Two-loop corrections to μe scattering at NNLO in QED

Amedeo Primo

IFAE 2019, Napoli 8-10 Aprile 2019

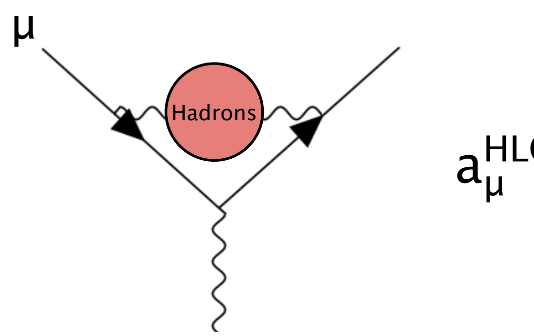
In collaborazione con: S.Di Vita, S.Laporta, M.Passera, P.Mastrolia, U.Schubert, W.J.Torres Bobadilla

MuonE: $(g-2)_{Had}$ dallo scattering μe

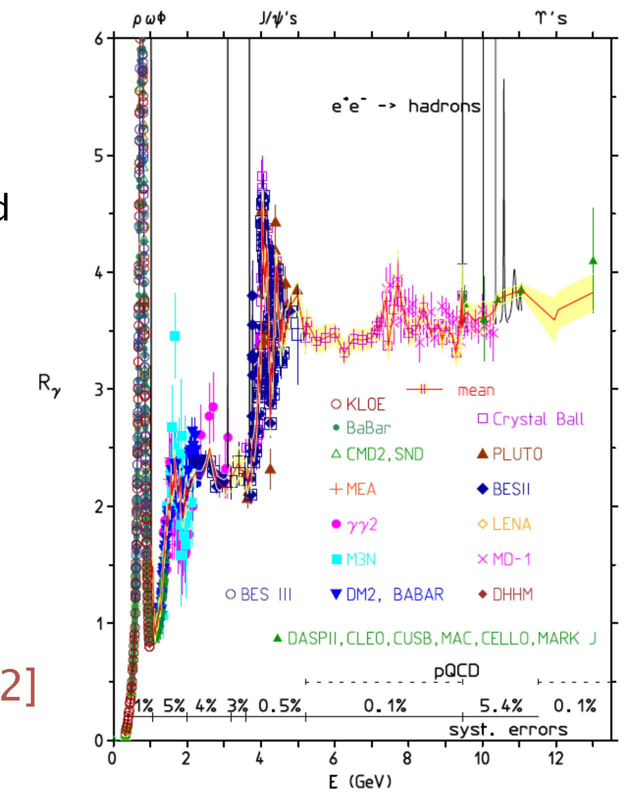
Esperimento MuonE: misura del contributo adronico al $(g-2)_\mu$ dallo scattering μe

[Carloni Calame, Passera, Trentadue, Venanzoni 15]

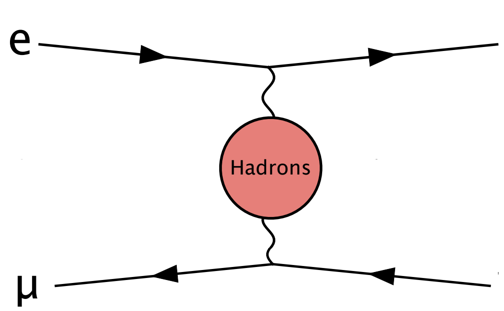
- dati time-like



$$a_\mu^{HLO} = \frac{1}{4\pi^3}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2+(1-x)s/m^2}\,\sigma_{e^+e^-\to Had}$$



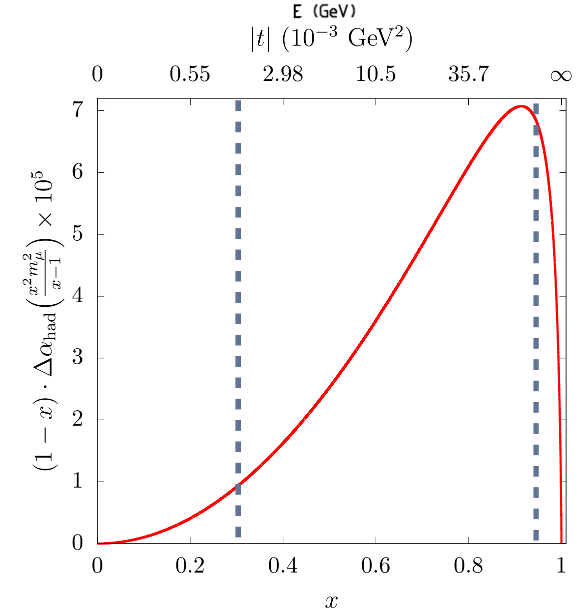
- dati space-like



$$a_\mu^{HLO} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\,(1-x)\Delta\alpha_{Had}[t(x)]$$

[Lautrup, Peterman, de Rafael 72]

cfr R.Pilato e A.Principe



Quale input teorico?

