Problemi aperti e prospettive in Fisica della Gravitazione

Salvatore Capozziello

Sommario

- I fondamenti: la gravità e lo spazio-tempo
- Problemi concettuali in Relatività Generale
- Alternative ed estensioni della RG
- Metrica o connessione?
- Il limite di campo debole
- Il ruolo del Principio di Equivalenza
- Test del PE a livello classico e quantistico
- Conclusioni

I fondamenti: gravitazione e spazio-tempo

Einstein formulò una teoria della gravità basata sui seguenti requisiti:

- Principio di equivalenza → Gravità e Inerzia sono indistinguibili; esistono osservatori in caduta libera (moti inerziali)
- Principio di relatività → la Relatività Ristretta è valida; la struttura dello spazio-tempo è localmente minkowskiana
- Principio di covarianza generale → "democrazia" in Fisica
- Principio di causalità → tutti i fenomeni fisici si propagano all'interno dei coni luce
- Insegnamento di Riemann sul legame tra materia e curvatura →

I fondamenti: gravità e spazio-tempo

Conseguenze matematiche:

- principio di equivalenza → moti inerziali = moti geodetici
- principio di relatività → lo spazio-tempo M possiede una metrica lorentziana g

- principio di covarianza generale → tensorialità
- principio di causalità → la struttura dei coniluce è generata dalla metrica g
- insegnamento di Riemann sul legame tra materia e curvatura → il campo gravitazionale è descritto da g → 10 equazioni
  Riem(g) ha 20 componenti (independenti): troppe!
  Ric(g) ha 10 componenti (independenti): va bene!

I fondamenti: gravità e spazio-tempo

La distribuzione della materia influenza la gravità attraverso 10 equazioni del secondo ordine, le equazioni di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

Il tensore di Einstein, che discende dal tensore di Riemann, eguaglia il tensore energia-momento che rappresenta le proprietà della materia.

Esse hanno una struttura tale che si riducono alle equazioni newtoniane nel limite delle basse energie.

I fondamenti: gravità e spazio-tempo

Einstein non era soddisfatto del risultato che il campo gravitazionale non è un oggetto fondamentale, ma solo un sottoprodotto della metrica. Usando il metodo proposto pochi anni prima da Attilio Palatini, Einstein realizzò che si possono ottenere le equazioni di campo lavorando su una teoria che dipende da *due* variabili indipendenti:

una metrica g e una connessione lineare *Γ* assunta essere simmetrica.

$$R \equiv R(g,\Gamma) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) \qquad \mathcal{L}_{PE} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma, \partial\Gamma)$$

Ci sono allora 10 + 40 variabili indipendenti e le equazioni sono:

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

$$\nabla^{\Gamma}_{\alpha} \left(\sqrt{g} g^{\mu\nu}\right) = 0$$

Problemi concettuali in Relatività Generale

La metrica *g* è ancora l'oggetto fondamentale della gravità?

Einstein provò a considerare direttamente la connessione come l'oggetto fondamentale della gravità, ma non completò mai il processo di "detronizzazione" di *g*. Un tentativo simile fu fatto da Weyl….

Problemi concettuali in Relatività Generale

Ma dopo tutto, quali sono i problemi in RG?

La RG è *semplice*, bella… ma non è consistente a tutte le scale (problemi alle scale IR e UV):

- Costante cosmologica Λ
- Inflazione
- Materia Oscura + Energia Oscura
- Gravità Quantistica
- Consistenza del PE a livello classico e quantistico
- Sono possibili altre polarizzazioni delle OG (6 gradi di libertà ma 2 polarizzazioni)?

Le osservazioni ci dicono che c'è poca materia visibile nell'Universo! Da qui, per salvare la RG a livello IR, abbiamo bisogno di energia oscura e materia oscura:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{dark}$$

Ci sono soluzioni a questi problemi?

