



“CINETICA DI FLUSSO DI SFERE OMOGENEE ATTRAVERSO TRONCHI DI CONO A PARETE SOFFICE”



Antonio Parretta

Lunedì, 15 Maggio 2017

Ore 14:30

Aula 412



Dip.to di Fisica e Scienze della Terra
Università di Ferrara

Sommario

- Cenni sulla **clessidra** (hourglass o sandglass)
- Una **clessidra artigianale** fatta con coni di cartoncino e piccole sfere
- Misura dei **tempi di scorrimento vs. quantità di sferette** e confronto col comportamento della sabbia e dell'acqua
- Misura dei **tempi di scorrimento vs. dimensioni del foro** di uscita e ipotesi sui **diversi regimi di flusso**
- Studio del flusso con **microfono** e conferma delle ipotesi
- Misura dei **tempi di scorrimento vs. angolo di apertura** del cono
- **Espressione universale del flusso relativo vs. il diametro ridotto**

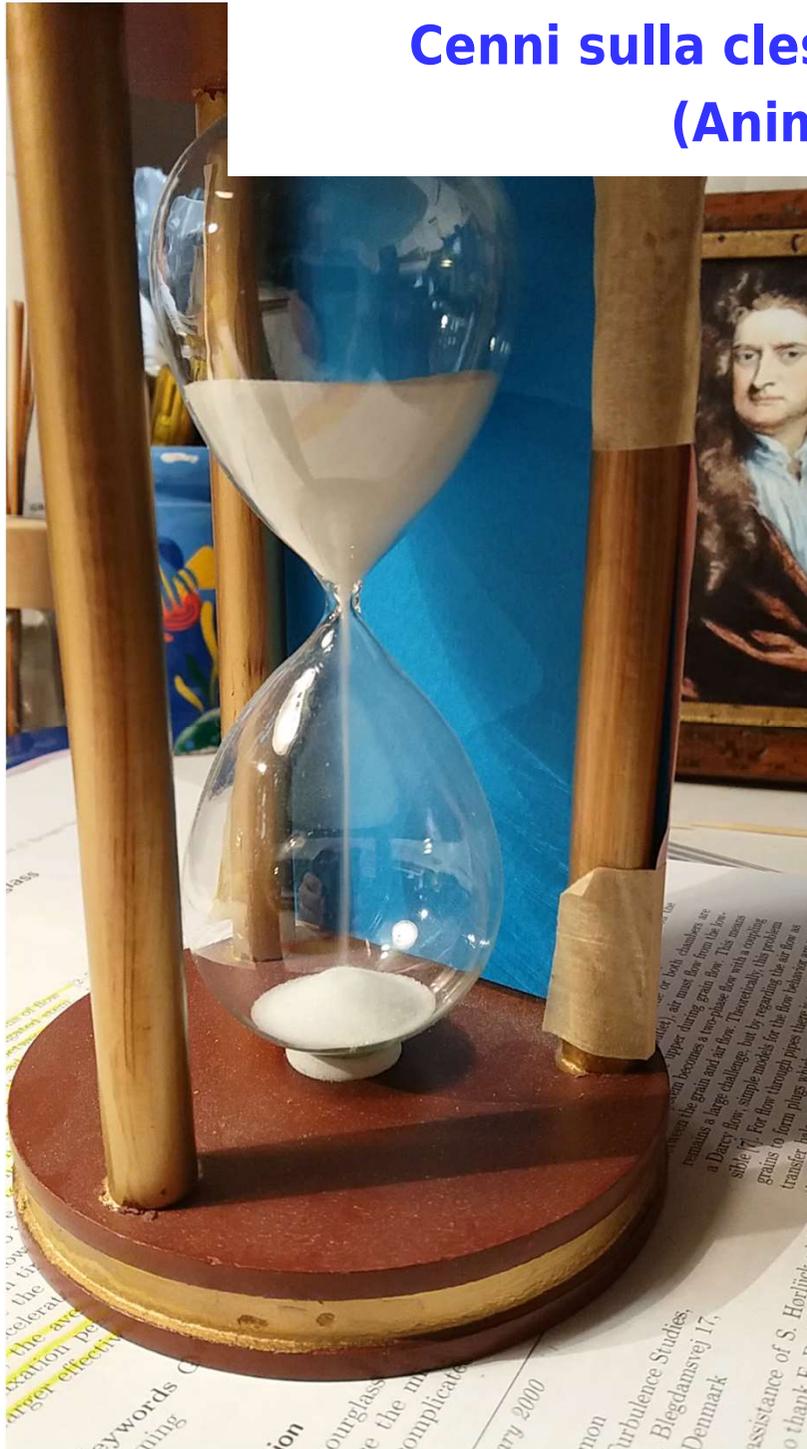
Legenda

- δ = diametro medio delle sferette;
- ρ_S = peso specifico (densità) delle sferette;
- ρ_M = peso specifico medio delle sferette compattate all'interno di un volume V ;
- PF = fattore d'impacchettamento delle sferette all'interno di un volume V ;
- d = diametro del foro d'uscita;
- α = semiapertura del cono;
- Q = quantità iniziale di sferette;
- T = tempo di scorrimento delle sferette attraverso il cono;
- f o $f_m = Q/T$ = flusso di massa (g/s) attraverso il foro d'uscita;
- f_V = flusso di volume di materia compatta (cm^3/s) attraverso il foro d'uscita;
- V = velocità di uscita della colonna di materia compatta dal cono;
- d_{MIN} = diametro minimo del foro d'uscita per il quale si ha un flusso regolare;
- $d_R = d/\delta$ = diametro ridotto del foro d'uscita;
- $d_{\text{RMIN}} = d_{\text{MIN}}/\delta$ = diametro minimo ridotto del foro d'uscita;
- f_{MIN} = flusso minimo di massa (g/s) misurato in corrispondenza di d_{MIN} ;
- $f_{\text{rel}} = f/f_{\text{MIN}}$ = flusso relativo (adimensionale) di materia attraverso il foro d'uscita;
- T_{MIN} = tempo di scorrimento minimo delle sferette attraverso il cono;

Legenda

- d'_c = primo diametro critico, posto alla fine del primo tratto lineare;
- d''_c = secondo diametro critico, posto alla fine del secondo tratto lineare;
- d'''_c = terzo diametro critico, posto alla fine del terzo tratto lineare;
- d'_{RC} = primo diametro critico ridotto, posto alla fine del primo tratto lineare;
- d''_{RC} = secondo diametro critico ridotto, posto alla fine del secondo tratto lineare;
- d'''_{RC} = terzo diametro critico ridotto, posto alla fine del terzo tratto lineare;
- s' = pendenza, adimensionale, del primo tratto lineare;
- s'' = pendenza, adimensionale, del secondo tratto lineare;
- s''' = pendenza, adimensionale, del terzo tratto lineare;
- s'''' = pendenza, adimensionale, del quarto tratto lineare;
- N_p = numero totale di sferette;
- N_c = numero di sferette in ciascun grappolo;
- v_0 = frequenza di uscita delle sferette dal cono;
- Δv = frequenza di modulazione del flusso;

Cenni sulla clessidra (hourglass) (Animazione)



Cenni sulla clessidra (hourglass)

Why hour glasses tick

Wu et al., Phys. Rev. Lett. 71, 1363 (1993).

We have found experimentally that the flow of sand in an hourglass is oscillatory in a certain range of parameters. The oscillatory motion results from a coupling between the flow of sand and convection of air through the sand matrix.

The period of the oscillation is remarkably insensitive to the grain size, while the mass of the sand contained in one period strongly depends on it.

The dynamics of granular flow in an hourglass

C.T. Veje, P. Dimon, Granular Matter 3, 151 (2001).

We present experimental investigations of flow in an hourglass with a slowly narrowing elongated stem. The primary concern is the interaction between grains and air. For large grains the flow is steady. For smaller grains we find a relaxation oscillation (ticking) due to the counterflow of air.

Differenze principali tra la clessidra classica e la nostra clessidra artigianale

Nella **clessidra classica**, la sabbia è posta all'interno di due bulbi conici sigillati rispetto all'ambiente esterno e comunicanti tra loro attraverso un sottile stelo (stem), molto grande rispetto alle dimensioni delle particelle.

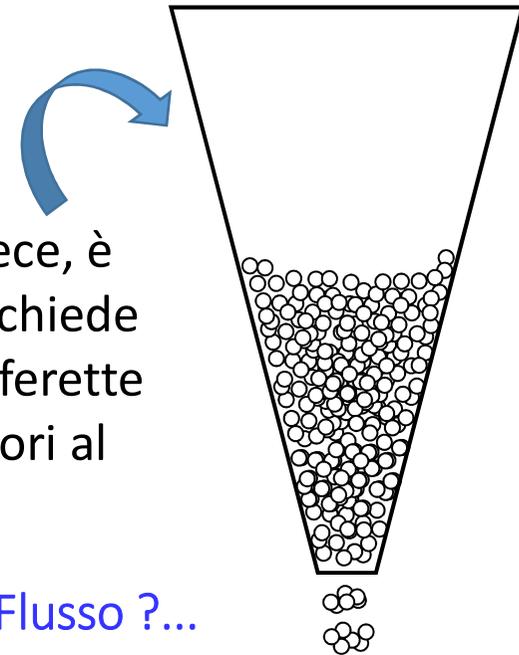


Flusso non stazionario!

Il passaggio della sabbia attraverso lo stelo è accompagnato da un **controflusso** di aria verso l'alto, che serve ad equilibrare la pressione nel bulbo superiore.



La nostra **clessidra artigianale**, invece, è aperta all'ambiente e quindi non richiede un controflusso di aria. Inoltre, le sferette hanno dimensioni non molto inferiori al foro di uscita.



Flusso ?...

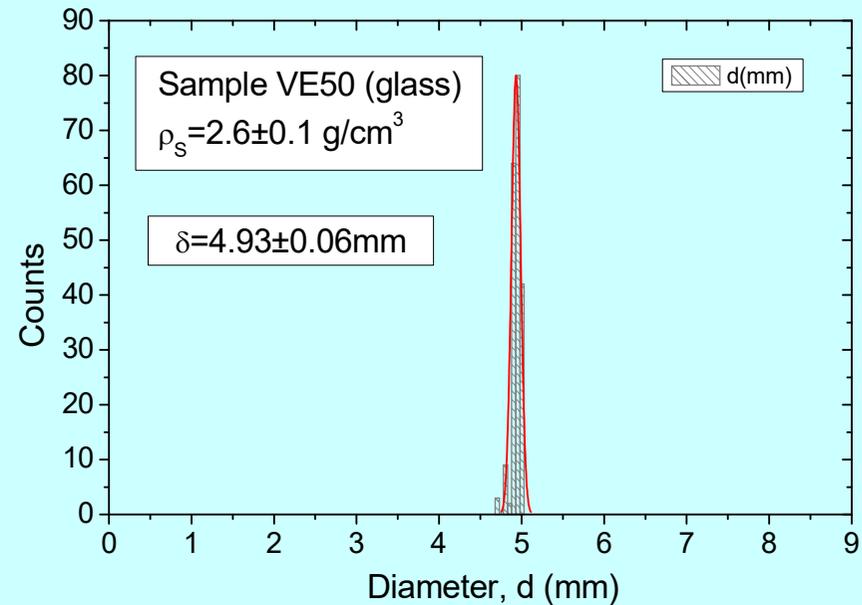
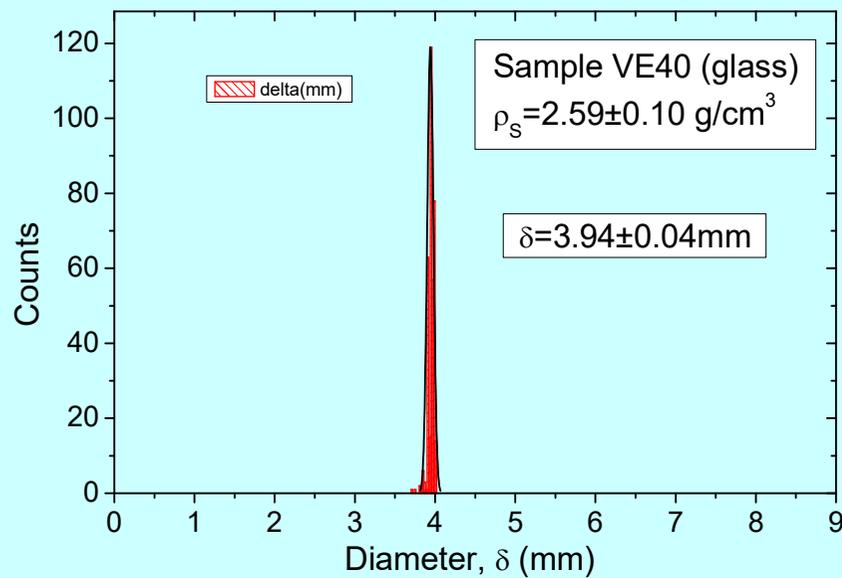
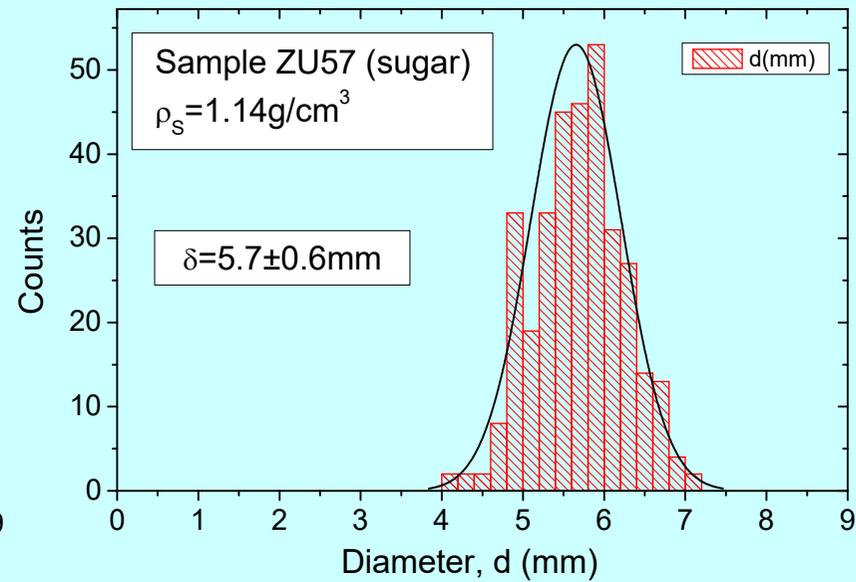
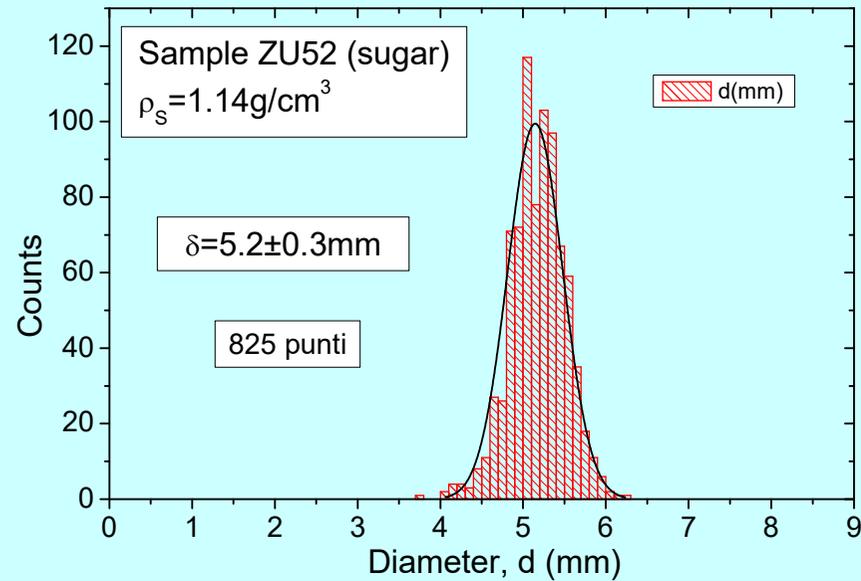
Una semplice clessidra artigianale