- $\Delta\alpha_{Had}$ estratto dalla misura noti i contributi EW a $d\sigma_{\mu e}$

Quanto precisamente dobbiamo conoscere $d\sigma_{\mu e}$?

- Tutti i sistematici devono essere controllati a 10ppm

MuonE: programma teorico

Obiettivo: generatore MC per la sezione d'urto SM dello scattering μe

- incertezza sistematica segnale/normalizzazione ≲ 10ppm

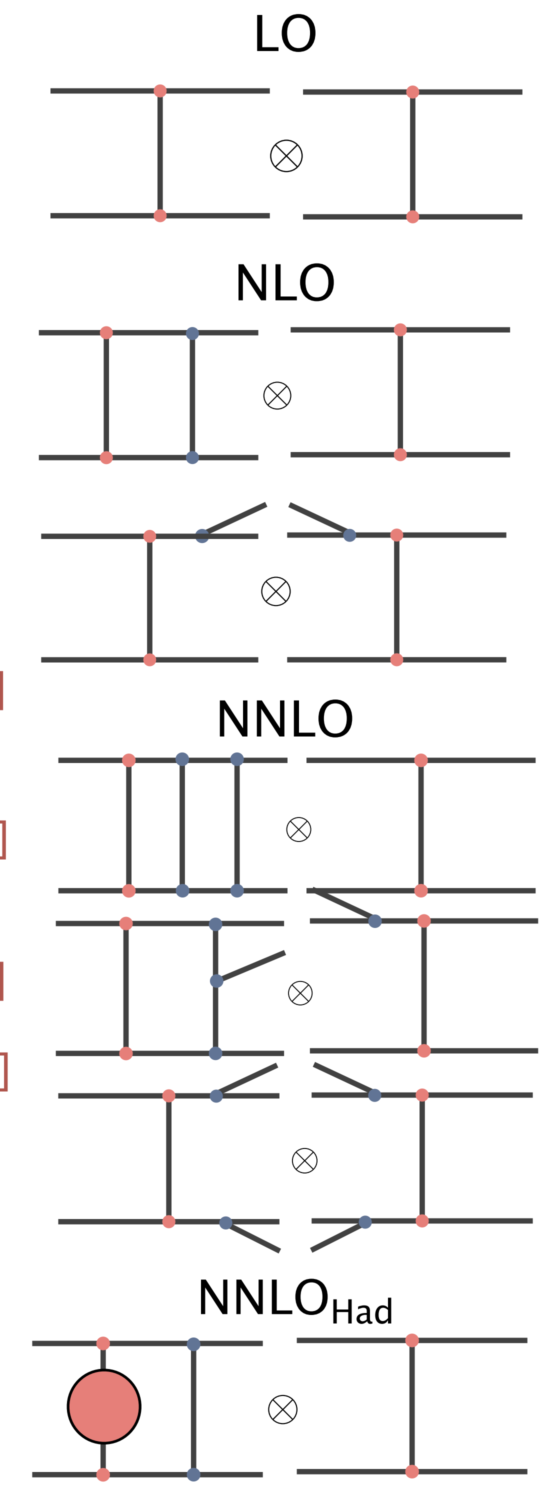
Bulk: correzioni radiative in QED

$$d\sigma = \boxed{\underbrace{d\sigma^{(0)}}_{\text{LO}} + \alpha\, \underbrace{d\sigma^{(1)}}_{\text{NLO}} + \alpha^2 \underbrace{d\sigma^{(2)}}_{\text{NNLO}}} + \underbrace{\alpha_i^3 d\sigma^{(3)}}_{\text{N}^3\text{LO}} + \mathcal{O}(\alpha_i^4)$$

- NLO QED+EW: MC differenziale disponibile ($m_e \neq 0$)
  [Alacevich, Carloni Calame, Chiesa et al 19]
- NNLO QED: elemento di matrice virtuale (m_e=0)
  [Di Vita, Laporta, Passera, AP, Mastrolia, Schubert, Torres 17,18, xx]
  contributi di doppia e singola emissione
  [Fael, Mastrolia, Ossola, Passera, Signer,Torres-Bobadilla, in corso]
- NNLO adronico da dati space-like [Fael, Passera 19]