Alternative ed estensioni della RG

Una possibilià è considerare estensioni della RG come la gravità f(R) dove la lagrangiana di Hilbert-Einstein è sostituita da una qualsiasi funzione dello scalare di Ricci o di un qualsiasi invariante di curvatura. Queste teorie hanno forti motivazioni quantistiche e di fisica fondamentale (Principio di Mach)

In queste teorie c'è una parte del secondo ordine che riproduce il tensore di Einstein (si recupera la RG non appena f(R) = R) e una parte del quarto ordine di "curvatura" (che si riduce a zero sempre se f (R) = R):

$$f'(R(g))\,R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}f(R(g))g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R(g)) + g_{\mu\nu}\Box f'(R(g)) = \kappa\,T_{\mu\nu}$$

Gravità di ordine superiore (IV ordine)!

Portando a destra la parte del quarto ordine, otteniamo un "extra tensore energia-momento di curvatura" $T_{\mu\nu}^{\text{curv}}$
La gravità f(R) può essere riportata ad una forma scalar-tensoriale usando il paradigma che i termini di ordine superiore possono essere trattati come campi scalari e quindi spiegare le componenti oscure

(SC e M. De Laurentis Phys. Rept. 509 (2011) 167)

Alternative ed estensioni della RG

La RG è un caso particolare. Si recupera per f(R)=R.

$f'(R) = 1$

$f''(R) = 0$

Equazioni del Secondo Ordine

Teoria degenere

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Gravitazione

Materia

Due approcci al problema "oscuro": Dalla parte "materiale" o dalla parte "geometrica"

$$G_{\mu\nu} = (8\pi G) T_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu} \Rightarrow \tilde{G}_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu} \Rightarrow \tilde{T}_{\mu\nu}$

Teorie estese della gravitazione

- QFT sugli spazi-tempi curvi
- Stringhe/M-theory, correzioni quantistiche
- Modelli di brane, settore gravitazionale di Higgs

$$R,\ R^{\mu\nu}R_{\mu\nu},\ R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta},\ R\Box^{l}R,$$

Energia oscura, materia oscura

- Costante cosmologica
- Variazione delle constanti
- Campi scalari
- Campi "fantasmi"
- Materia esotica

Si possono considerare invarianti geometrici o campi scalari

Il limite di campo debole

Gli effetti “geometrici” inducono correzioni sul potenziale newtoniano. Per esempio, nel caso della gravità f(R) si ha:

$$\mathcal{A} = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[f(R) + \mathcal{X}\mathcal{L}_m\Big],$$

$$\mathcal{X} = \frac{16\pi G}{c^4}$$

Equazioni di campo

$$f'R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}fg_{\mu\nu} - f'_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f' = \frac{\mathcal{X}}{2}T_{\mu\nu}$$

$$3\Box f' + f'R - 2f = \frac{\mathcal{X}}{2}T$$

Equazione della traccia

$$f(R) = \sum_n \frac{f^n(R_0)}{n!}(R - R_0)^n \simeq f_0 + f_1R + f_2R^2 + f_3R^3 + \ldots .$$

Il limite di campo debole

Nel limite newtoniano, possiamo considerare perturbazioni della metrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

I coefficienti della metrica risultano

$$\begin{cases} g_{tt}(t,r) \simeq 1 + g_{tt}^{(2)}(t,r) + g_{tt}^{(4)}(t,r) \\ g_{rr}(t,r) \simeq -1 + g_{rr}^{(2)}(t,r) \\ g_{\theta\theta}(t,r) = -r^2 \\ g_{\phi\phi}(t,r) = -r^2 \sin^2\theta \end{cases},$$