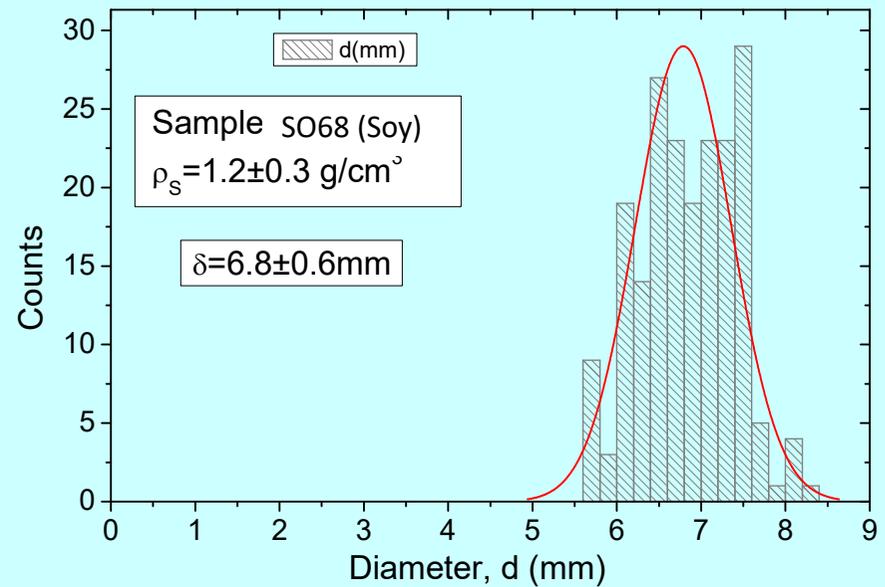
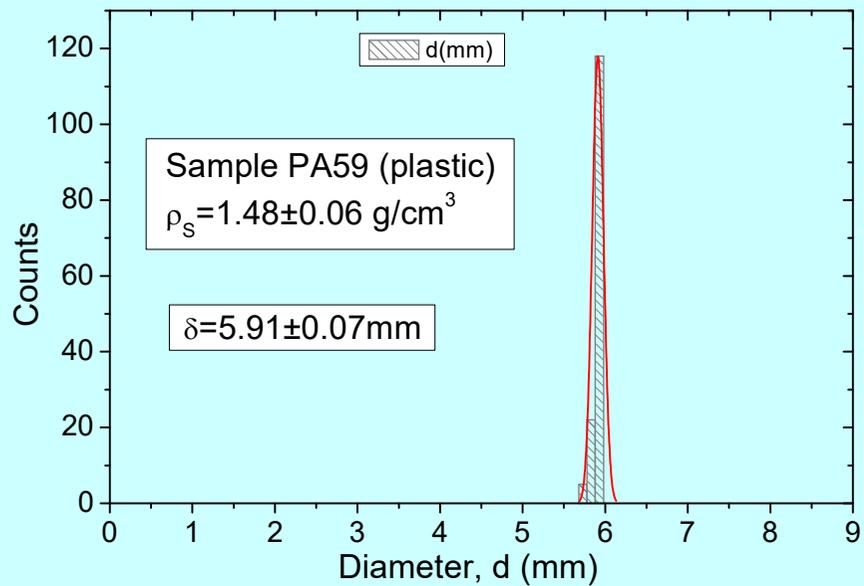
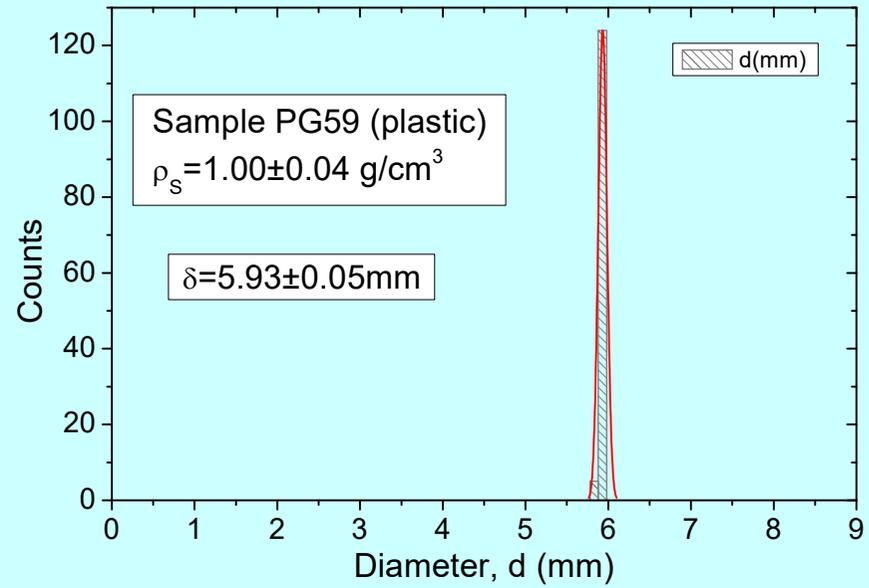
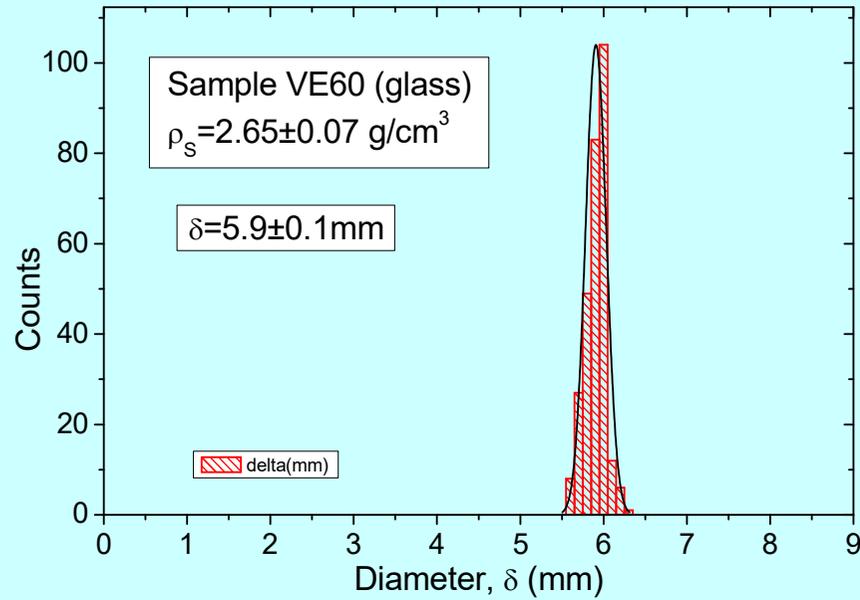
Materiali e strumenti



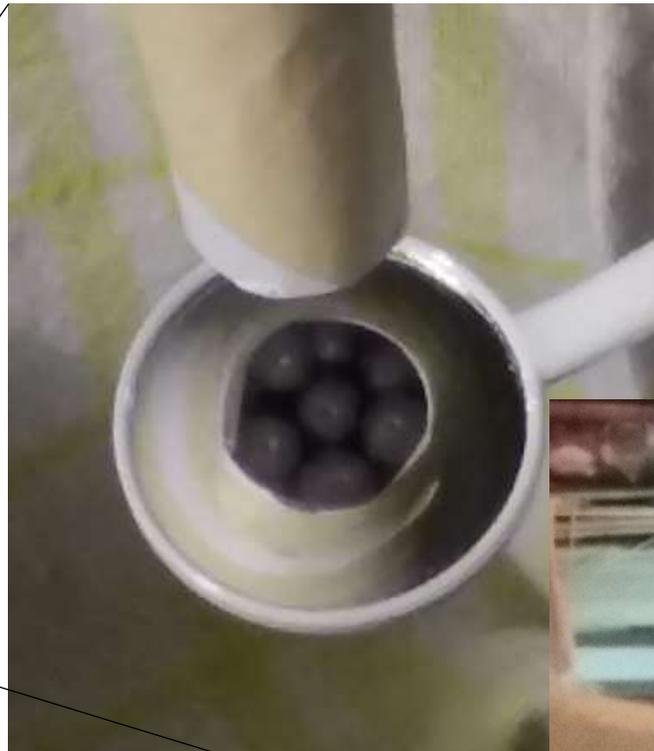
Campioni di sferette



Campioni di sferette



Per fori piccoli, sul fondo del cono si forma una struttura esagonale quasi-regolare



$$d \lesssim 3\delta:$$

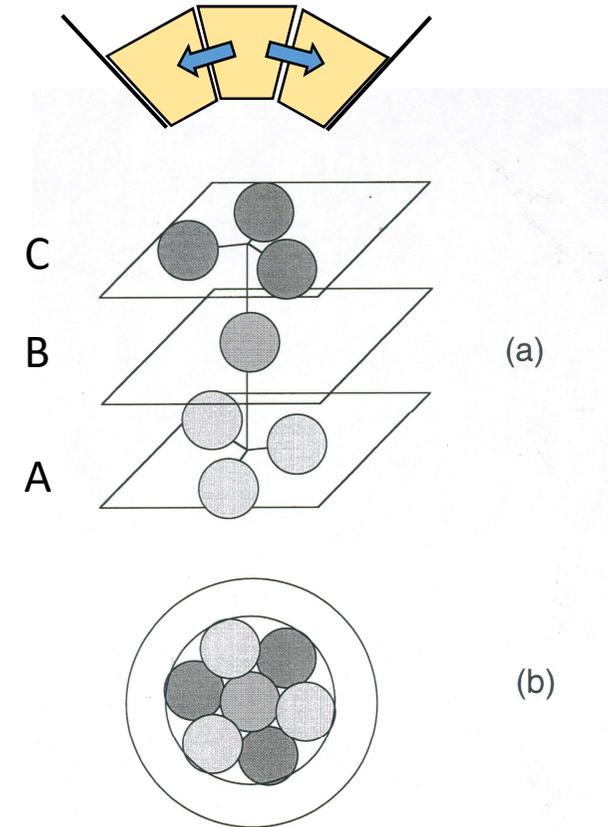
Flusso bloccato!!

Sul fondo del cono si forma una struttura di diametro $\approx 3\delta$ la quale blocca il flusso di sferette.

Formazione spontanea di strutture quasi-ordinate

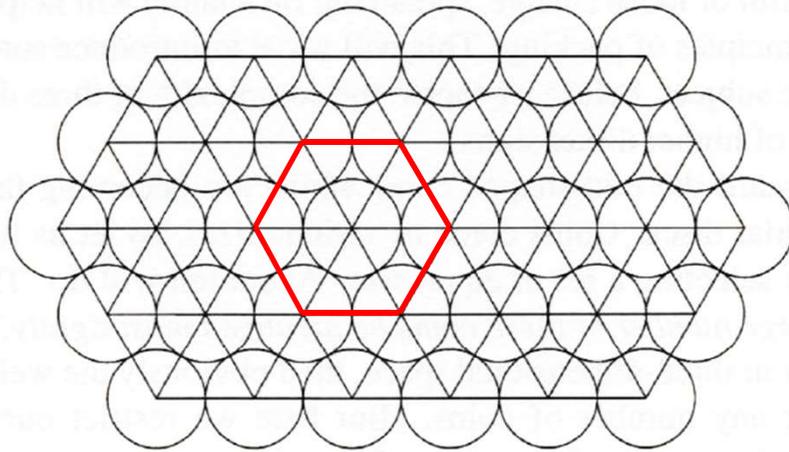


Le sferette si impacchettano spontaneamente sul fondo concavo di un recipiente, formando una struttura triangolare compatta quasi-regolare.



Sul fondo del cono si osserva la formazione di una struttura compatta del tipo fcc (piani ABCABC...) quando $d < d_{\text{MIN}}$. Questa struttura si comporta come una cupola, la cui resistenza è tale da bloccare il flusso.

Impacchettamento ideale di sfere in due e tre dimensioni

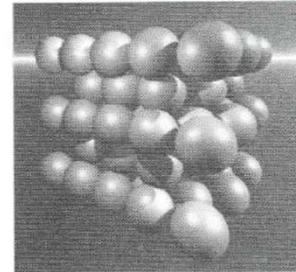


Struttura:
"triangular close packing "

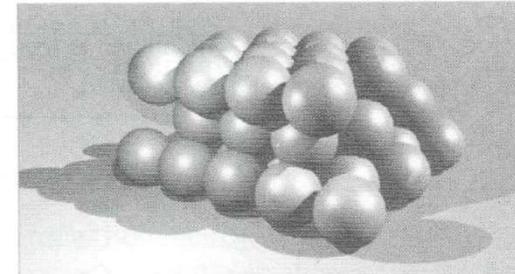
Fattore d'impacchettamento
(packing fraction):

$$PF = \pi/2\sqrt{3} = 0.907 \dots$$

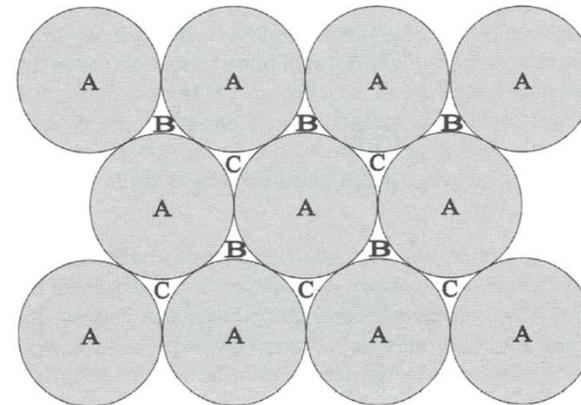
Impacchettamento di sfere
in due dimensioni



ABABAB... = hcp



ABCABCABC... = fcc



Fattore d'impacchettamento
(packing fraction):

$$PF = \pi/3\sqrt{2} = 0.740 \dots$$

Impacchettamento di sfere in
tre dimensioni

Impacchettamento pratico di sfere in tre dimensioni

In **3 dimensioni**, non è possibile far assumere alle sferette la configurazione ideale compatta del tipo hcp o fcc (PF = 0.74). Possiamo **agitare** il recipiente con un'azione di **succussione** e compattare le particelle verso il basso. Il **fattore d'impacchettamento in 3D** misurato in pratica rimane però sempre molto basso, **PF \approx 0.6** per tutti i campioni esaminati. Quando si versano le sferette nel **tronco di cono**, esse si compattano sul fondo disponendosi in modo da formare uno strato che assume una struttura esagonale quasi-regolare. Il resto delle sferette si compatta però ancora di un fattore **PF \approx 0.6**.



Quantità Q in volume noto V.

Il fattore PF si trova così:

Si pesa la quantità Q in un volume noto V. Si ottiene la densità media $\rho_M = Q/V$.

La densità delle sferette, ρ_S , è nota a partire dalle misure di diametro su un campione significativo di sferette, di cui si conosce numero e peso.

Il fattore d'impacchettamento diventa: $PF = \rho_M / \rho_S$

ZUxx (sugar): $\rho_M=0.69 \text{ g/cm}^3$; $\rho_S=1.14 \text{ g/cm}^3$; PF=0.61

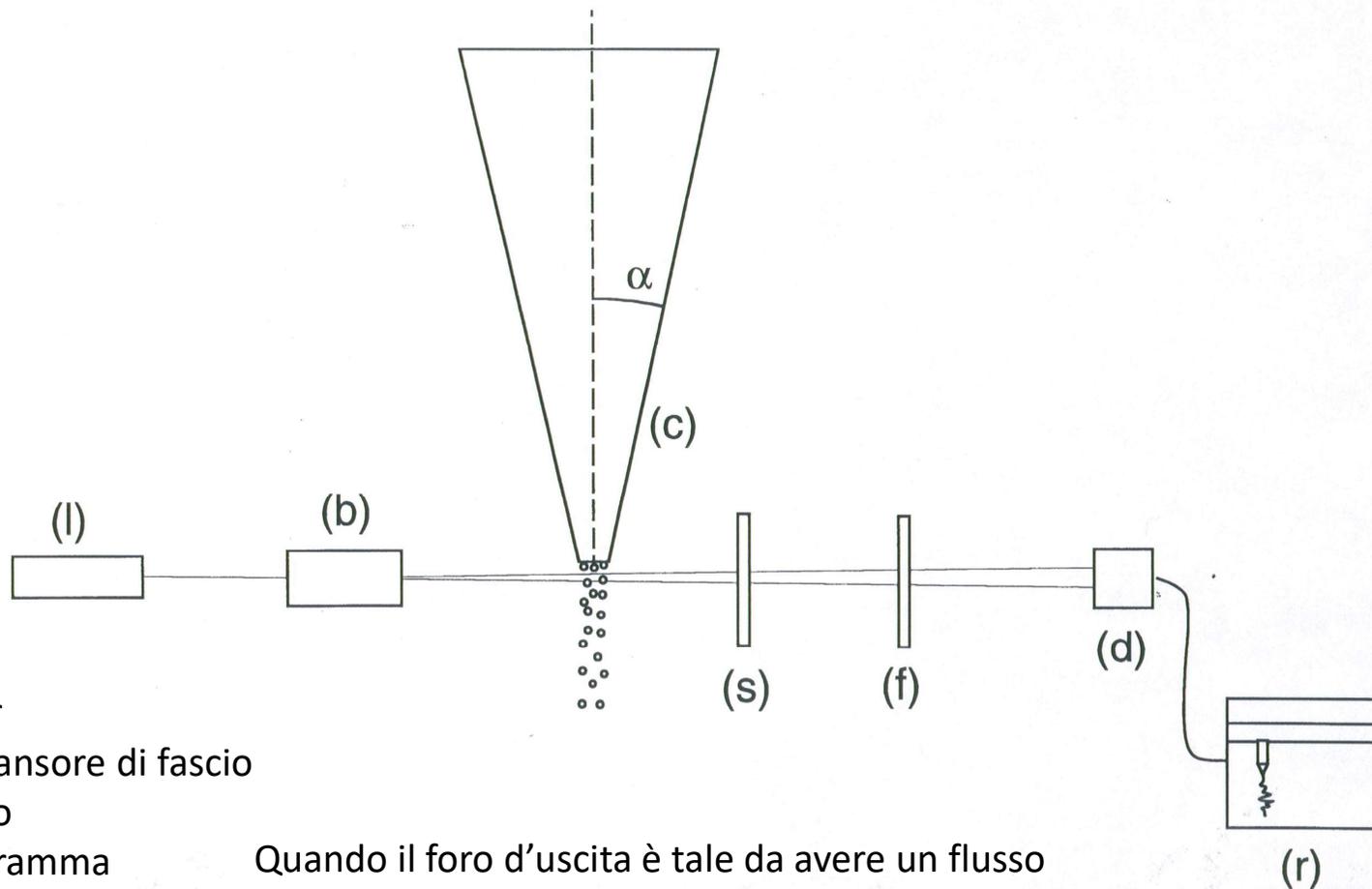
VExx (glass): $\rho_M=1.58 \text{ g/cm}^3$; $\rho_S=2.65 \text{ g/cm}^3$; PF=0.60

