coniugate in SO(2)

"localized states" $|\phi\rangle$ $\Leftrightarrow$ "translationally invariant states" $|m\rangle$

$$|\phi\rangle = \sum_m |m\rangle\, e^{-im\phi} \qquad\qquad |m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi\rangle\, e^{i\,m\,\phi}\, d\phi$$

Applicando J sulla prima, si trova che sulle funzioni di ϕ

$$J = -i\frac{d}{d\,\phi}$$

La relazione fondamentale é $\langle\, m\,|\,\phi\,\rangle = e^{-\,i\,m\,\phi}$

variabili Coniugate in H(1)

In teoria dei gruppi, il passaggio dai "localized states" ai "invariant states" é la decomposizione della rappresentazione regolare in rappresentazioni irriducibili. Però qui ci interessano le variabili coniugate.

Ciò é ben chiaro con $T(1)$: la connessione tra l'operatore X e l'operatore P é definita da come opera P nella representazione regolare (che, in fondo, é tutto $T(1)$) :

$$P = -id/dx$$

poiché X é diagonale nella rappresentazione regolare, possiamo scrivere

$$P = -id/dX$$

cosí, da $T(1)$, che ha solo il generatore P, saliamo a Weyl-Heisenberg $H(1)$, con tre generatori $\{X, P, \mathcal{I}\}$, dove le relazioni di commutazione sono

$$[X, P] = i\,\mathcal{I} \qquad\qquad [\mathcal{I}, \bullet] = 0$$

Questa é la struttura fondamentale di tutta la meccanica quantistica. Qui non ci sono problemi e ho descritto in dettaglio come funziona perché con $\mathrm{SO}(2)$, il problema c'é.

Il punto é:

la relazione di commutazione

$[J, \Phi] = i\,\mathcal{I}$

é compatibile con lo spettro limitato di Φ?

Che struttura c'é dietro? C'é un'algebra o no?

E' possibile chiudere un'algebra con $\{J, \Phi, \mathcal{I}\}$ che descriva le variabili di azione-angolo e, allo stesso tempo, permetta che Φ sia definito modulo 2π?

Cambio di topologia

In effetti $[J, \Phi] = i\,\mathcal{I}$ (o $J \equiv i\, d/d\phi$)

non ci da uno spettro di Φ limitato

$$e^{-i\,\chi\,J}\;\Phi\;e^{+i\,\chi\,J} \;=\; \Phi - i\,\chi\,[J, \Phi] \;=\; \Phi + \chi$$

Dobbiamo imporre, dall'esterno, $\Phi \;\equiv\; \Phi + 2k\pi \qquad \forall k$

Si può fare

Tutti sanno (vedi, per esempio, Roman) che se A é una variabile indipendente, A^n é simultaneamente misurabile.

Cosí lo spazio di Hilbert di A può essere alternativamente definito da una funzione biunivoca qualunque (non necessariamente reale) di A.

Però, che succede se la funzione non é biunivoca?

In particolare, che succede se consideriamo funzioni periodiche con periodo 2π ?

Si modifica la topologia dello spazio di Hilbert: é esattamente quel che vogliamo.

Le più semplici funzioni di Φ dalla retta al cerchio sono $e^{\pm i\Phi}$.

Però i loro autovalori non sono reali. E a me che importa?

Da quando ero studente pensavo che il postulato:

1 osservabile fisica $\Leftrightarrow$ 1 operatore Hermitiano

é troppo restrittivo. Un operatore A qualunque può esser messo in relazione non con una ma con due osservabili fisiche.

Infatti:

$$A = \frac{A + A^\dagger}{2} + i\,\frac{A - A^\dagger}{2i}$$

dove i due operatori hermitiani $\frac{A + A^\dagger}{2}$ e $\frac{A - A^\dagger}{2i}$ hanno diritto (!?)

a una osservabile fisica ciascuno e determinano completamente A.

i commutatori di $\{ J \equiv i\,\frac{d}{d\Phi}\,,\; e^{\pm i\Phi} \}$ sono

$$[J, e^{\pm i\Phi}] \;=\; \pm e^{\pm i\Phi} \qquad [e^{+i\Phi}, e^{-i\Phi}] \;=\; 0$$

Una volta identificato $P_{\pm} \;:=\; e^{\pm\, i\,\Phi}$ é chiaro che questa

é la rappresentazione dell'algebra $E(2)$ con Casimir $P^{\,2} = 1$

Nella base del momento angolare questa rappresentazione di $E(2)$ é

$$J\,|m\rangle = |m\rangle\, m \qquad -\infty < m < \infty$$

$$P_{\pm}\,|m\rangle = |m \pm 1\rangle$$

con J diagonale e $P_{\pm}$ rising e lowering operators.