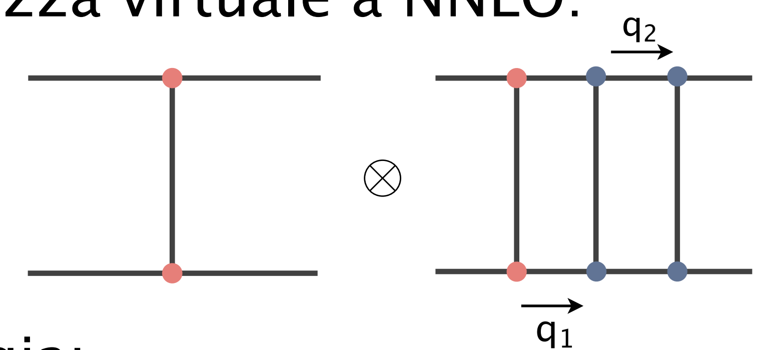
Elemento di matrice fisico

- "massificazione": effetti $\sim \log m_e^2$ a NNLO
- risommazione



Ampiezza virtuale a NNLO

Ampiezza virtuale a NNLO:



Strategia:

$$\mathcal{M}^{(0)*}\mathcal{M}^{(2)} = \sum_k c_k(s,t,m^2) I_k(s,t,m^2)$$

- c_k: coefficienti razionali
- I_k: integrali di Feynman a due loop

$$\mathcal{I} = \int d^d q_1 d^d q_2 \frac{1}{D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n}} \qquad D_j = l_j^2 - m_j^2$$

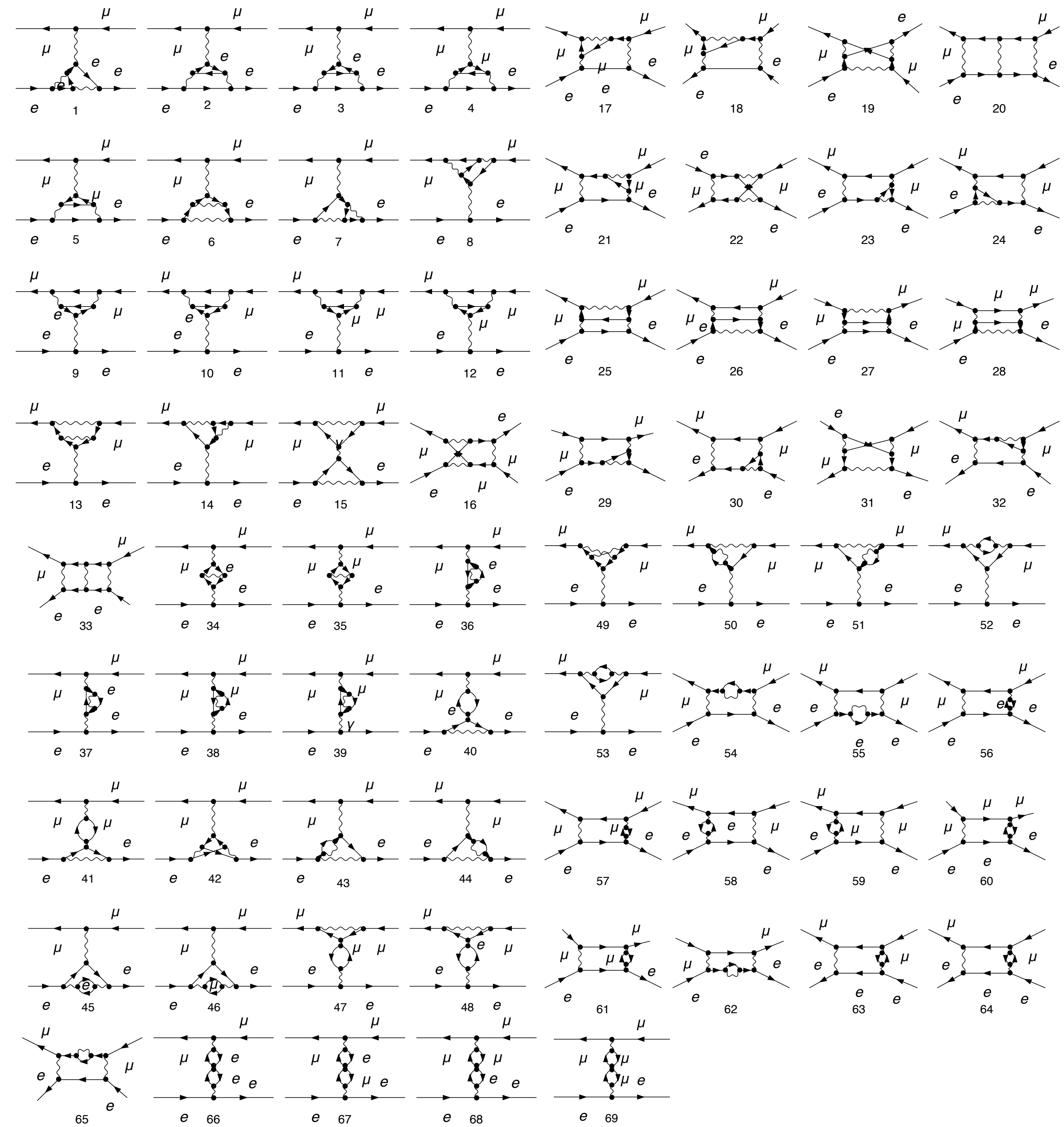
Obiettivo :