PAxx (plastic): $\rho_M=0.97 \text{ g/cm}^3$; $\rho_S=1.48 \text{ g/cm}^3$; PF=0.65

PGxx (plastic): $\rho_M=0.60 \text{ g/cm}^3$; $\rho_S=1.0 \text{ g/cm}^3$; PF=0.60

SOxx (soy): $\rho_M=0.74 \text{ g/cm}^3$; $\rho_S=1.2 \text{ g/cm}^3$; PF=0.61

Apparato ottico per il controllo della regolarità del flusso di particelle



(l)=laser

(b)=espansore di fascio

(c)=cono

(s)=diaframma

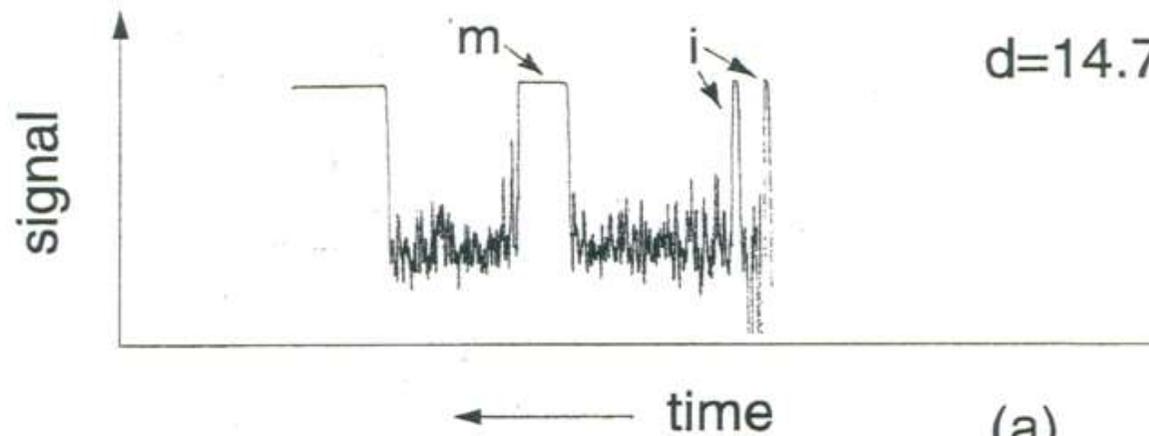
(f)=filtro

(d)=fotorivelatore

(r)=registratore

Quando il foro d'uscita è tale da avere un flusso continuo di sferette, è importante verificare che non vi siano brevi interruzioni non apprezzabili visivamente.

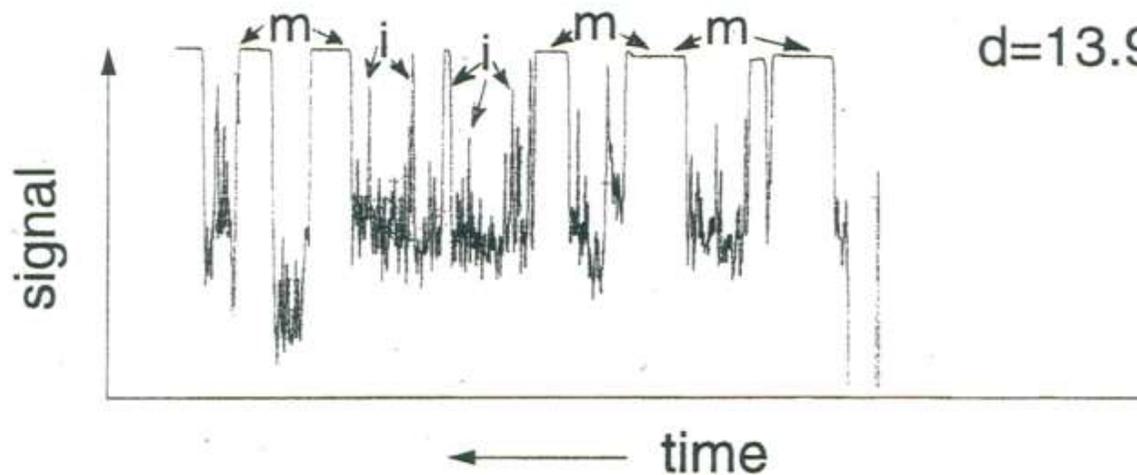
Registrazione del segnale laser trasmesso dalle particelle



(b)

$$d = 14.7 \text{ mm} < d_{\text{MIN}}$$

(m) = Il flusso s'interrompe e deve essere riattivato manualmente dando dei colpetti al cono.

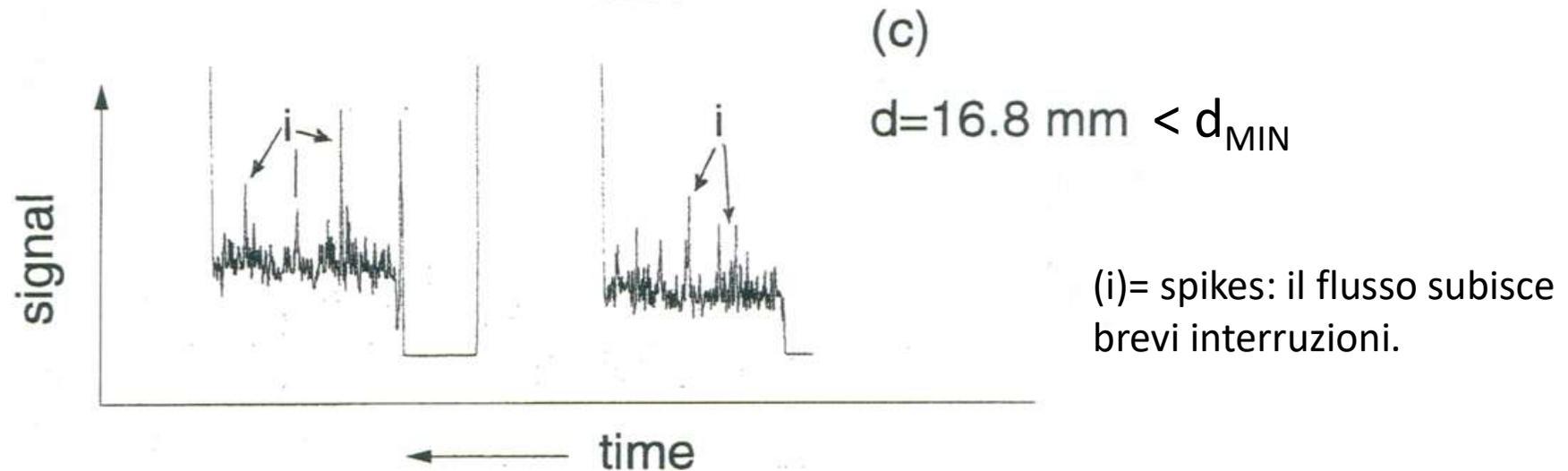
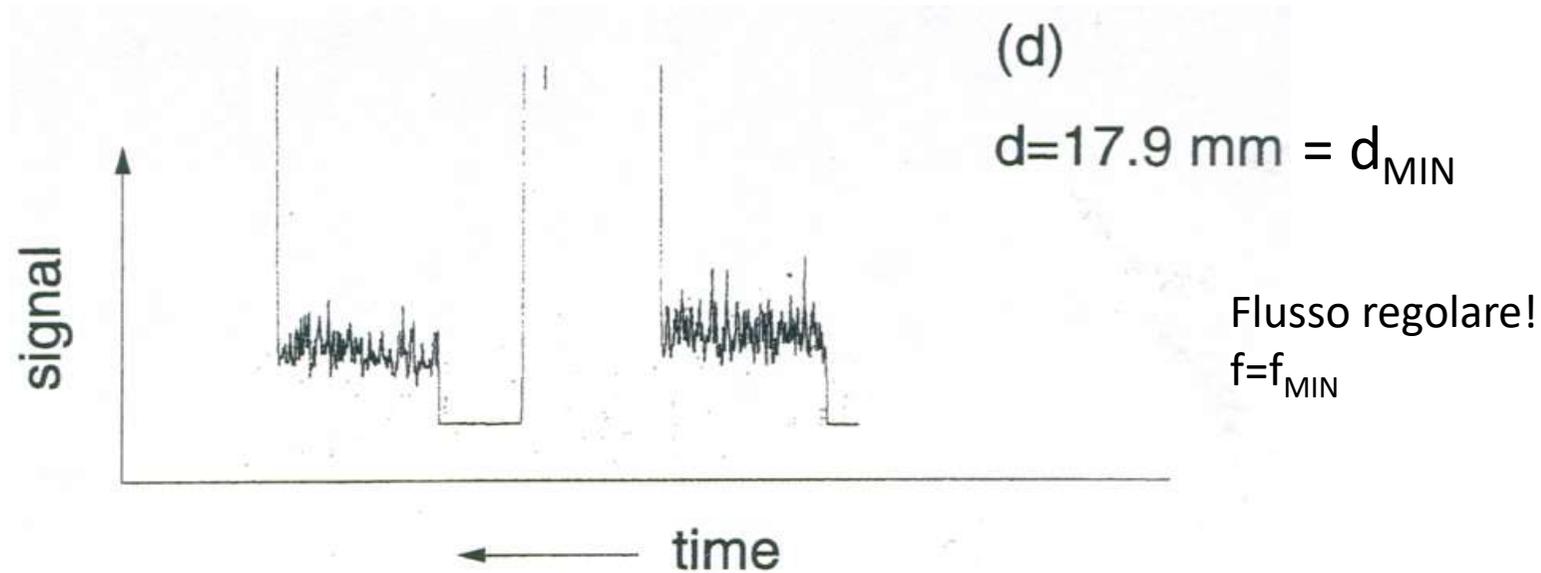


(a)

$$d = 13.9 \text{ mm} < d_{\text{MIN}}$$

(i) = spikes: il flusso subisce brevi interruzioni, non apprezzabili visivamente.

Registrazione del segnale laser trasmesso dalle particelle



Animazione

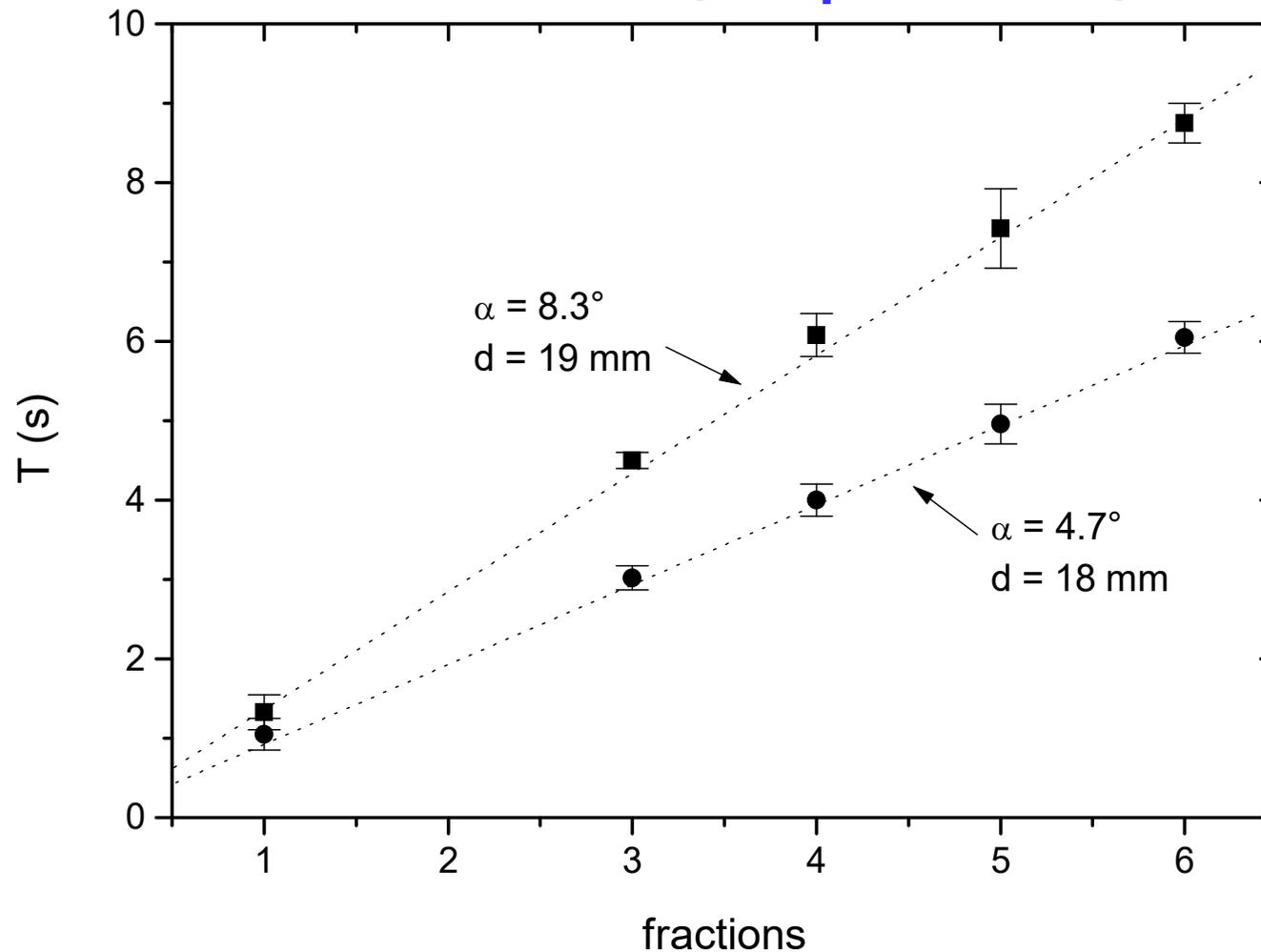
ZU52 (sugar)



VE40 (glass)