I due operatori hermitiani legati con $e^{\pm i\Phi}$ sono, come

é ovvio, $P_1 \equiv \sin(\Phi)$ e $P_2 \equiv \cos(\Phi)$:

$$[J, \sin(\Phi)] = i\cos(\Phi), \quad [J, \cos(\Phi)] = -i\sin(\Phi)$$

$$[\sin(\Phi), \cos(\Phi)] = 0$$

Diagonalizzare $\sin(\Phi)$ e $\cos(\Phi)$ é equivalente ad individuare Φ nell'intevallo $0 \leq \phi < 2\pi$. Questa é la cosí detta base delle onde piane dove

$$\sin(\Phi)\,|\phi\rangle = |\phi\rangle\,\sin(\phi) \quad \cos(\Phi)\,|\phi\rangle = |\phi\rangle\,\cos(\phi)$$

Cosí J e Φ $(\equiv \arcsin(P_1) \equiv \arccos(P_2))$ sono operatori coniugati.

Con la rinormalizzazione $J \to J/k$ e $\Phi \to k\,\Phi$ la relazione

di commutazione non cambia. Il limite $k \to \infty$ permette di ottenere lo

spettro continuo standard, infinito e continuo di $H(1)$.

Abbiamo, in questo modo, la possibilità di considerare sistemi fisici quantistici dove lo spettro di J é discreto e infinito da sotto e da sopra.

Ciò é consistente con l'energia non relativistica definita a meno di una costante additiva

Esistono altre soluzioni (altri spettri)?

In particolare:
sono possibili soluzioni con J e Φ simmetrici come X e P?

La risposta é si

Deformed Algebra

Consideriamo, per semplicità, la rinormalizzazione

$$[J\,,\,\Phi] = \frac{2\,\pi\,i}{n} \qquad n \in \mathcal{I}^{+}$$

e assumiamo che i generatori (“oggetti fondamentali") dell’algebra

siano non J e Φ ma $e^{\pm\,i\,\Phi}$ e $e^{\pm\,i\,J}$

Ovviamente

$$e^{-\,i\,J}\,e^{\pm\,i\,\Phi}\,e^{+\,i\,J} = \exp\{\pm\,i\,[e^{-\,i\,J}\Phi e^{+\,i\,J}]\} = \exp[\pm\,i\,(\Phi + 2\pi/n)]$$

Dato che, nel cerchio, $\phi_0 \equiv \phi_0 + 2\,k\,\pi$, lo spettro di Φ é

$$\{\phi_0,\ \phi_0 + 2\pi/n,\ \phi_0 + 4\pi/n,\ \ldots,\ \phi_0 + 2\pi(n-1)/n\,\}$$

cioé lo spettro di Φ é discreto e limitato.

(ϕ_0 é arbitrario, nel seguito $\phi_0 \to 0$)

Inoltre:

$$e^{+iJ}\, e^{\pm i\Phi}\, e^{-iJ} = \exp\{\pm i\ [e^{+iJ}\Phi e^{-iJ}]\} = \exp[\pm i\,(\Phi - 2\pi/n)]$$

Ma, ciò che é più rilevante,

$$e^{+i\Phi}\, e^{\pm iJ}\, e^{-i\Phi} = \exp\{\pm i\,[e^{+i\Phi}\,J\,e^{-i\Phi}]\} \ = \exp[\pm i\,(J - 2\pi/n)]$$

$$e^{-i\Phi}\, e^{\pm iJ}\, e^{+i\Phi} = \ \exp\{\pm i\ [e^{-i\Phi}Je^{+i\Phi}]\} = \exp[\pm i\,(J + 2\pi/n)]$$

Questo significa che Φ e J giocano un ruolo simmetrico e sono entrambi

discreti e limitati.

Che tipo di algebra c'é dietro questo schema?