Il limite di campo debole

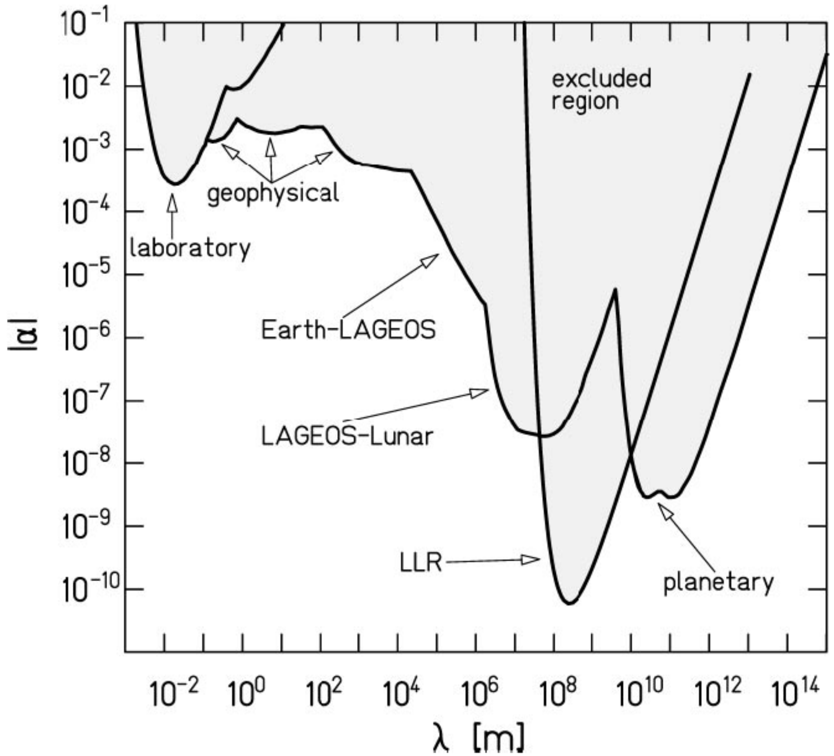
La soluzione generale:

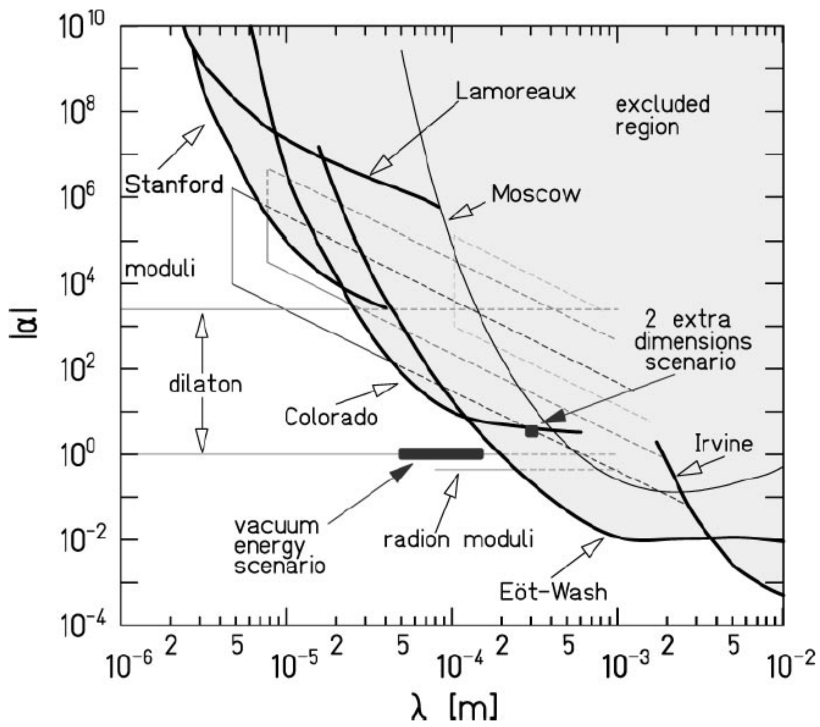
$$\boxed{\Phi_{grav} = -\left(\frac{GM}{f_1 r} + \frac{\delta_1(t)e^{-r\sqrt{-\xi}}}{6\xi r}\right)}$$

Come un effetto di "quinta forza"