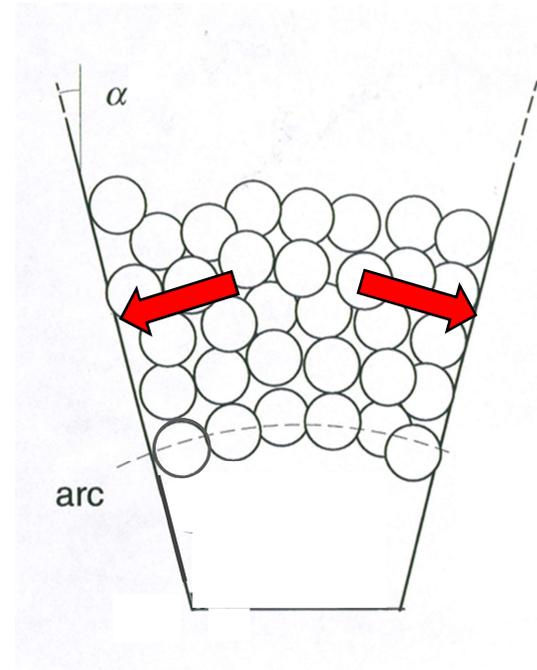
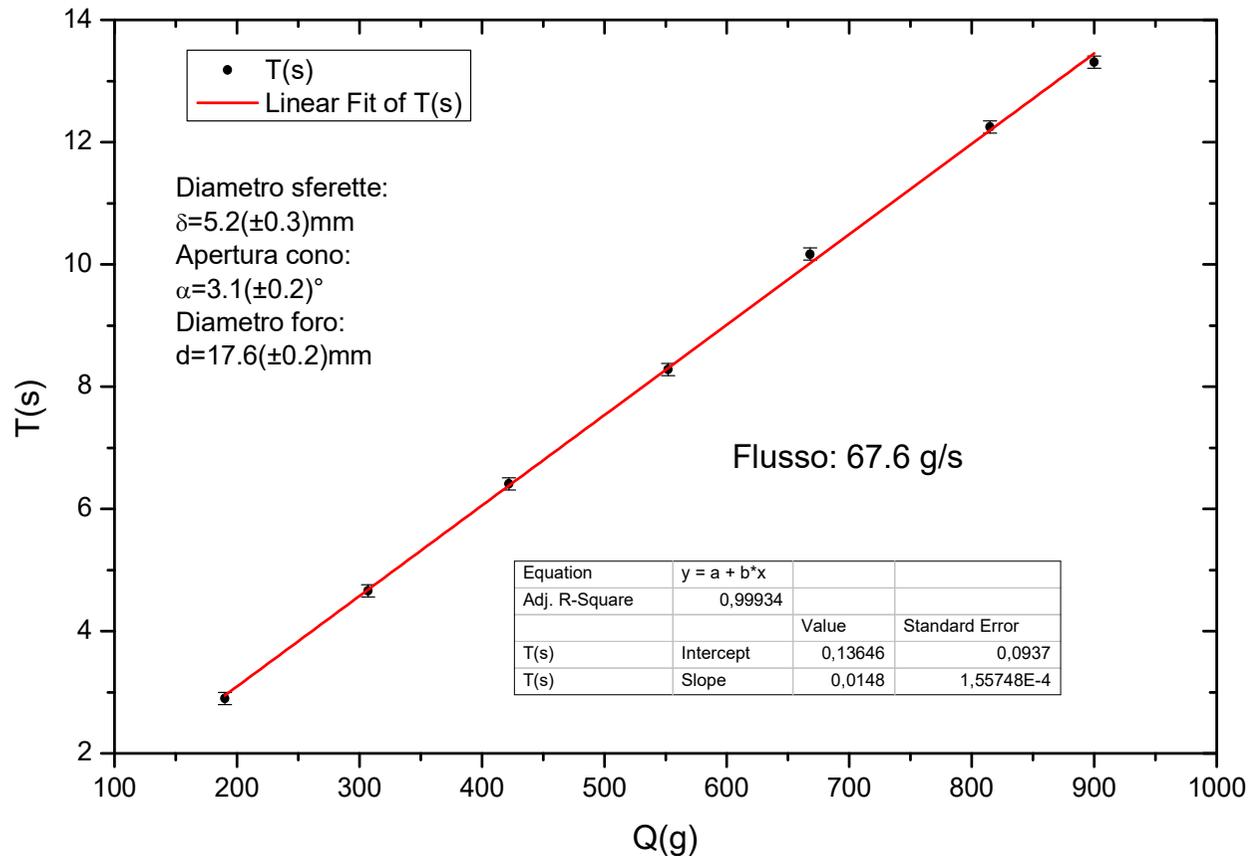


Misura dei tempi di scorrimento in funzione della quantità iniziale di sferette (Campione ZU57).



È importante verificare fin dall'inizio che il flusso f (g/s) di materiale sia indipendente dalla massa Q di sferette presenti all'interno del cono. Misure di tempi di scorrimento T in funzione di frazioni note di una certa quantità Q devono quindi dare un andamento lineare.

Il flusso delle sfere non dipende dall'altezza della colonna (Campione ZU52)



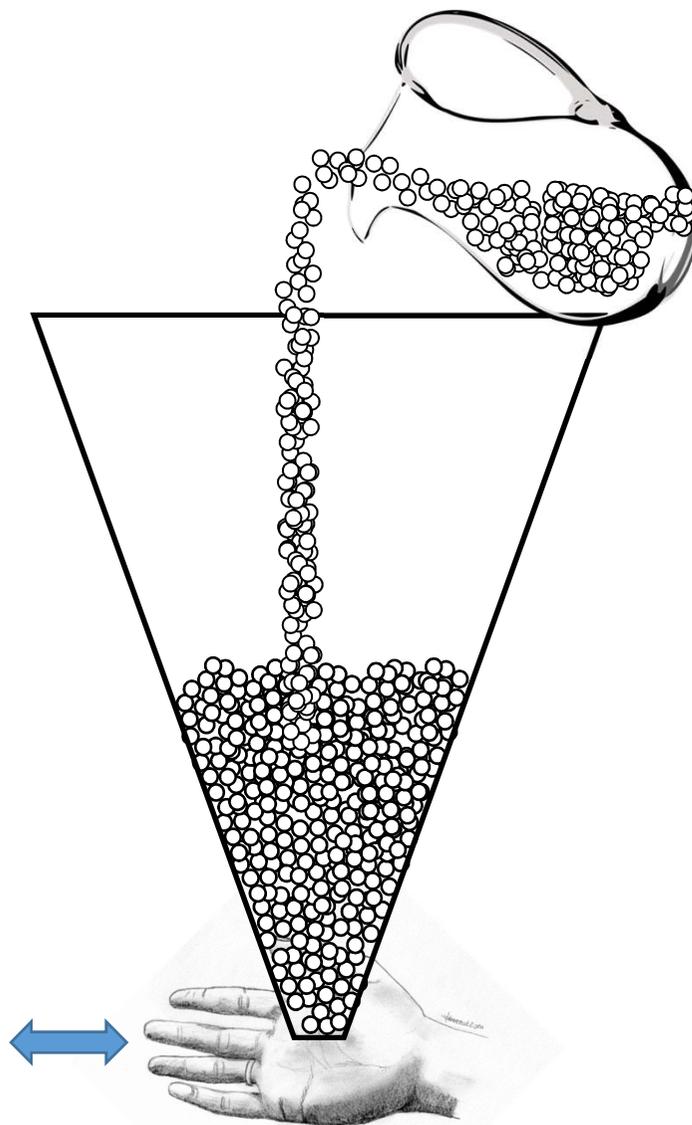
La conseguenza di quanto misurato è che, se si esclude la parte di materiale più prossima al fondo, il resto del materiale esercita una pressione prevalentemente sulle pareti laterali del cono.

Misure precise sui campioni ZU52 confermano quanto trovato sui campioni ZU57, ovvero che il flusso di materiale (g/s) è indipendente dalla massa Q di sfere presenti all'interno del cono. Questo risultato è molto importante, perché ci consente di misurare i flussi con precisione, potendo aumentare la quantità Q quando i tempi di scorrimento diventano troppo brevi (dell'ordine del minuto secondo).

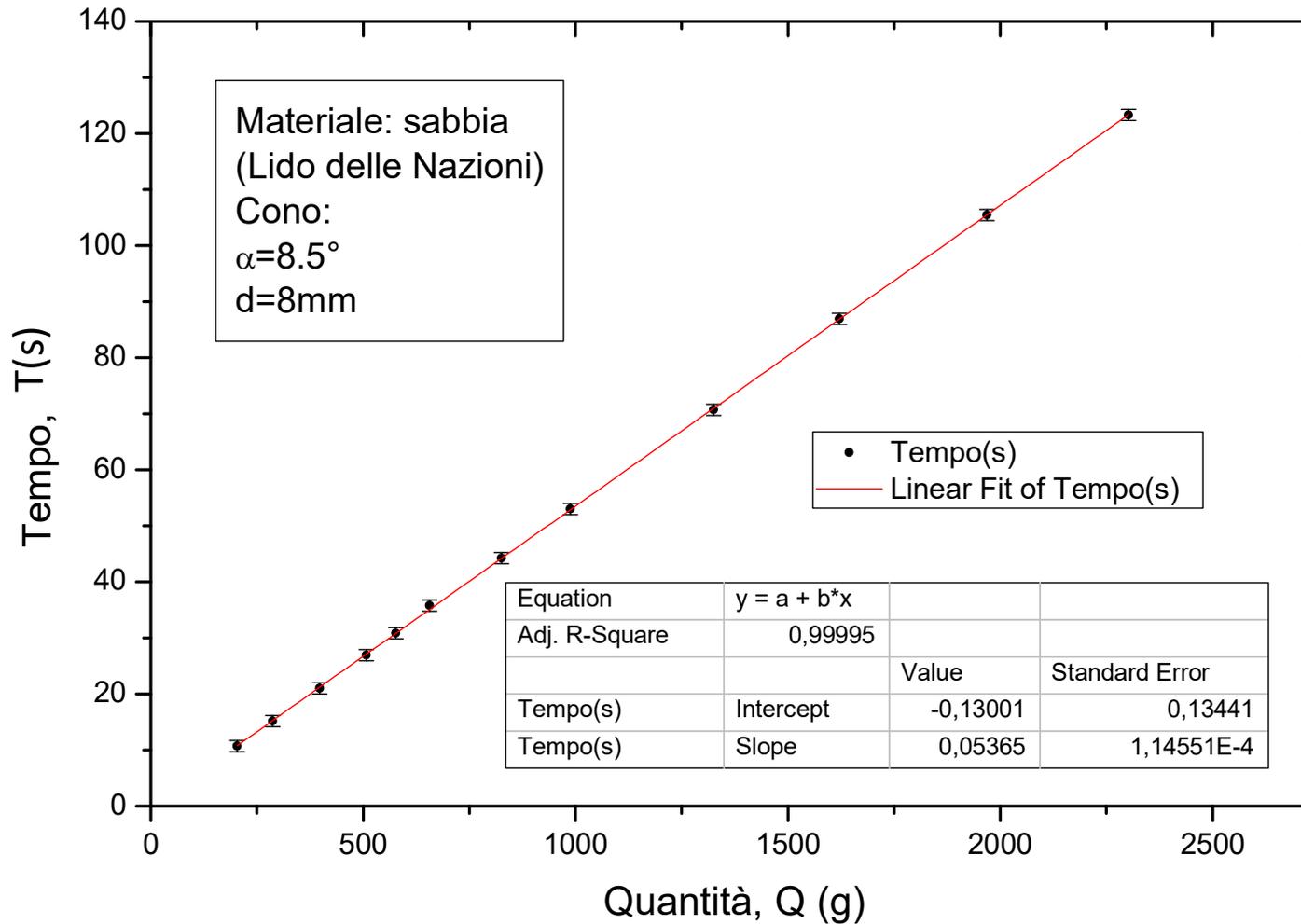
Pressione delle sfere sul fondo del cono

Quando si versano le sfere nel cono e si tiene la **mano sul fondo** per chiudere l'uscita, si avverte chiaramente che **la pressione all'inizio aumenta**, ma **poco dopo rimane costante** anche continuando a versare sfere all'interno del cono.

Ho provato a mettere una **bilancia** sul fondo del cono, misurando il peso mentre versavo quantità controllate di sfere, ma la bilancia non dava una misura stabile.

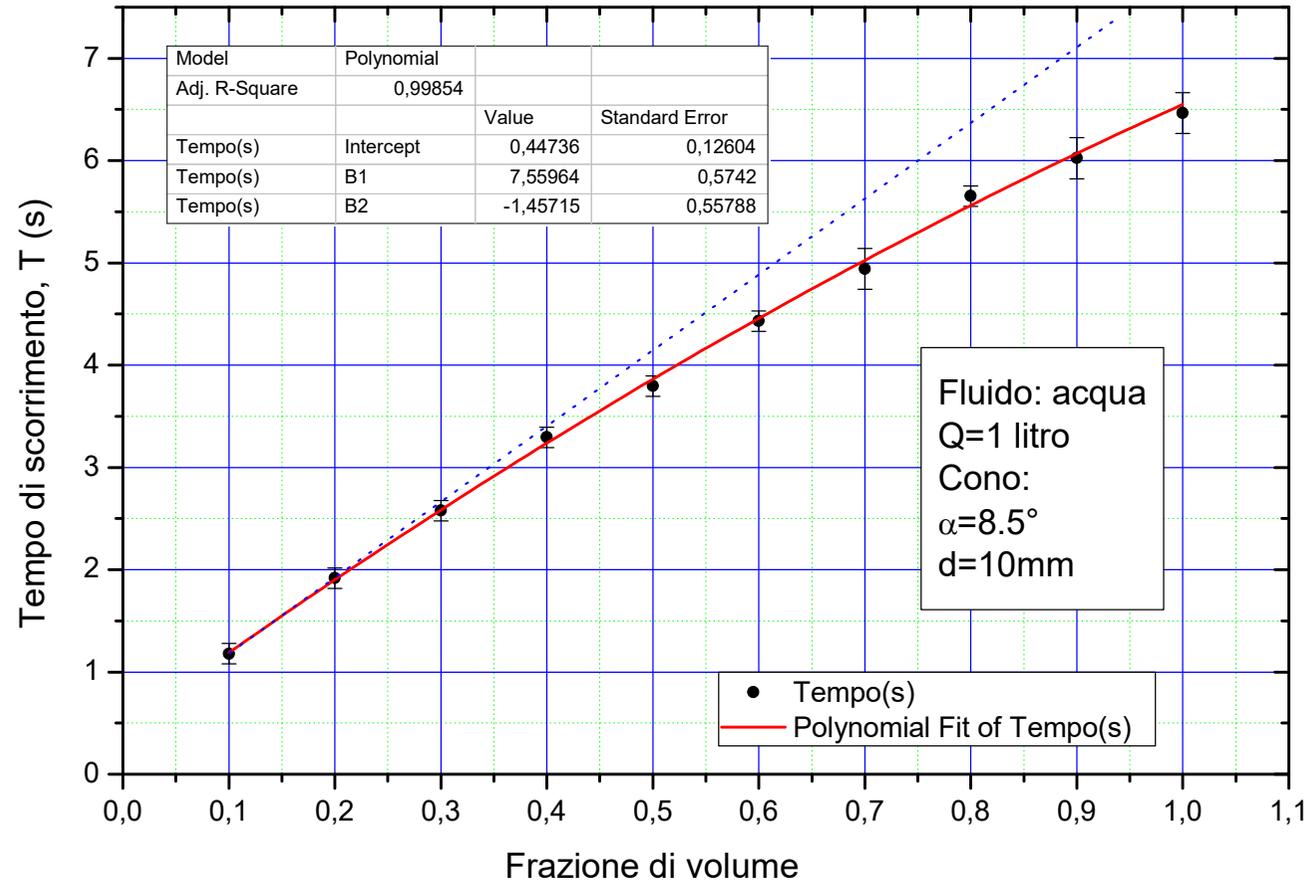


Flusso di sabbia attraverso il cono (non dipende dall'altezza della colonna)



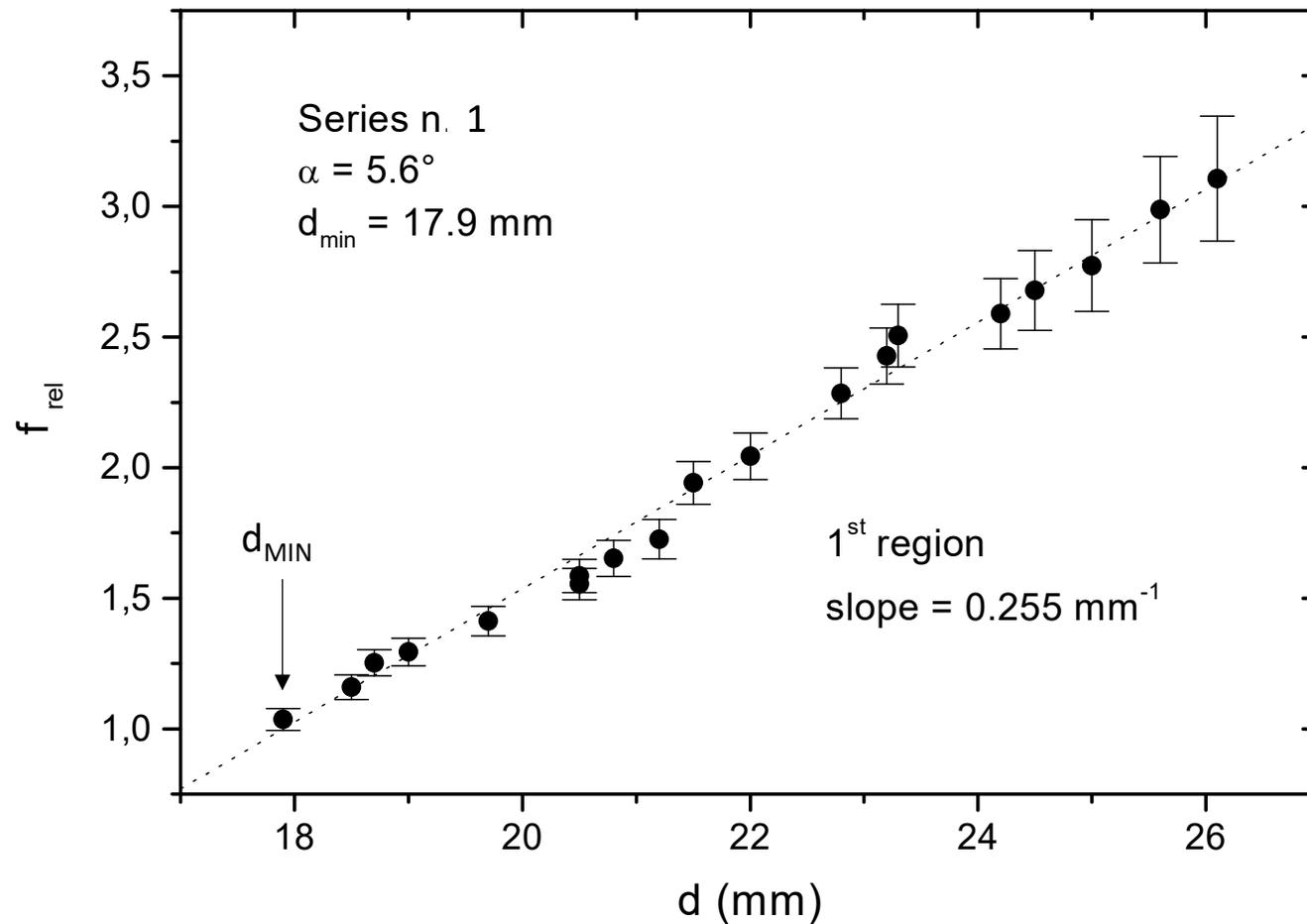
Se al posto delle sferette si usa della sabbia, si ottiene lo stesso risultato.