Dalle formule precedenti, definendo $q := e^{i\,\pi/n}$ $\quad (q^{2\,n} = 1)$

$$q\ e^{+i\Phi} e^{+iJ} - q^{-1}\ e^{+iJ} e^{+i\Phi} = 0$$

$$q\ e^{-iJ} e^{+i\Phi} - q^{-1}\ e^{+i\Phi} e^{-iJ} = 0$$

$$q\ e^{+iJ} e^{-i\Phi} - q^{-1}\ e^{-i\Phi} e^{+iJ} = 0$$

$$q\ e^{-i\Phi} e^{-iJ} - q^{-1}\ e^{-iJ} e^{-i\Phi} = 0$$

I matematici non amano q sul cerchio unitario, preferiscono il corpo dei numeri reali. Ma in fisica ciò non é accettabile perché rompe la simmetria del coprodotto negli spazi componenti e quindi tra due sottosistemi di un sistema composto.

q sul cerchio unitario cioé una fase invece non é un problema: le fasi in meccanica quantistica non sono quantitá misurabili.

Il Quantum Plane

Definendo $X = e^{i\Phi}$, $Y = e^{iJ}$

$$q\, X\, Y - q^{-1}\, Y\, X = 0$$

Riscopriamo il QUANTUM PLANE con q sul cerchio unitario.

Technicalities

Possiamo ora determinare lo spazio delle "configurazioni"

$$\{|l\rangle\} \quad \{l = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$(q^{2n} = 1\,, \; |n\rangle := |0\rangle)$$

$$X\,|\,l\,\rangle = |\,l\,\rangle\, q^{-2\,l} \qquad Y\,|l\,\rangle = |\,l+1\,\rangle$$

e, analogamente, lo spazio dei "momenti"

$$\{|m\rangle\} \quad \{m = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$(q^{2n} = 1\,, \; |n\rangle \equiv |0\rangle\,)$$

$$Y\,|\,m\,\rangle = |\,m\,\rangle\,q^{2m} \qquad X\,|m\,\rangle = |\,m+1\,\rangle$$

Tutto é scritto in termini di trasformate di Fourier discrete.

$$q = e^{i\pi/n} \qquad \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} q^{\pm 2ml} = \delta_{l,0}$$

$$\sum |l\rangle\langle l| = 1 \qquad \sum |m\rangle\langle m| = 1$$

$$\langle l|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} q^{-2lm} \qquad \langle m|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} q^{+2lm}$$

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_l |l\rangle q^{-2ml} \qquad |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_m |m\rangle q^{+2ml}$$

$$X\,|l\,\rangle \;=\; \sum_m |\,m\,\rangle\langle\,m\,|\,l\,\rangle \;=\; \sum_m |m+1\rangle\;\frac{1}{\sqrt{n}}\,q^{\,2\,l\,m} \;=$$

$$\sum_{l'\,m}\;|\,l'\rangle\langle l'\,|\,m+1\rangle\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,q^{\,2lm} \;=\sum_{l'}|\,l'\,\rangle\;\frac{1}{n}\sum_m q^{\,-2\,l'(m+1)}\,q^{\,2\,l\,m} \;=$$

$$\sum_{l'}\;|\,l'\,\rangle\,q^{\,-2\,l'}\;\frac{1}{n}\sum_m q^{\,2\,(l-l')\,m} \;=\; \sum_{l'}|\,l'\,\rangle\,q^{\,-2l'}\,\delta_{l,l'} \;=\; |\,l\rangle\,q^{\,-2\,l}$$

Conclusioni

- La quantizzazione delle parentesi di Poisson é legata a variabili coniugate.
- L'algebra di Weyl-Heisenberg é essenziale nella construzione della QM nello spazio configurazione/momento
- La topologia delle variabili azione-angolo richiede che lo spettro della variabile angolo sia finito
- E(2) $\Rightarrow$ Angolo discreto e finito, Azione continua e illimitata
- quantum plane con *q* radice dell'unità $\Rightarrow$ Angolo & Azione discreti e finiti

DUE AFFERMAZIONI ETERODOSSE

- Osservabili $\Leftrightarrow$ *operatori* *NON* hermitiani
- Observabili $\Leftrightarrow$ *NON* generatori dell'algebra