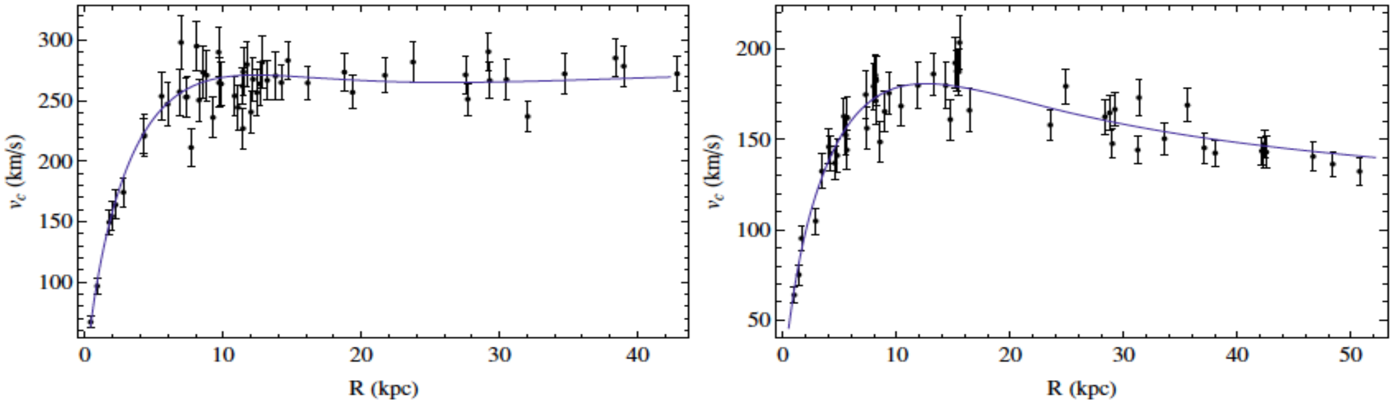
$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}[1 + \alpha e^{-r/\lambda}]$$

Limiti sperimentali





Il limite di campo debole



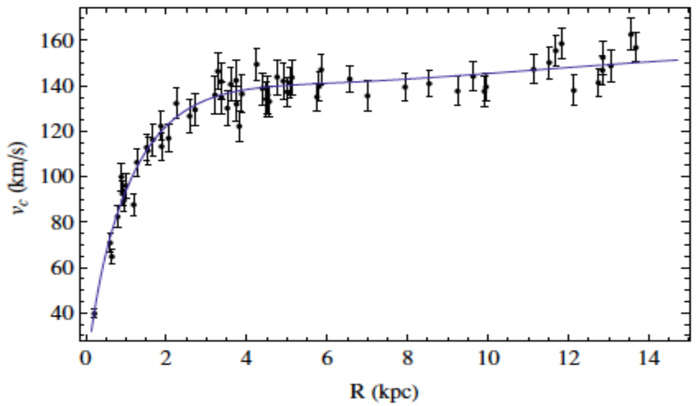


Figure 4 Examples of simulated rotation curves with superimposed theoretical curves. From left to right, model parameters are $(\log M_d, \log M_{\rm vir}, c, f_{DM}, \log \eta_L)$ = (11.15, 12.90, 10.24, 0.47, 0.36),(10.90, 11.76, 14.77, 0.45, −0.92), (10.04, 12.10, 13.76, 0.54, 1.11), while the simulation parameters are set as discussed in the text. Note that, depending on how the model parameters are set, it is possible to get rotation curves which are flat, decreasing or increasing in the outer region.

SC, M. De Laurentis, Annalen der Physik 524 (2012) 545

Metrica o connessione?

Torniamo alle nostre questioni:

- Einstein aveva ragione ad assumere la metrica *g* dello spazio-tempo come l'oggetto fondamentale per descrivere la gravità?

  Quale è il ruolo della connessione Γ ?

$$\ddot{x}^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^{\mu}\,\dot{x}^{\nu}=0$$

Metrica o connessione?