Il flusso, nel caso di un fluido (acqua), dipende invece dall'altezza della colonna



Misurando il flusso dell'acqua attraverso tronchi di cono di plastica, si trova un risultato diverso, in quanto è ben noto che la pressione esercitata sul fondo da una colonna d'acqua è proporzionale all'altezza della colonna stessa. Il risultato è un andamento sottolineare del tempo di scorrimento in funzione della quantità d'acqua iniziale.

Misure di flusso (g/s) in funzione del diametro dell'apertura del cono (Campione ZU57, sugar, $\delta=5.7\text{mm}$)



Verificata l'indipendenza del flusso dal peso delle sferette presenti nel cono, le misure che seguono riguardano lo studio del flusso f in funzione del diametro del foro d'uscita d . In particolare, in questo grafico è riportato il flusso relativo, $f_{\text{rel}} = f / f_{\text{MIN}}$. Per piccoli valori di d , si osserva un andamento di tipo lineare ... (continua)

... Se si aumenta ulteriormente il diametro d (vedi grafico a) della slide seguente), si scopre che il flusso relativo aumenta in maniera geometrica ($f_{rel} \propto d^n$), ma all'interno di questo andamento si possono individuare intervalli nei quali la crescita è lineare, con pendenze che aumentano all'aumentare di d .

Il primo intervallo lineare si osserva a partire da d_{MIN} fino al primo diametro critico d'_C .

Il secondo intervallo lineare si osserva a partire da d'_C fino a d''_C . Il terzo intervallo lineare si osserva a partire da d''_C in poi.

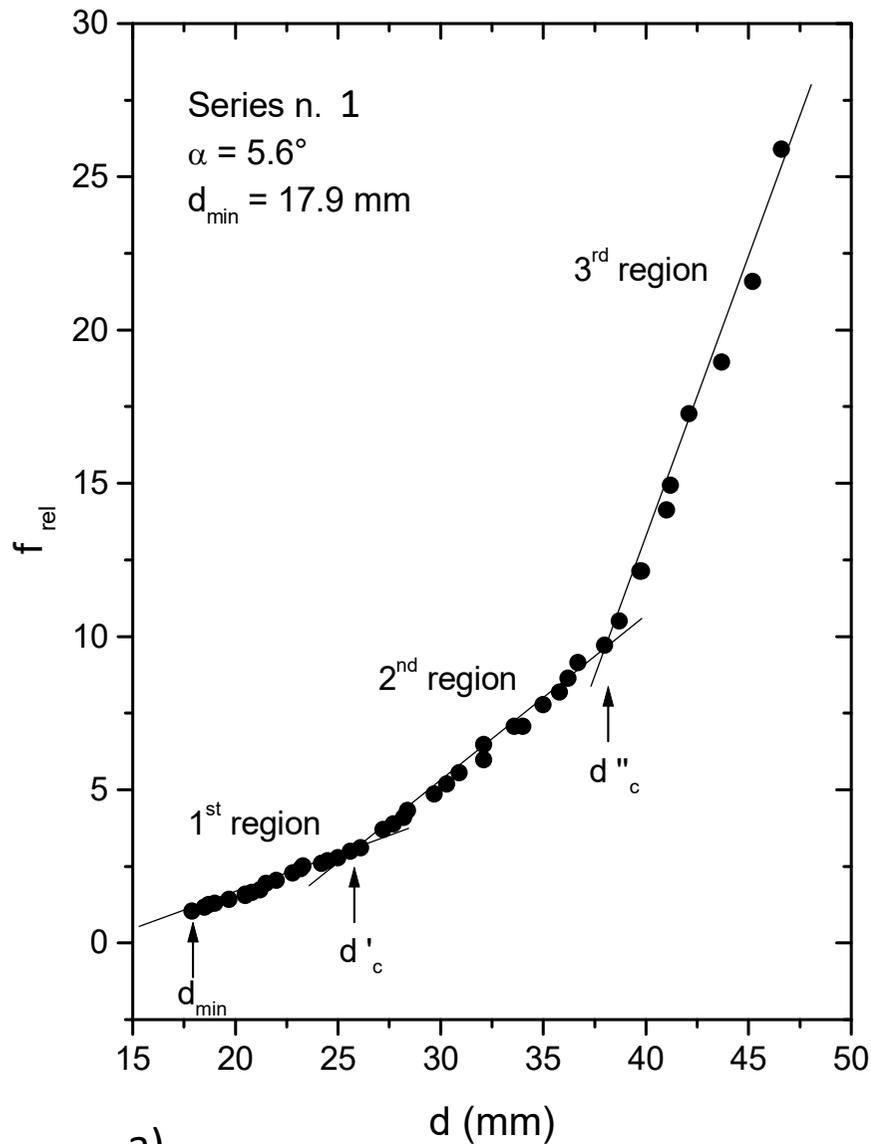
Se, anziché considerare il diametro d del foro, consideriamo il diametro ridotto $d_R = d/d_{MIN}$, allora otteniamo il grafico b) della slide seguente. In questo grafico i tratti lineari sono caratterizzati, all'aumentare di d_R , rispettivamente dalle pendenze (slopes) s' , s'' ed s''' .

I valori critici diventano diametri critici ridotti d'_{RC} e d''_{RC} .

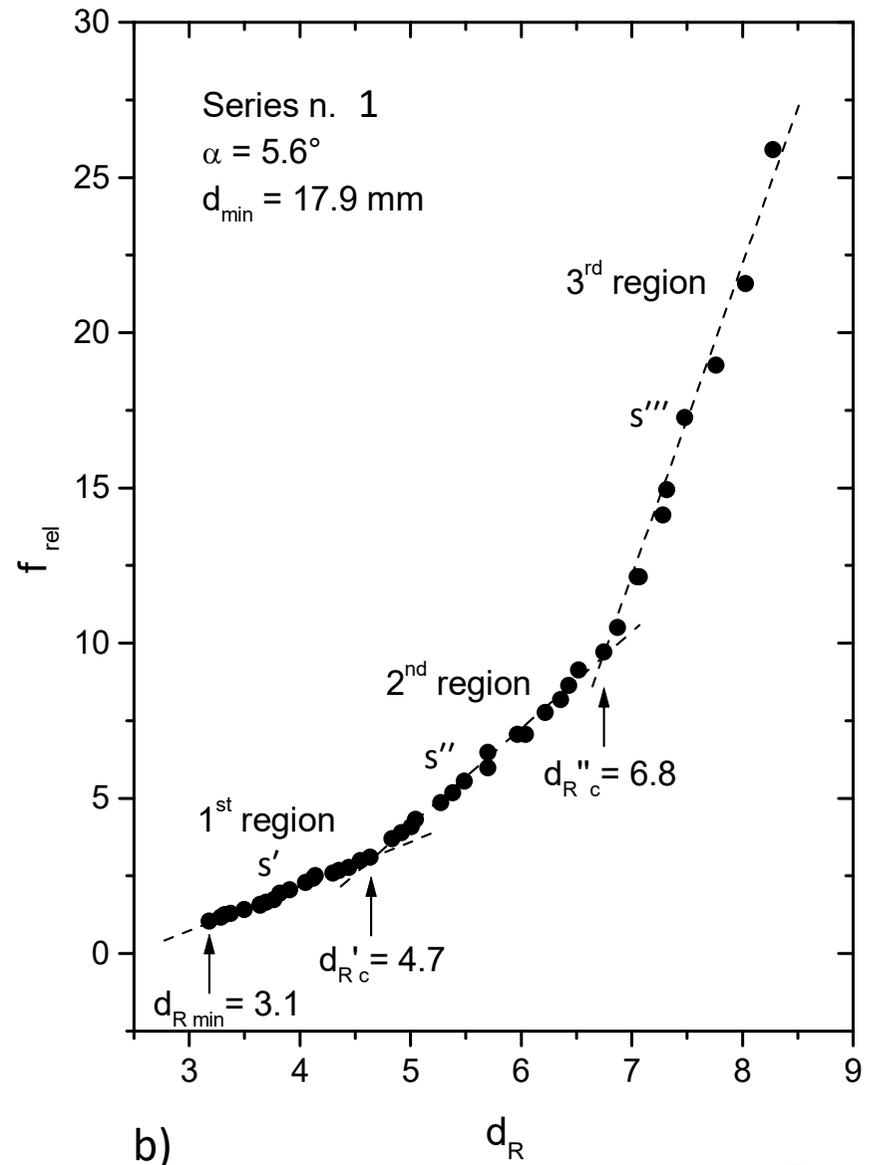
Il diametro minimo e i diametri critici ridotti (3.1, 4.7, 6.8) sono molto prossimi alla seguente serie di numeri dispari: 3, 5, 7, ...

Da questa osservazione sembra molto plausibile immaginare che a determinare il flusso nelle diverse regioni lineari siano delle strutture bidimensionali circolari ricavate dalla struttura esagonale, aumentando sempre di più il diametro. Nella seconda slide seguente ho provato ad abbozzare queste strutture di tipo esagonale, nelle quali si vede che, se si aggiunge una corona di sferette attorno alla struttura più piccola di diametro $\approx 3\delta$, si ottiene una struttura di diametro $\approx 5\delta$, e che se si aggiunge anche a quest'ultima una corona di sferette, si ottiene una struttura di diametro $\approx 7\delta$. Questo ragionamento potrebbe essere iterato portandoci ad immaginare la presenza di un altro intervallo lineare al di là di un diametro critico $d'''_{RC} \approx 9\delta$. Questo in effetti è ciò che è stato osservato e sarà illustrato nel seguito (campione ZU52, $\alpha=3.1^\circ$).

Misure di flusso relativo ($f_{rel}=f/f_{MIN}$) in funzione del diametro o del diametro ridotto delle sfere (Campione ZU57, $\delta=5.7\text{mm}$)

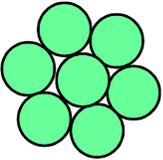
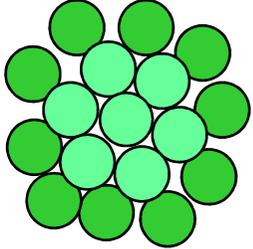
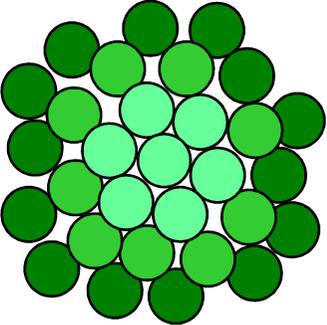


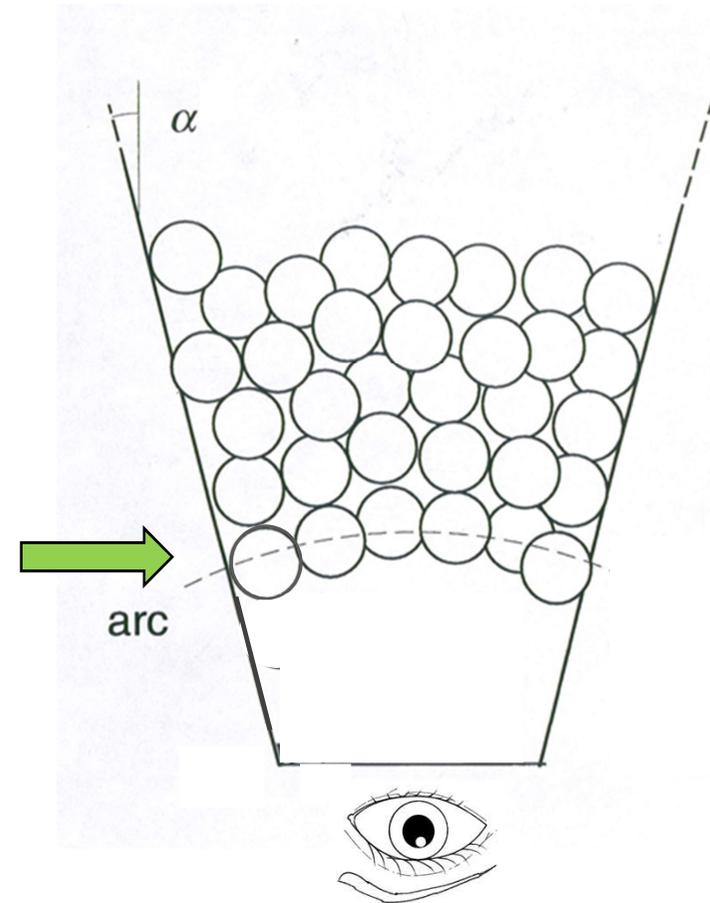
a)



b)

Ipotesi sulla struttura delle sfere sul fondo del cono vs. il diametro dell'apertura di uscita

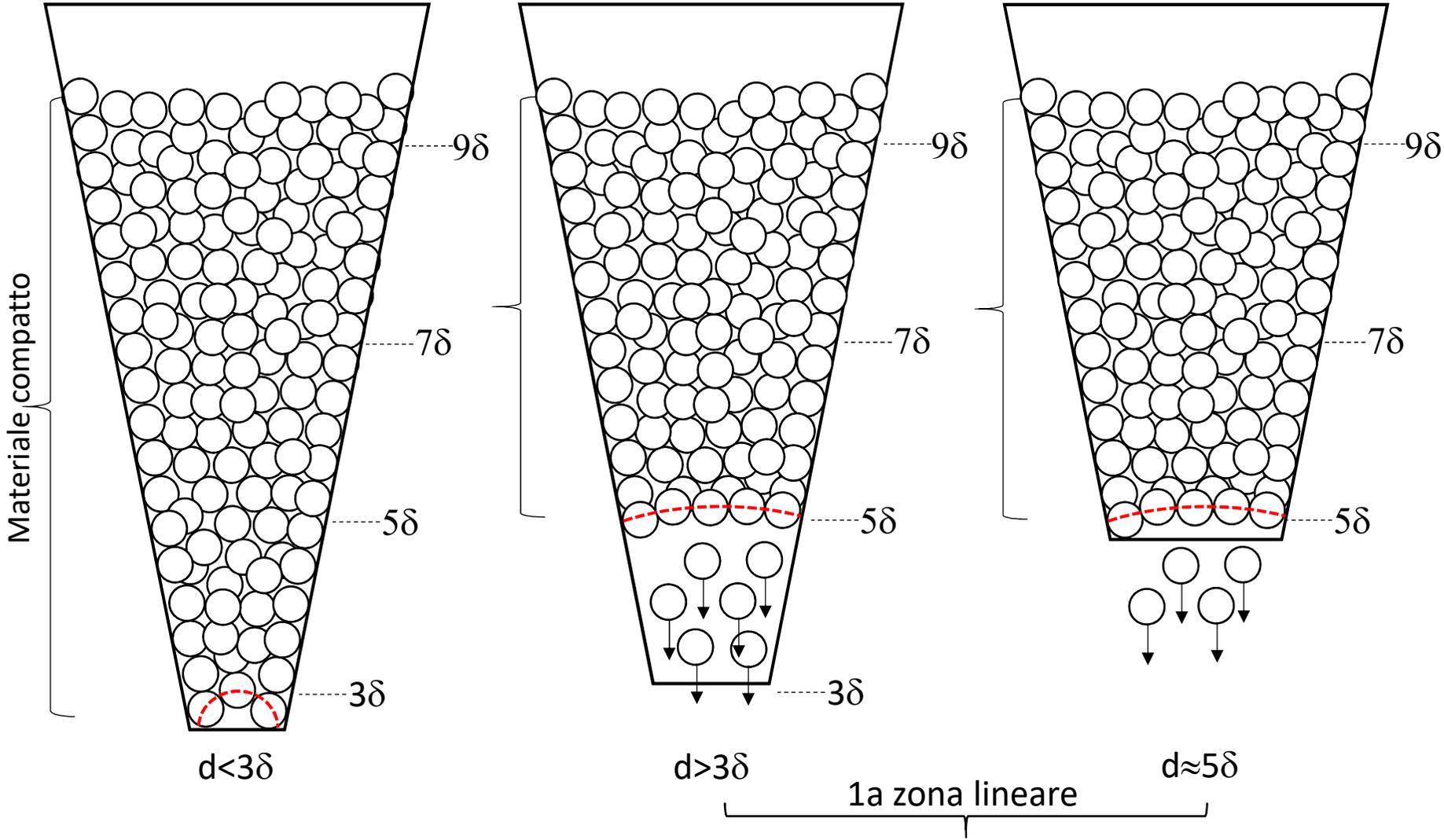
Struttura:		Azione:
 Osservata	$d \approx 3 \delta$	Blocco.
 Ipotizzata	$d \approx 5 \delta$	Freno.
 Ipotizzata	$d \approx 7 \delta$	Freno.