- estrarre i c_k di una base di master integrals
- determinare l'espressione analitica degli I_k

Assunzioni:

- approssimazione m_e=0
- regolarizzazione dimensionale $d=4-2\varepsilon$

$\mathcal{M}^{(2)}$



c_k: decomposizione

c_k estratti per via algebrica

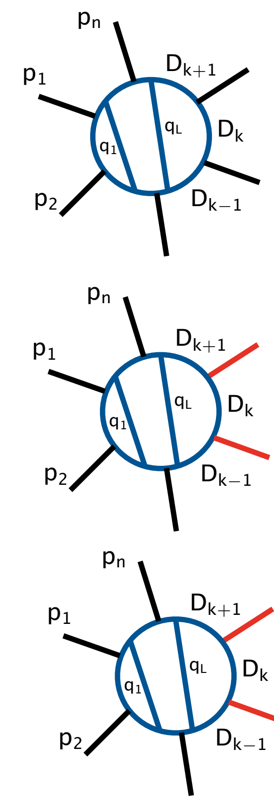
- NLO: decomposizione a livello integrando

[Ossola, Papadopoulos, Pittau 06…]

- estensione a NNLO

$$\mathcal{M}^{(0)*}\mathcal{M}^{(2)} = \sum_k c' \mathcal{I}_k$$

$$\mathcal{I} = \int d^d q_1 d^d q_2 \frac{1}{D_1^{a_1} \ldots D_n^{a_n}} \qquad D_j = l_j^2 - m_j^2$$



$$= \frac{N_{i_1 \cdots i_k \cdots i_m}(q_j)}{D_1 \cdots D_k \ldots D_m}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{N_{i_1 \cdots i_{k-1} i_{k+1} \cdots i_m}(q_j) \cancel{D_k}}{D_1 \cdots \cancel{D_k} \ldots D_m} + \frac{\Delta_{i_1 \cdots i_k \cdots i_m}(q_j)}{D_1 \cdots D_k \ldots D_m}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\ldots) + \frac{\Delta_{i_1 \cdots i_k \cdots i_m}(q_j)}{D_1 \cdots D_k \ldots D_m}$$

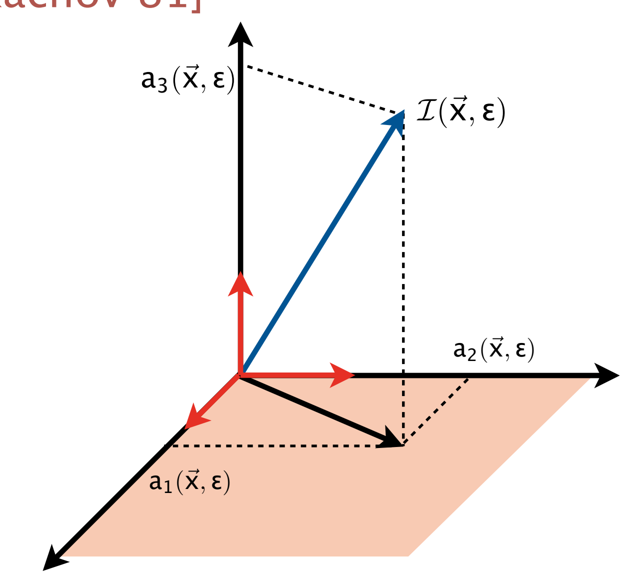
- algoritmo automatizzatile [Mastrolia, Peraro, AP 16] [Mastrolia, Peraro, AP, Ronca,Torres, in corso]
- A due loop la decomposizione integranda non è minimale