Quando Einstein formulò la GR, il solo oggetto geometrico che poteva usare era una metrica (lorentziana) g,

A quel tempo non aveva altra scelta!

In RG, le $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}_g$ non sono equazioni ma definizioni.

Esse assumono la struttura dello spazio-tempo data da g che definisce la connessione Γ ; questa connessione non ha dinamica; essa è *a priori* la connessione di Levi-Civita indotta dalla metrica g. Solo g ha dinamica. Quindi il solo oggetto g determina la struttura causale (i coni luce), le misure (metri e orologi) e la caduta libera delle particelle di prova (geodetiche). Matematicamente, lo spazio-tempo è dato dalla coppia (M,g).

In RG, la gravità induce "osservatori in caduta libera" e il Principio di Equivalenza seleziona oggetti che non sono tensori, cioè le Γ.

In RG, struttura causale e struttura geodetica devono coincidere.

Metrica o connessione?

Quando nel 1919 Levi-Civita introdusse le connessioni, Einstein aveva un'altra scelta. Ma non la considerò. Perché?

Nel formalismo di Palatini, la connessione Γ e la metrica g sono indipendenti. Lo spazio-tempo è dato dalla tripla (M, g, Γ) dove la metrica determina metri e orologi (cioè determina le misure dello spazio-tempo) mentre Γ determina la caduta libera.

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \qquad \nabla^{\Gamma}_{\alpha} \left(\sqrt{g} g^{\mu\nu}\right) = 0$$

Le seconde equazioni ci dicono *a posteriori* che Γ è la connessione di Levi-Civita di g. Le prime equazioni diventano allora le equazioni usuali di Einstein in formalismo metrico. A causa di questo, Einstein considerò la metrica come l'oggetto fondamentale della gravità.

.. Ma questa coincidenza (tra Γ e la connessione di Levi-Civita di g) è dovuta alla PARTICOLARE LAGRANGIANA considerata da Einstein, che è la *più semplice…* ma non è la sola possibile! Nelle Teorie Estese della Gravitazione *g e Γ possono essere indipendenti!!*

Metrica o connessione?

$$\begin{cases} f'(R)R_{(\mu\nu)}(\Gamma) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \\ \nabla^{\Gamma}_{\alpha}(\sqrt{g}f'(R)g^{\mu\nu}) = 0 \end{cases}$$

$$f'(R)R - 2f(R) = \kappa\tau$$

La connessione può essere qualsiasi
non necessariamente di Levi-Civita!

Metrica o connessione?

Il metodo di Palatini privilegia la struttura affine nei confronti della struttura metrica.

La lagrangiana di Palatini contiene solo derivate di Γ, cioè il vero campo dinamico (le FORZE). La metrica g non ha dinamica poiché entra nella lagrangiana solo come un "moltiplicatore di Lagrange"

La metrica g acquista DINAMICA da Γ !!

La dinamica di Γ ci dice che le equazioni di Einstein sono valide per il tensore di Ricci di Γ

La dinamica si ottiene variando la lagrangiana rispetto alla metrica. Questo dà 10 equazioni. Altre 40 equazioni sono ottenute variando la lagrangiana rispetto alla connessione Γ. Queste equazioni supplementari governano la forma di Γ e risultano essere la connessione di Levi-Civita della metrica. Le prime equazioni si trasformano allora nelle equazioni di Einstein.

Nel formalismo di Palatini le $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}_g$ sono equazioni di campo.

Il fatto che Γ sia la connessione di Levi-Civita di g non è più una assunzione ma risulta dalle equazioni di campo solo per f(R)=R!

Metrica o connessione?

A questo punto, tra le varie teorie della gravitazione dobbiamo necessariamente preferire la più semplice (nel senso che la lagrangiana deve essere la più semplice)? NO abbiamo infinite possibilità

Metrica o connessione?

Il Principio di Equivalenza seleziona la famiglia di geodetiche Γ che sono "più fondamentali" rispetto alla struttura metrica data da g!