Quello che ipotizzo è che, in corrispondenza di un determinato intervallo lineare, nel cono, sul fondo della materiale compatto, si formi una struttura bidimensionale di tipo esagonale, la quale agisce da freno al flusso, proprio perché ha le stesse caratteristiche meccaniche che riscontriamo per una volta a cupola. A differenza però della struttura a cupola di diametro $\approx 3\delta$, che era in grado di bloccare il flusso, perché evidentemente di resistenza meccanica tale da resistere alla pressione delle sferette sovrastanti, le strutture successive, ovverosia quella di diametro $\approx 5\delta$ che agisce nel primo tratto lineare, oppure quella di diametro $\approx 7\delta$ che agisce nel secondo tratto lineare, ed ancora quella di diametro $\approx 9\delta$ che agisce nel terzo tratto lineare, presentano una resistenza meccanica che è solo in grado di frenare il flusso, ma non di bloccarlo. E poi, la resistenza meccanica di queste strutture è tale da divenire sempre più debole all'aumentare del diametro, il che comporta una pendenza via via crescente dei vari tratti lineari: $s' < s'' < s''' \dots$.

Queste considerazioni sono riportate in termini grafici nelle slides seguenti, nelle quali si mostra cosa succede all'interno del cono in corrispondenza ai diversi tagli. In particolare, si può osservare che, per tagli compresi tra $\approx 3\delta$ e $\approx 5\delta$, all'interno del cono le sferette si compattano fino ad un'altezza che corrisponde al diametro della struttura 5δ , ed è questa struttura che frena il flusso e ne determina la cinetica; per tagli compresi tra $\approx 5\delta$ e $\approx 7\delta$, all'interno del cono le sferette si compattano fino ad un'altezza che corrisponde al diametro della struttura 7δ , ed è questa struttura che frena il flusso e ne determina la cinetica; ed infine per tagli superiori a $\approx 7\delta$, all'interno del cono le sferette si compattano fino ad un'altezza che corrisponde al diametro della struttura 9δ , ed è questa struttura che frena il flusso e ne determina la cinetica. Da un punto di vista sperimentale, è stato possibile superare il terzo diametro critico ed entrare nella regione lineare governata dalla struttura 11δ (vedi il campione ZU52, $\alpha = 3.1^\circ$).

Cinetica del flusso vs. diametro del foro d'uscita

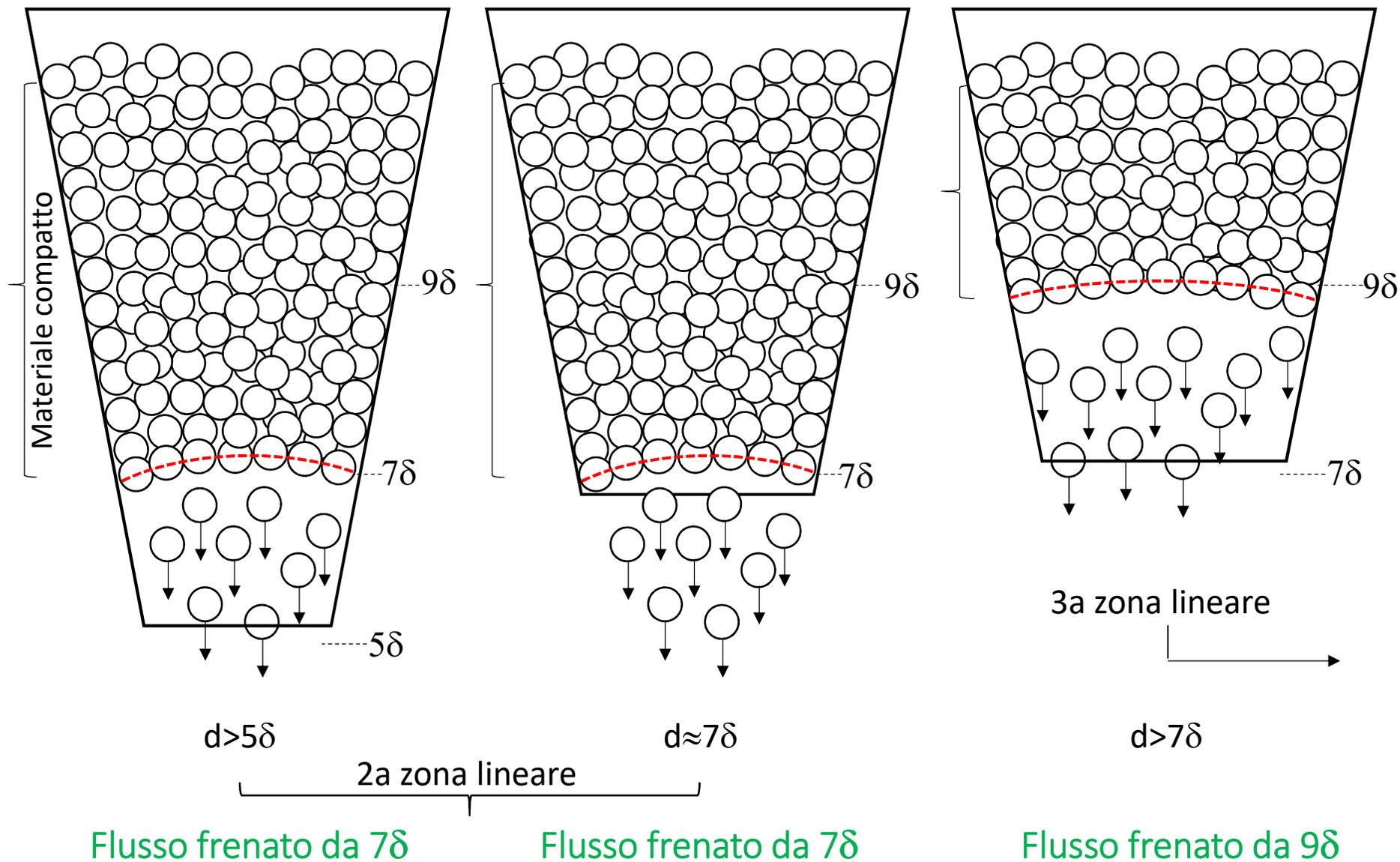


Flusso bloccato

Flusso frenato da 5δ

Flusso frenato da 5δ

Cinetica del flusso vs. diametro del foro d'uscita



Riassunto dei risultati (Campione ZU57, $\delta=5.7\text{mm}$) (*)

α
↓

n	α ($^{\circ}$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	s'	s''	s'''
1	4.7	18.0	7.0	460	65.7	3.2					
2	5.6	17.9	7.5	"	61.3	3.1	4.7	6.8	1.44	3.10	10.3
3	5.6	18.0	7.0	"	65.7	3.2					
4	8.3	19.0	7.2	"	63.9	3.3					
5	9.2	18.0	8.0	"	57.5	3.2					
6	10.2	18.4	10.3	615	59.7	3.2	4.5	6.8	1.45	2.39	5.8
7	11.0	18.2	8.3	460	55.4	3.2	4.5		1.35	3.61	
8	13.3	19.0	9.1	"	50.5	3.3					
9	13.3	19.1	9.2	"	50.0	3.3	4.6		1.37	2.58	
10	14.0	18.0	10.8	"	42.6	3.2					
11	21.7	19.0	9.8	"	46.9	3.3					

Tutte le grandezze ridotte (d_{RMIN} , d'_{RC} , d''_{RC} , s' , s'' , s''') non dipendono da α . Solo f_{MIN} diminuisce al crescere di α . In alcuni casi i dati sono pochi e non è possibile individuare la dipendenza da α .

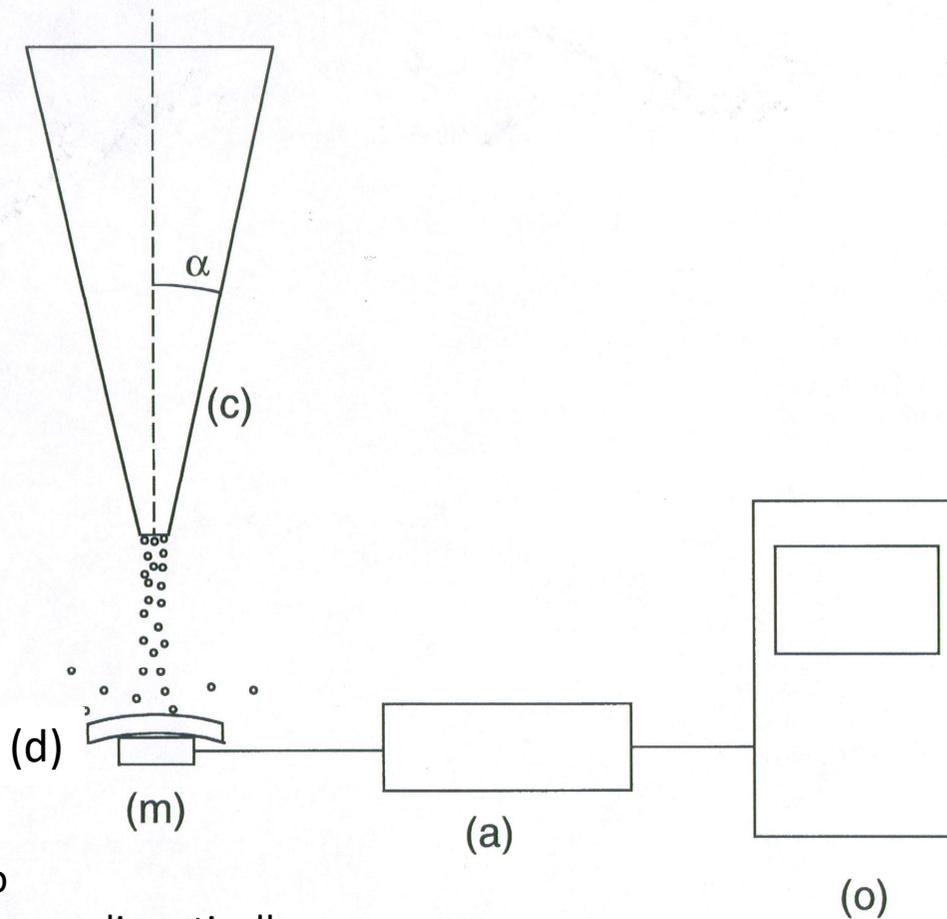
(*) Per gli errori sui dati, si rimanda alla prossima pubblicazione sul "Giornale di Fisica"

Finora abbiamo fatto l'ipotesi che sul fondo della materia compatta interna al cono si formino delle strutture regolari che agiscono come freno al flusso. Evidentemente, se queste strutture frenano il flusso senza bloccarlo, vuol dire che il flusso rallenta durante l'azione di freno da parte delle strutture, ma riprende subito dopo che tali strutture si distruggono e si disperdono al di fuori del cono. Se ciò è vero, il flusso non può essere stazionario, ma oscillatorio, o intermittente, e la periodicità di questa intermittenza è strettamente legata ai tempi di formazione e distruzione delle suddette strutture.

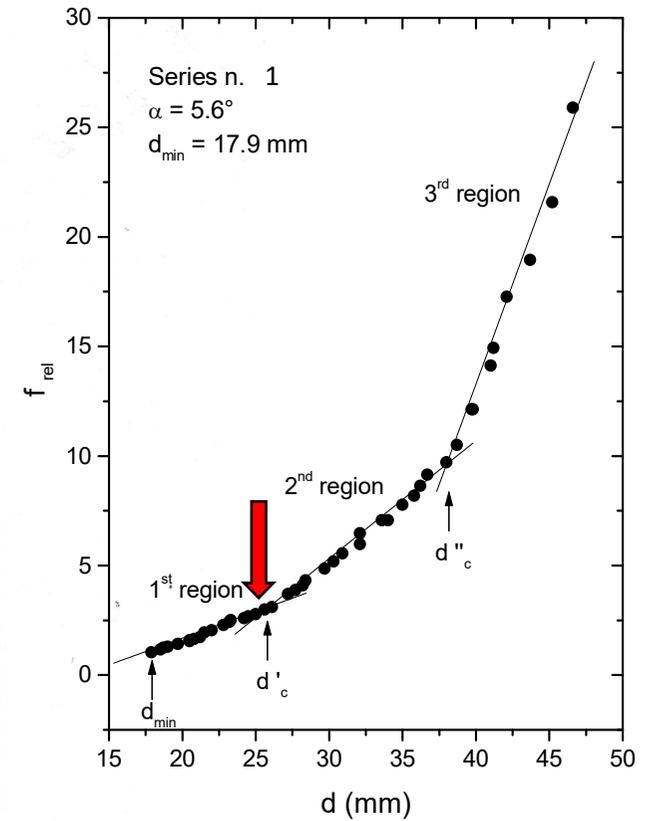
Che il flusso sia oscillatorio è un'ipotesi che è nata dai precedenti ragionamenti fatti sull'osservazione dei diversi intervalli lineari all'interno della funzione del flusso vs. il diametro del foro d'uscita.

Occorre a questo punto pensare ad un esperimento che convalidi tali ragionamenti. Esso è mostrato nella slide seguente e consiste nel registrare il segnale di un microfono posto sotto il flusso di sferette in uscita dal cono. Il segnale è amplificato e mandato ad un oscilloscopio digitale, per mezzo del quale ne registriamo un intervallo temporale. Scegliamo, come condizioni operative, quelle nelle quali il cono è tagliato appena al di sotto del diametro corrispondente alla struttura 5δ (vedi la terza slide precedente, figura di destra). Come si vede dalla trasformata di Fourier, il segnale a 1120 Hz è modulato in ampiezza con una frequenza di modulazione di 75 Hz.

Apparato per lo studio della continuità del flusso: Il flusso è continuo?