Gli integrali di Feynman soddisfano le integration-by-parts: [Chetyrkin, Tkachov 81]

$$\int \prod_{j=1}^{\ell} d^d q_j \, \frac{\partial}{\partial q_i^\mu} \left(v^\mu \frac{1}{D_1^{a_1} \cdots D_n^{a_n}} \right) = 0 \qquad v^\mu \in \{q_i^\mu, p_i^\mu\}$$

- esiste un numero finito di master integrals
- I_k formano una base dello spazio degli integrali di Feynman

$$\mathcal{I}(\vec{x}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N} a_i(\vec{x}, \varepsilon) I_i(\vec{x}, \varepsilon)$$



I_k: equazioni differenziali

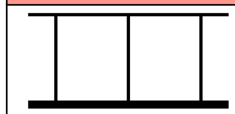
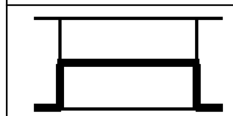
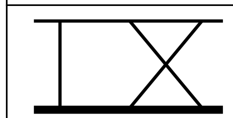
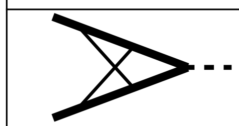
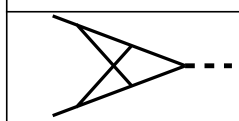
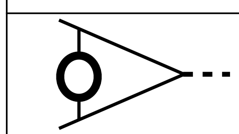
$$\mathcal{M}^{(0)*}\mathcal{M}^{(2)} = \sum_{k=1}^{154} c_k(s,t,m^2,\varepsilon) I_k(s,t,m^2,\varepsilon)$$

Nessun metodo generale per l'integrazione di I_k

I_k soddisfano PDE del primo ordine negli invarianti:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{I}(\vec{x},\varepsilon) = \mathbf{A}_i(\vec{x},\varepsilon)\vec{I}(\vec{x},\varepsilon)$$

- $\vec{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_N)$
- $$\mathbf{A}_i(\vec{x},\varepsilon) = \begin{pmatrix} * & & & & & \\ * & * & & & & \\ * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \qquad * = f(\vec{x},\varepsilon)$$

Topology	# integrals in $\mathcal{M}^{(2)}$	# master integrals I_k
	2754[1]	34 (+21 crossings)
	2359	31 (+16 crossings)
	1128	19 (9 crossings)
	654[2]	17
	75[3]	3
	50[4]	4

1 [Bonciani, Ferroglia, Gehrmann et al 08...]
2 [Bonciani, Mastrolia, Remiddi 03]
3 [Gonzalves 83, Kramer, Lampe 87]
4 [Aglietti, Bonciani 04]

Calcolo dei master integral:

- risolvere le PDE in termini di funzioni speciali note
- imporre condizioni al contorno fisiche

I_k: equazioni differenziali canoniche

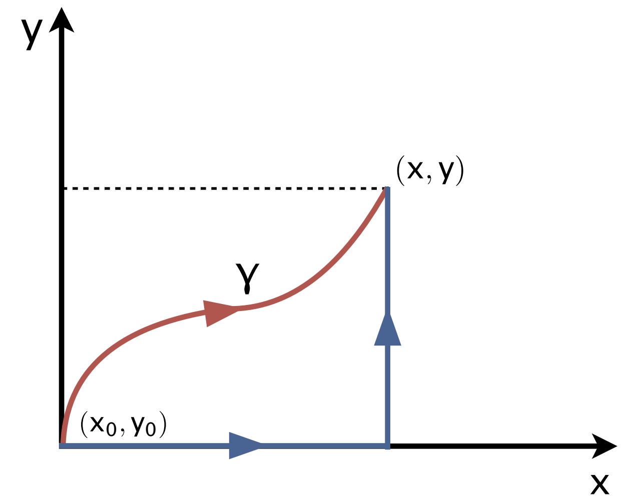
Soluzione semplificata dalla scelta "canonica" della base di master integrals [Henn 13]

$$d\vec{I}(\vec{x},\varepsilon) = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}_i \, d\log \eta_i(\vec{x})\right] \vec{I}(\vec{x},\varepsilon)$$

- soluzione disaccoppiata ordine per ordine in ε $\quad \vec{I}^{(n)}(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} \int d\mathbf{A} \ldots d\mathbf{A}\, \vec{I}^{(n-k)}(\vec{x}_0)$
- kernel logaritmici

Integrali ripetuti in termini di polilogaritmi

$$G(\vec{\omega}_n; x) = \int_0^x \frac{dt}{t-\omega_1} G(\vec{\omega}_{n-1}; t) \qquad G(\vec{0}_n; x) = \frac{1}{n!} d\log^n x$$



- proprietà analitiche note
- valutazione numerica rapida ed accurata

[Goncharov 98, Remiddi, Vermaseren 99, Gehrmann, Remiddi 00...]