In altre parole, il Principio di Equivalenza seleziona il campo dinamico da cui conseguono metri ed orologi (la struttura causale dello spazio-tempo).

LA DISCRIMINAZIONE TRA LE VARIE TEORIE DELLA GRAVITAZIONE, A LIVELLO FONDAMENTALE, E' UN RISULTATO CHE PUO' ESSERE OTTENUTO TRAMITE IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA CHE NON E' DETTO VALGA ANCHE A LIVELLO QUANTISTICO!

Il ruolo del Principio di Equivalenza

In sintesi, dobbiamo capire il ruolo del PE perché:

- Può discriminare tra le diverse teorie della gravitazione
- Non sappiamo se è valido a livello classico e quantistico
- Le strutture geodetica e causale potrebbero essere distinguibili

Il ruolo del Principio di Equivalenza

Il Principio di Equivalenza di Einstein afferma:

- Il Principio di Equivalenza debole è valido;
- Il risultato di un qualsiasi esperimento locale non gravitazionale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera;
- Il risultato di un qualsiasi esperimento locale non gravitazionale è indipendente da dove e quando è realizzato nell'Universo.

Il ruolo del Principio di Equivalenza

Si definisce "esperimento locale non gravitazionale" un esperimento realizzato in un piccolo (locale) laboratorio in caduta libera.

Il risultato è che l'interazione gravitazionale dipende dalla curvatura dello spazio-tempo, cioè i postulati di una qualsiasi teoria metrica della gravitazione devono essere soddisfatti

- lo spazio-tempo è dotato di una metrica $g_{\mu\nu}$;
- le linee di mondo sono geodetiche della metrica;
- nei sistemi di riferimento in caduta libera, detti sistemi di riferimento lorentziani locali, le leggi della fisica non-gravitazionale sono quelle della Relatività Ristretta.

Il ruolo del Principio di Equivalenza

Una delle predizioni di questo principio è lo spostamento gravitazionale verso il rosso, sperimentalmente verificato da Pound e Rebka nel 1960

Le interazioni gravitazionali sono escluse dal PE in forma debole e dal PE di Einstein

Per classificare le teorie della gravitazione, occorre introdurre il PE gravitazionale e il PE in forma forte

Il ruolo del Principio di Equivalenza

Il PE in forma forte estende il PE di Einstein includendo TUTTE le leggi della Fisica:

- Il PE in forma debole è valido sia per i sistemi auto-gravitanti sia per i corpi di prova (Principio di Equivalenza gravitazionale);
- Il risultato di un qualsiasi esperimento locale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera;
- Il risultato di qualsiasi esperimento locale è indipendente dal luogo e dal tempo in cui è effettuato.

Il PE forte coincide con il PE di Einstein quando le forze gravitazionali sono trascurate.

Test del PE a livello classico e quantistico

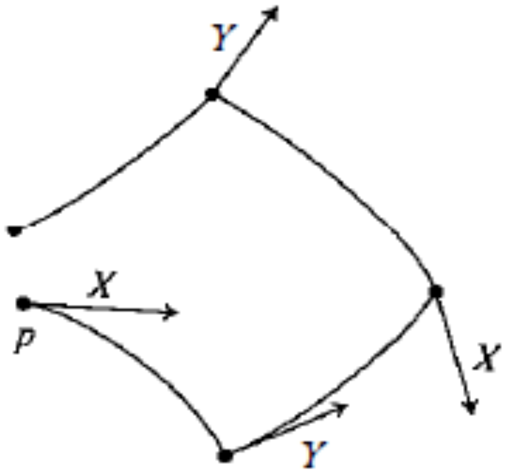
Molti autori affermano che la sola teoria coerente con PE forte è la RG.