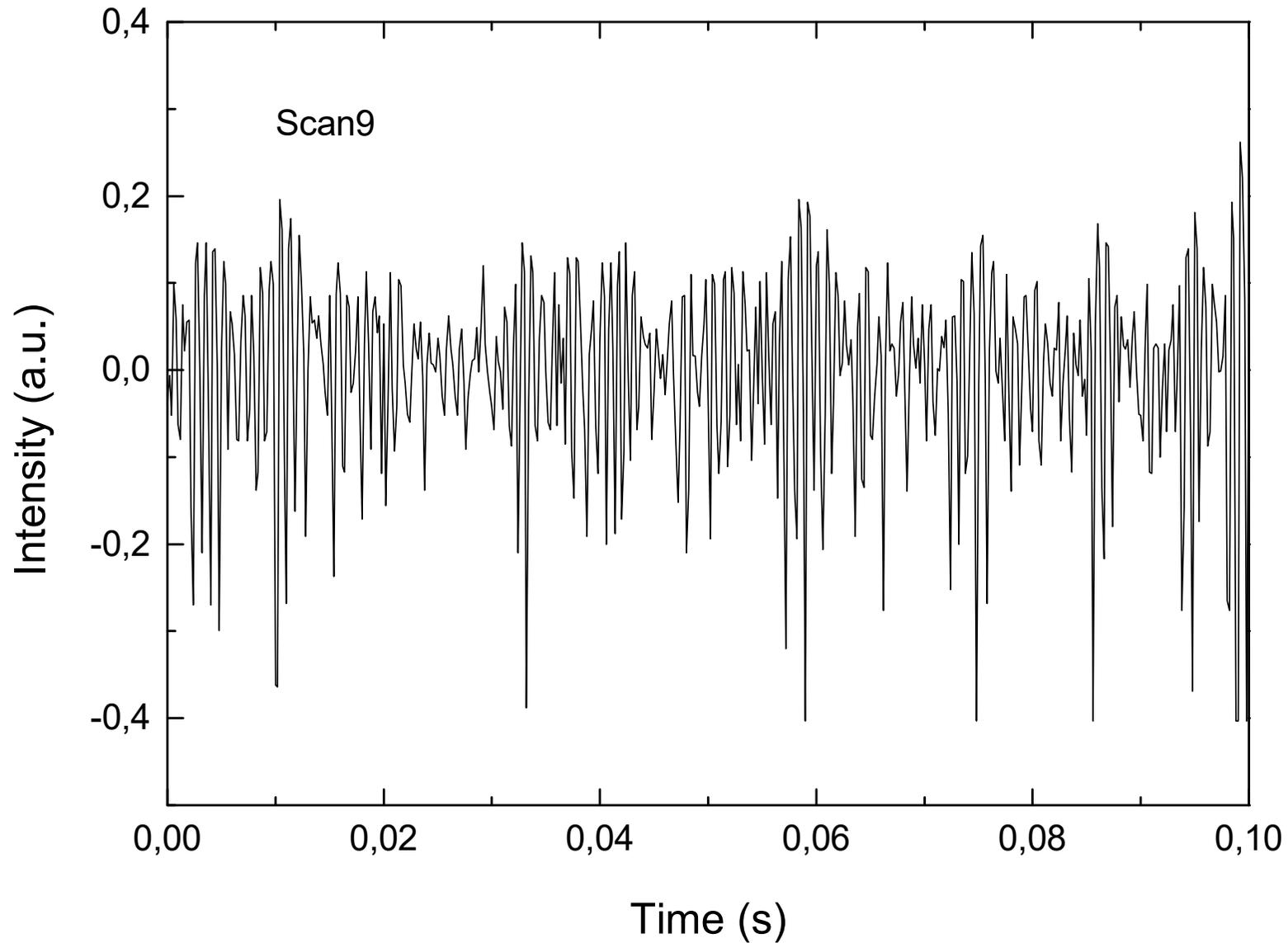
- (c)=cono
- (d)=diffusore di particelle
- (m)=microfono
- (a)=amplificatore
- (o)=oscilloscopio digitale



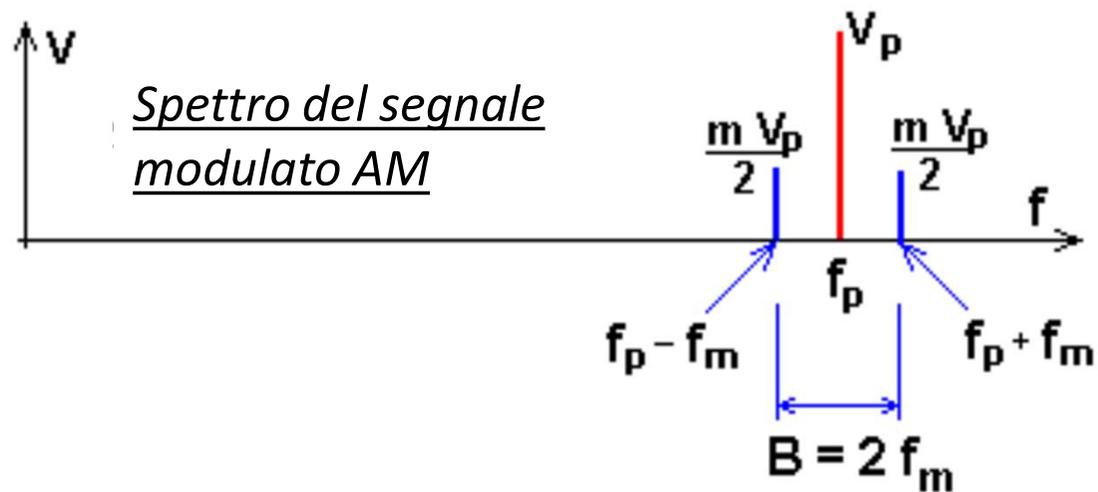
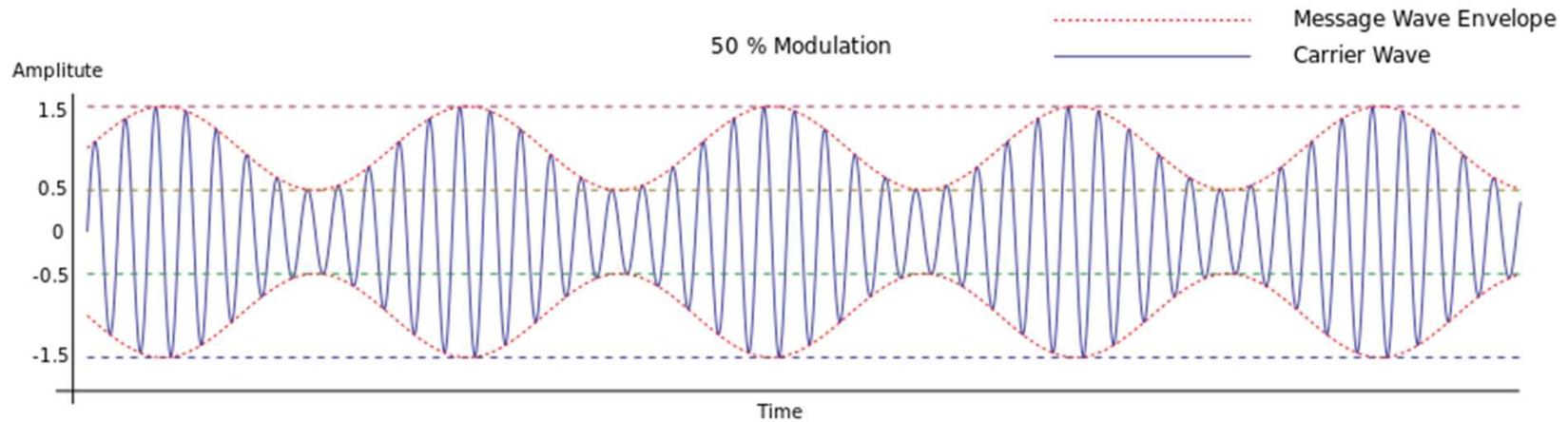
Condizioni operative:

$d=25\text{mm}$

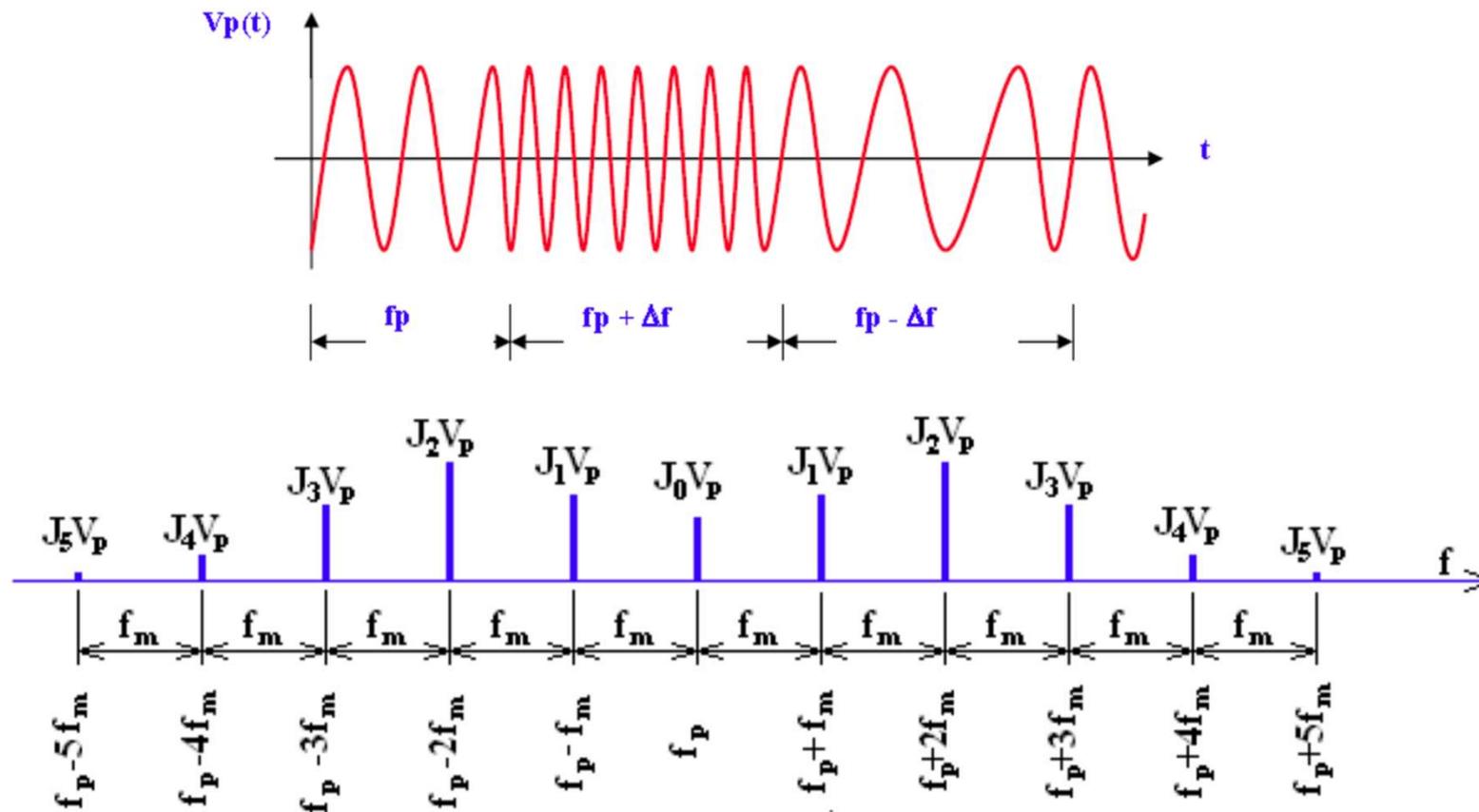
Il segnale del microfono indica chiaramente la presenza di una modulazione d'ampiezza



Ricordiamo gli effetti della modulazione d'ampiezza di un segnale sinusoidale ...



... e gli effetti della modulazione di frequenza di un segnale sinusoidale

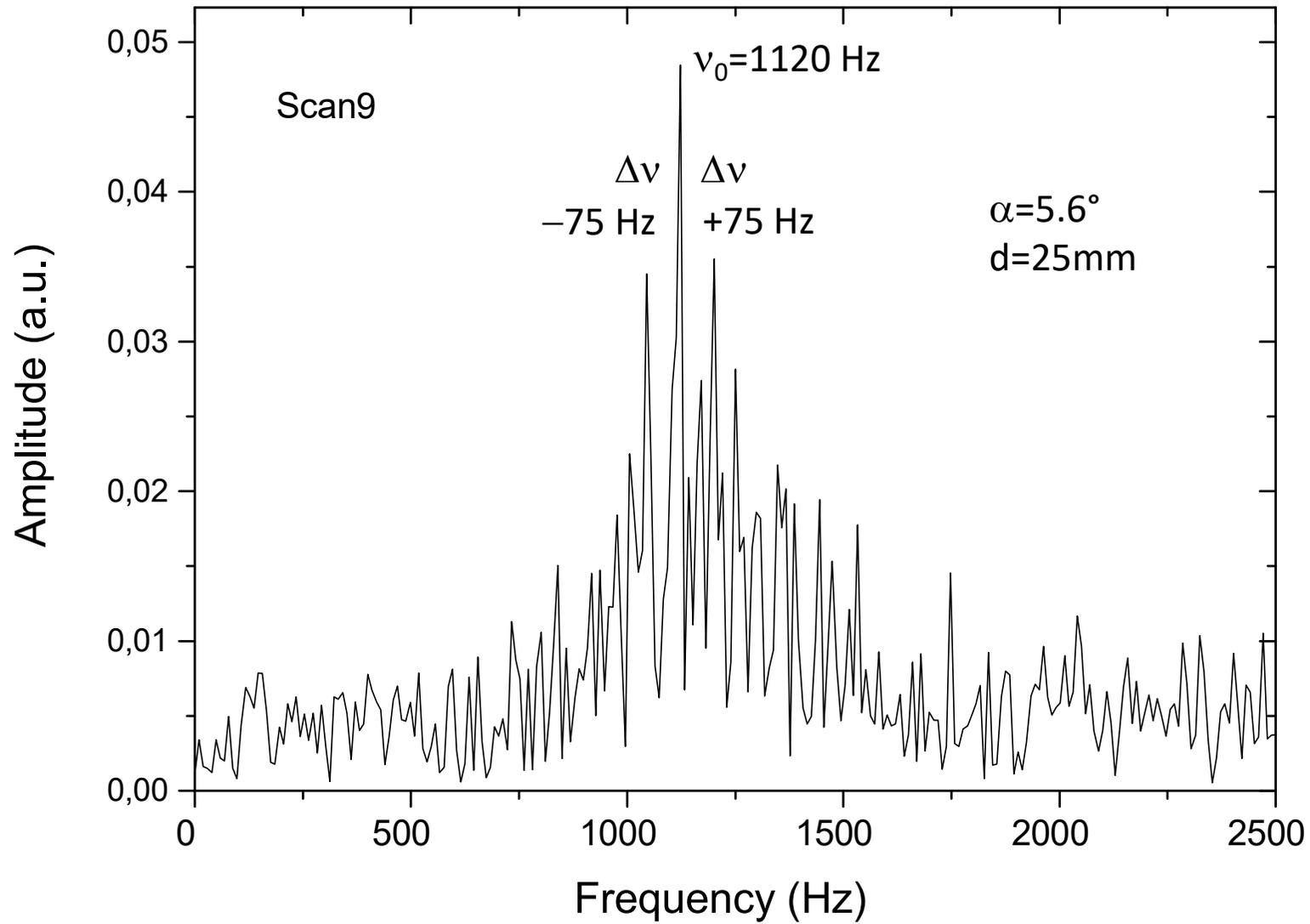


Spettro del segnale modulato FM

Lo spettro del segnale modulato FM è composto da infinite righe distanti tra loro di f_m .

Le funzioni di Bessel, J_0, J_1, J_2, \dots , determinano l'ampiezza delle componenti spettrali.

Trasformata di Fourier (FFT) del segnale del microfono



Il flusso delle sfere non è continuo, ma intermittente in maniera regolare

La presenza di due picchi secondari simmetrici rispetto al picco centrale, posti a $\Delta\nu = 75$ Hz e l'assenza di picchi secondari a distanza multipla di $\Delta\nu = 75$ Hz (indice di una eventuale modulazione di frequenza) dimostra che il segnale è modulato in ampiezza.

Frequenza principale: $\nu_0 = N_p / T$

$N_p \approx 4520$ numero totale (medio) di sfere; $T =$ tempo di scorrimento = 4.0 s.
Quindi, la frequenza di caduta delle singole sfere deve essere intorno a $4520/4=1130\text{Hz}$, che corrisponde bene con la frequenza principale.