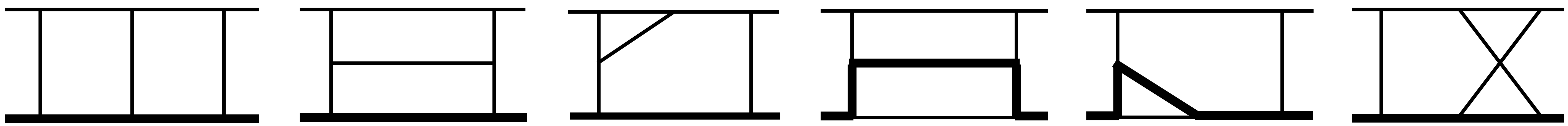
PDE in forma canonica con il metodo di Magnus [Argeri, Di Vita, Mastrolia et al 14]

- condizione iniziale: $\quad \partial_x \vec{I} = \left(\mathbf{A}^{(0)}(x) + \varepsilon \mathbf{A}^{(1)}(x)\right)\vec{I}$
- Il termine $\varepsilon = 0$ assorbito dall'esponenziale di Magnus $\mathbf{B} = \exp\left(\Omega[\mathbf{A}^{(0)}](x)\right)$

$$\partial_x \vec{J} = \varepsilon \left(\mathbf{B}^{-1}(x)\mathbf{A}^{(1)}(x)\mathbf{B}(x)\right)\vec{J}$$

Master integrals per lo scattering μe

Funzioni a quattro punti per lo scattering μe



F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6

- $F_{1,2,3}$ note dalla produzione di $t\bar{t}$ a LHC, $F_{4,5,6}$ sconosciute

PDE in forma canonica con il metodo di Magnus [Mastrolia, Passera, AP, Schubert 17] [Di Vita, Laporta, Mastrolia, AP, Schubert 18]

$$d\,\vec{\mathrm{I}}(x,y,\varepsilon) = \varepsilon \sum_k \mathbb{M}_k \, \mathrm{dlog}\,\eta_k(x,y)\, \vec{\mathrm{I}}(x,y,\varepsilon)$$

- $F_{4,5}:\quad s = -m^2\,x \qquad t = -m^2\,\frac{(1-y)^2}{y}$

$$\eta_1 = x \qquad \eta_4 = y \qquad \eta_7 = x+y$$
$$\eta_2 = 1+x \qquad \eta_5 = 1+y \qquad \eta_8 = 1+xy$$
$$\eta_3 = 1-x \qquad \eta_6 = 1-y \qquad \eta_9 = 1-y(1-x-y)$$

- $F_6:\quad \frac{u-m^2}{s-m^2} = -\frac{x^2}{y} \qquad t = -m^2\,\frac{(1-y)^2}{y}$

$$\eta_1 = y \qquad \eta_5 = 1-x \qquad \eta_9 = x^2-y$$
$$\eta_2 = 1+y \qquad \eta_6 = 1+x \qquad \eta_{10} = 1-y+y^2-x^2$$
$$\eta_3 = 1-y \qquad \eta_7 = x+y \qquad \eta_{11} = 1-3y+y^2+z^2$$
$$\eta_4 = x \qquad \eta_8 = x-y \qquad \eta_{12} = x^2-y^2-xy^2+x^2y^2$$