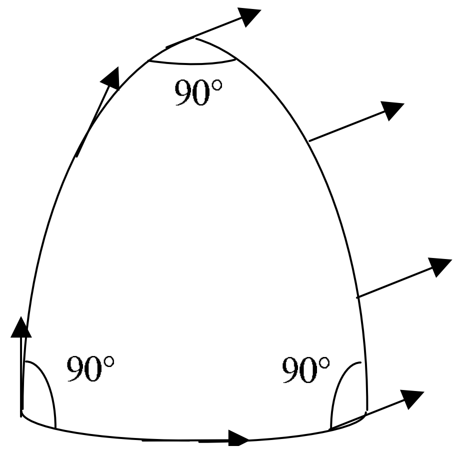
La questione è estremamente importante ed è correlata con la consistenza del PE in Meccanica Quantistica.

- Alcuni fenomeni, come l'oscillazione dei neutrini, potrebbero violare il PE a livello quantistico, se indotti dal campo gravitazionale.
- La presenza di TORSIONE discrimina tra particelle con o senza spin. Lo SPIN è la sorgente della TORSIONE.

- Dati due isotopi dello STESSO ATOMO, uno configurato come un bosone e l'altro come un fermione, se siamo in grado di evidenziare differenze nella caduta libera, possiamo avere indicazioni su:
  - Effetti di Gravità Quantistica
  - Torsione
  - Violazione del PE

Test del PE a livello classico e quantistico





Torsione

Curvatura

Test del PE a livello classico e quantistico

Si possono considerare 2 differenti classi di esperimenti:

- La prima classe vuole provare i fondamenti delle teorie gravitazionali (tra cui il PE nelle varie forme)
- La seconda vuole provare le teorie metriche della gravità assumendo che lo spazio-tempo sia dotato di un tensore metrico g ed il PE sia valido.

Per molte ragioni fondamentali, ulteriori gradi di libertà sono necessari per descrivere l'interazione gravitazionale: campi scalari, invarianti di curvatura, torsione, etc. La loro corretta identificazione (o assenza) è utile per discriminare tra le varie teorie della gravità

Test del PE a livello classico e quantistico

Le 2 classi di esperimenti possono identificarsi con 2 classi di equazioni:

- La prima classe accoppia i campi gravitazionali ai campi non gravitazionali come la distribuzione di materia, i campi elettromagnetici, etc...

- La seconda classe di equazioni considera l'evoluzione dei campi non gravitazionali.

Nel contesto delle teorie metriche, le leggi della fisica dipendono solo dalla metrica: questo fatto è conseguenza del PE di Einstein e del cosiddetto "accoppiamento minimale".

Stabilire che i campi fisici non gravitazionali dipendono solo dalla metrica e non dalla connessione costituisce un importante criterio di selezione.

Test del PE a livello classico e quantistico

Molte teorie sono caratterizzate dal fatto che un campo scalare (o più di un campo scalare) è accoppiato o no alla gravità o alla materia ordinaria

I campi scalari sono inevitabili per tutte quelle teorie che hanno lo scopo di unificare la gravità con le altre interazioni fondamentali: per esempio, le Superstringhe, la Supergravità (SUGRA), le M-teorie.

- I campi scalari sono presenti sia nella fisica delle particelle
- elementari che in cosmologia:
  - il bosone di Higgs nel Modello Standard
  - il dilatone nei supermultipletti della gravità a più dimensioni
  - i super-partner di spin ½ nella SUGRA
  - La TORSIONE e quindi gli SPIN nella dinamica

L' introduzione di campi scalari a qualsiasi livello, può dar luogo a possibili "violazioni" del Principio di Equivalenza di Einstein

Conclusioni

- Quale è la vera teoria della gravità?
- Lo spazio-tempo è con torsione o senza?
- Le strutture geodetica e causale coincidono o no?
- E' possibile formulare la Gravità Quantistica?
- La materia oscura e l'energia oscura esistono veramente o sono solo effetti geometrici?

Conclusioni

3 strumenti chiave in Fisica della Gravitazione dovrebbero essere combinati:

- Il Principio di Equivalenza (seleziona le teorie)
- Il limite di campo debole (dinamica dei sistemi astronomici)
- Onde gravitazionali (campi forti, buchi neri, etc.)