Risultati

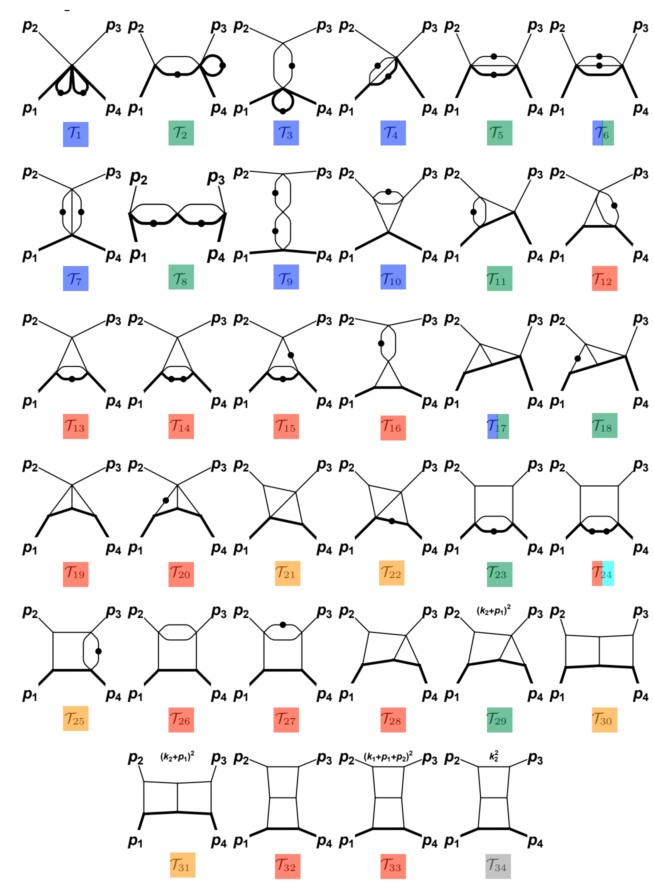
Set completo di master integrals per MuonE:

- PDE risolte in termine di polilogaritmi nella regione euclidea $s<0$, $t<0$
- Condizioni al contorno da vincoli di regolarità

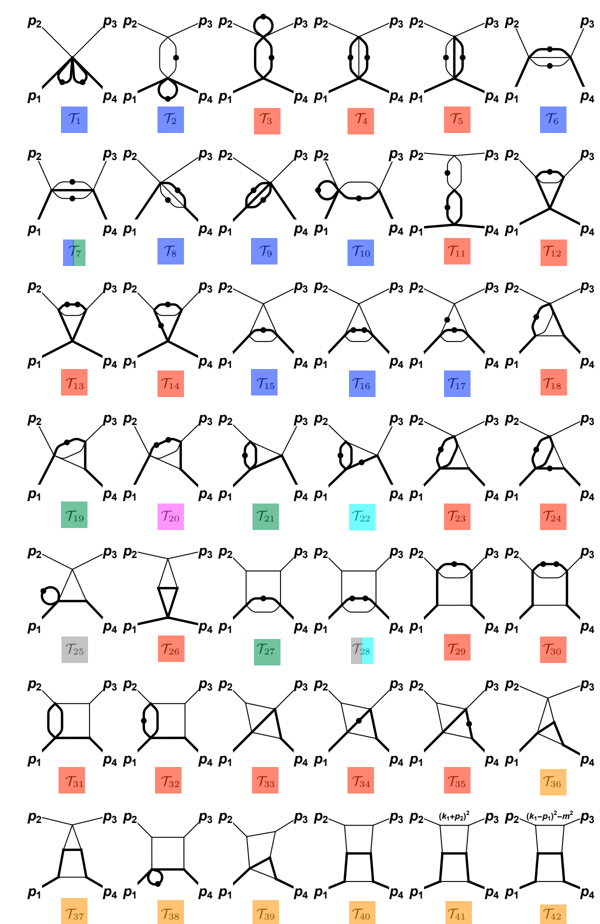
G_1
- Input
- $s \to 0$
- $t \to 4m^2$
- $u \to 2m^2$
- $s \to -m^2$
- $u \to \infty$

G_2
- planar
- $u \to 0$
- $t \to 0$
- $m^2 \to 0$
- $s \leftrightarrow u$
- $s \to \frac{\sqrt{4m^2-t}-\sqrt{-t}}{\sqrt{4m^2-t}+\sqrt{-t}}$

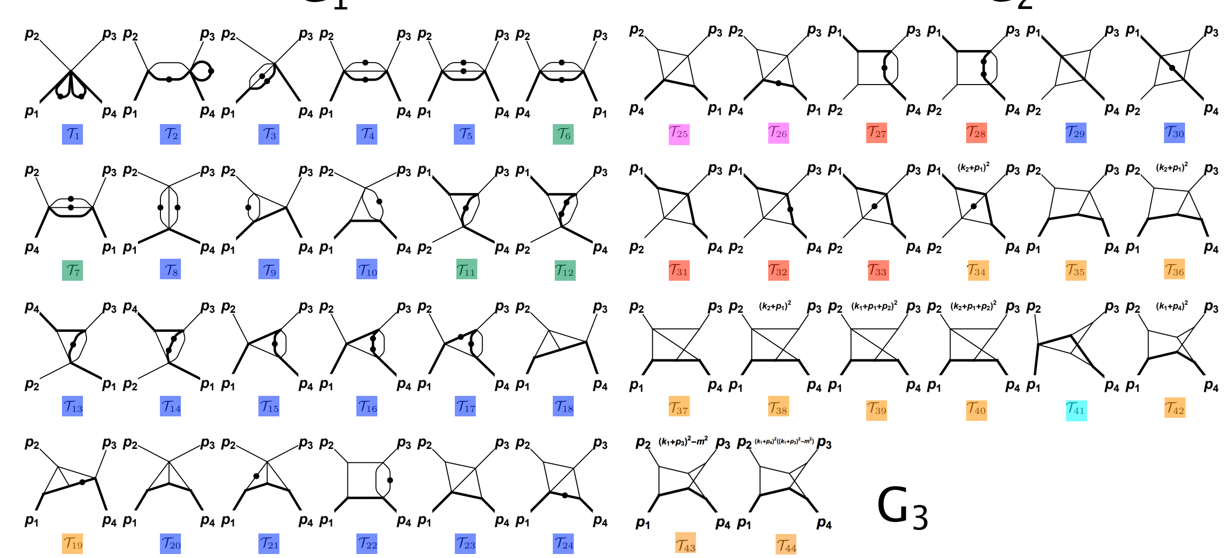
G_3
- Input
- $s \to 0$
- $t \to 0$
- $u \to m^2/2$
- $t \to 4m^2$
- $s \to 2t - m^2 - \lambda_t$



G_1

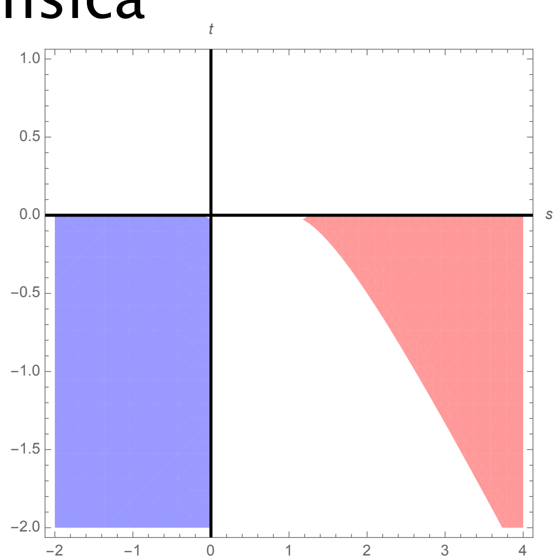


G_2



G_3

Continuazione analitica nella regione fisica



- $s > m^2$
- $-\frac{(s-m^2)^2}{m^2} < t < 0$

Conclusioni

Obiettivo: generatore MC per la sezione d'urto SM dello scattering μe

- incertezza sistematica segnale/normalizzazione $\lesssim$ 10ppm

Bulk: correzioni radiative scattering μe in QED

$$d\sigma = \underbrace{d\sigma^{(0)}}_{\text{LO}} + \underbrace{\alpha\, d\sigma^{(1)}}_{\text{NLO}} + \underbrace{\alpha^2 d\sigma^{(2)}}_{\text{NNLO}} + \underbrace{\alpha^3 d\sigma^{(3)}}_{\text{N}^3\text{LO}} + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

- NLO QED+EW: MC differenziale disponibile ($m_e \neq 0$) ✅
- NNLO QED: elemento di matrice virtuale (m_e=0) ✅

  contributi di doppia e singola emissione 🛠️
- NNLO adronico da dati space-like

Il calcolo delle correzioni virtuali allo scattering μe punto di partenza per MC a NNLO

C'è ancora molto da fare: struttura IR, effetti m_e, risommazione…

Il progetto MuonE

Serie di incontri teorici per il progetto MuonE

- Padova – Settembre 2017
- Mainz – Febbraio 2018
- Zürich – Febbraio 2019

Alacevich, Banerjee, Becher, Broggio, Carloni Calame, Chiesa, Czyż, Di Vita, Engel, Fael, Laporta, Passera, Piccinini, AP, Mastrolia, Montagna, Nicrosini, Ossola, Signer, Schubert, Spira, Torres Bobadilla, Trentadue, Ulrich, …

https://agenda.infn.it/conferenceDisplay.py?confId=13774

https://indico.mitp.uni-mainz.de/event/128/

Prossimo meeting teorico: MTP Mainz 2020

25-26 Marzo 2019: 1° MuonE collaboration meeting al CERN