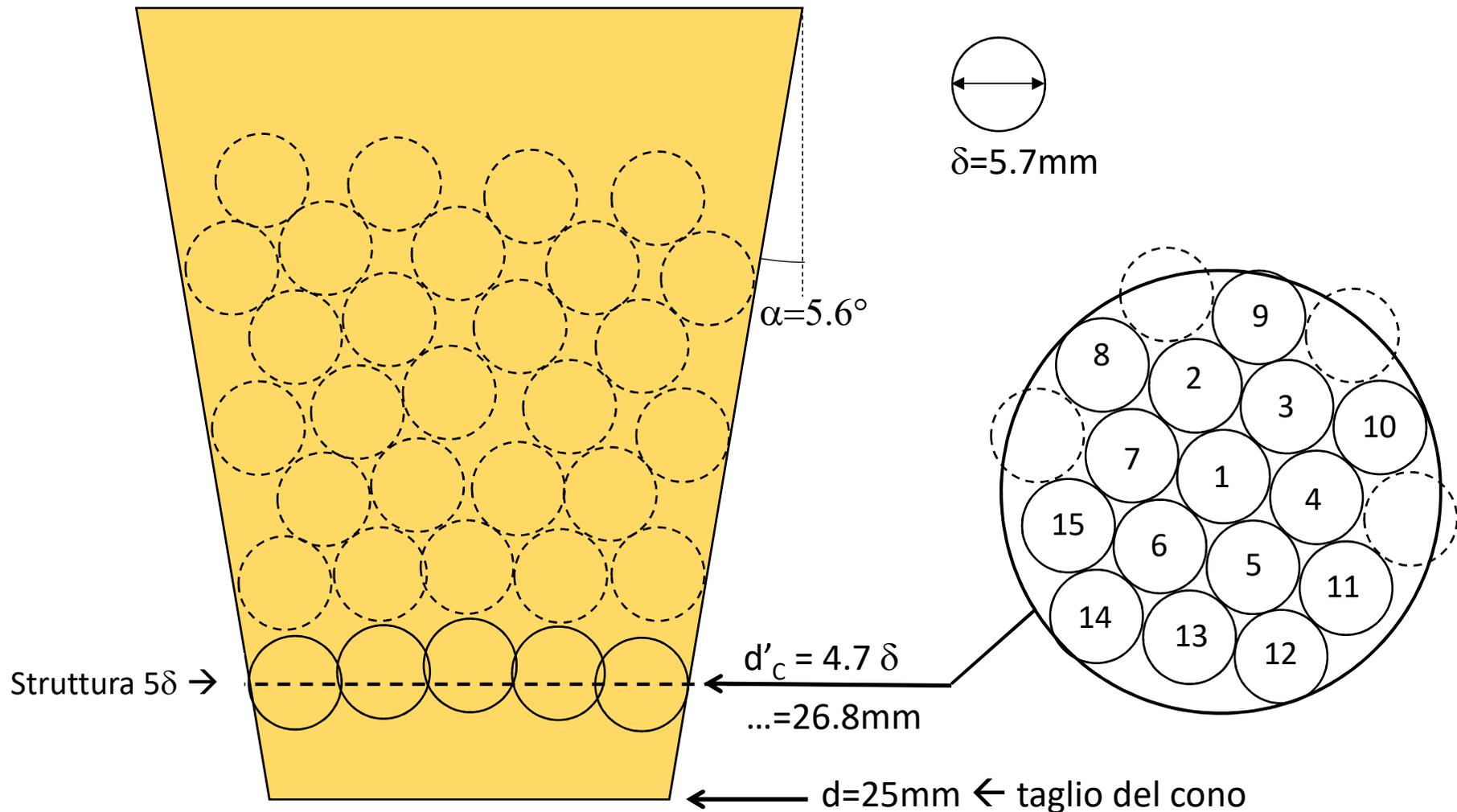
Le sfere cadono a grappoli (o clusters) associati alla formazione e distruzione delle strutture esagonali quasi-regolari.

Dalla frequenza dei picchi satelliti, ricaviamo per il numero medio di sfere in ciascun grappolo (cluster):

$$N_C = \nu_0 / \Delta\nu = 1120 / 75 \approx 15$$

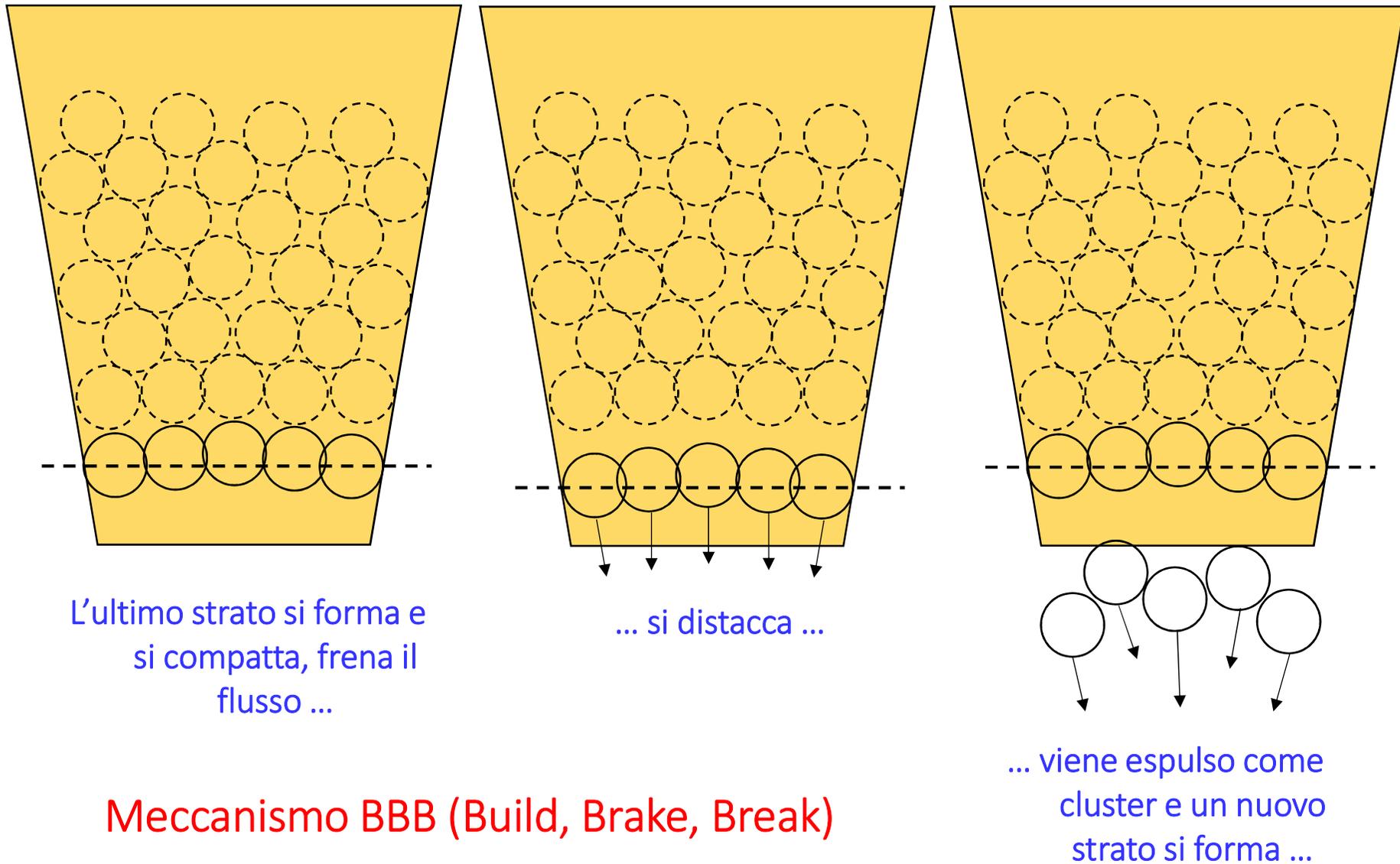
Il numero medio di sfere nei grappoli (clusters) è di ≈ 15 !!

Sferette corrispondenti ad un grappolo



Il numero di sferette in un grappolo, 15, corrisponde esattamente al numero di sferette interi che si possono inserire all'interno di un cerchio il cui diametro d'_c equivale a quello della struttura 5δ , ovvero 26.8 mm. Questo significa che il grappolo di sferette espulso corrisponde esattamente all'ultimo strato del materiale compatto.

Riassumendo, questa è la cinetica del flusso



Calcolo dello spessore dello strato espulso

Un altro modo per arrivare allo stesso risultato è calcolare lo spessore dello strato compatto che si distacca, forma un grappolo e viene espulso ...

Flusso di massa:

$$f_m = Q / T = 615 / 4.0 = 153.7 \text{ g/s}$$

Densità media di sfere omogenee impacchettate: $\rho_M \approx 0.69$

Flusso di volume:

$$f_V = f_m / \rho_M = 153.7 / 0.69 = 222.7 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Velocità di una ipotetica colonna di materia granulare compatta uscente:

$$V = f_V / A = f_V / (\pi d^2/4) = \dots = 39.5 \text{ cm/s}, \text{ con } A \text{ area del fondo della colonna (vedi slide)} \rightarrow$$

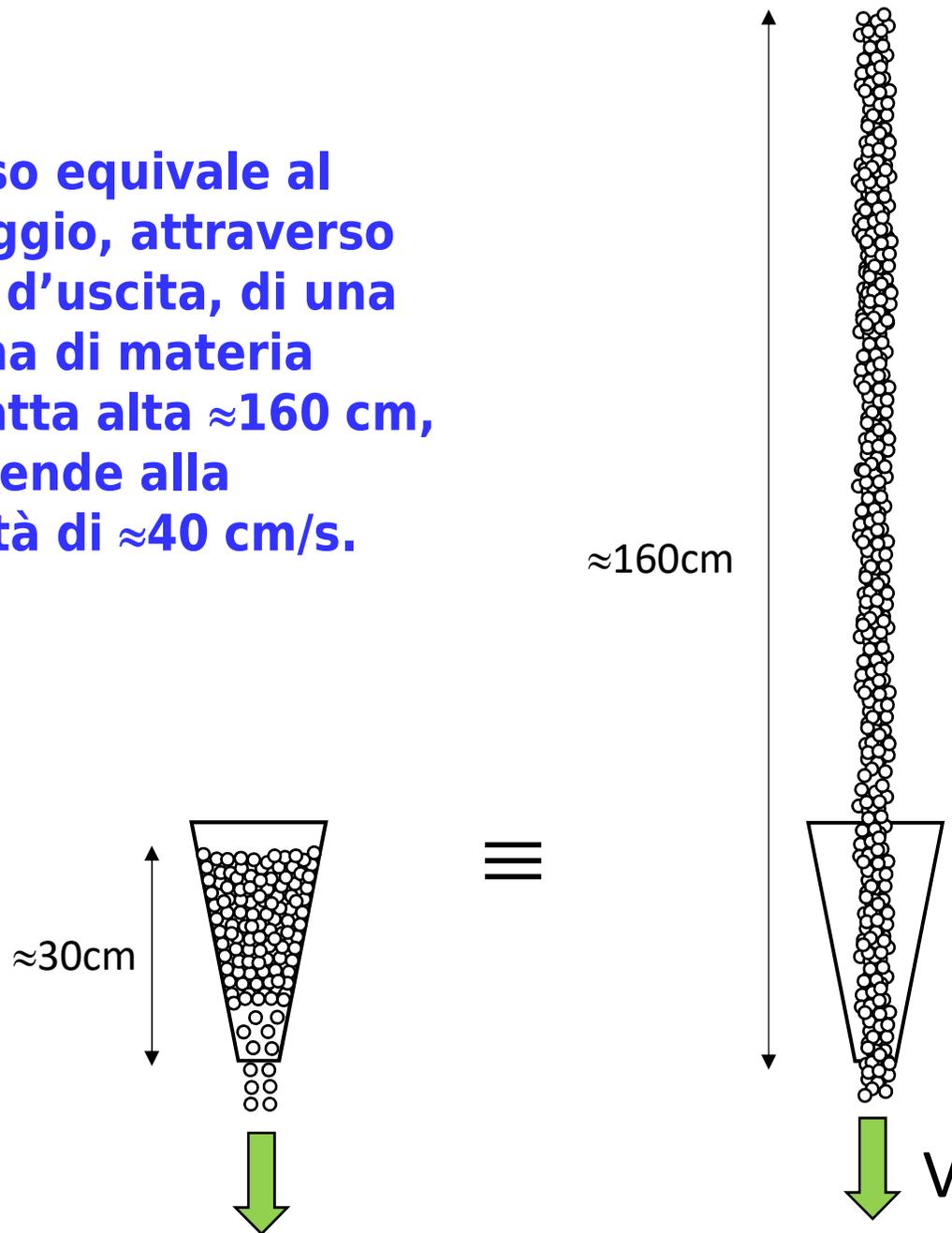
Frequenza di modulazione del flusso di materia uscente: $\Delta\nu = 75 \text{ Hz}$

Spessore medio dello strato di materia granulare in caduta:

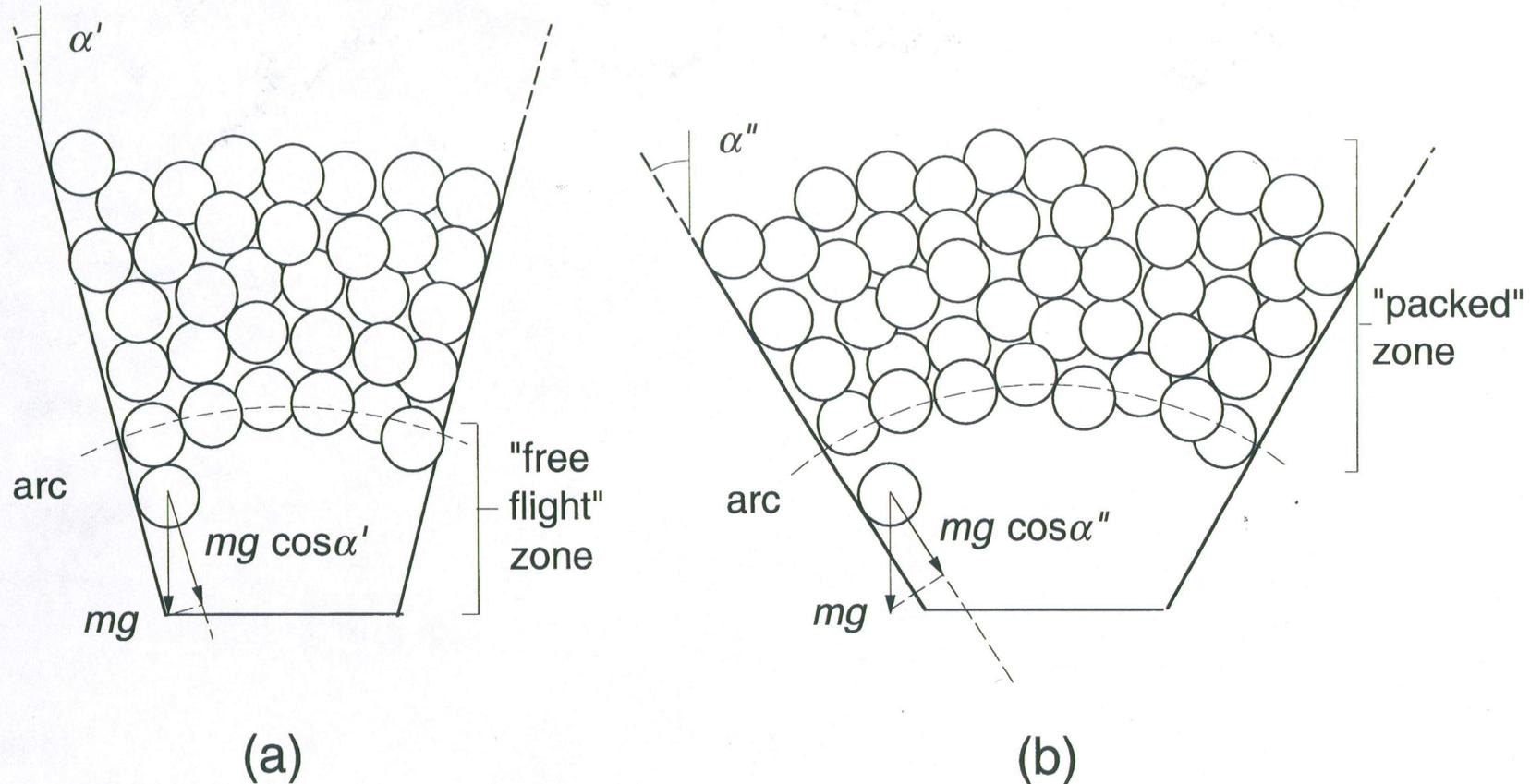
$$\Delta h = V / \Delta\nu = 39.5 / 75.0 = 0.53 \text{ cm} \approx \delta = 0.57 \text{ cm} \quad \leftarrow \text{diametro medio delle sfere}$$

IL GRAPPOLO CORRISPONDE AD UN SINGOLO STRATO COMPATTO DI SFERETTE !!

Il flusso equivale al passaggio, attraverso il foro d'uscita, di una colonna di materia compatta alta ≈ 160 cm, che scende alla velocità di ≈ 40 cm/s.



Ruolo dell'angolo di apertura del cono



Le sferette vicine alla parete sono trascinate in basso da una forza minore. All'aumentare dell'angolo di apertura α allora il flusso diminuisce, come abbiamo già osservato, anche se il diametro minimo rimane costante.

Riassunto dei risultati (Sferette dolci ZU57, $\delta=5.7\text{mm}$)

α



n	α ($^{\circ}$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	s'	s''	s'''
1	4.7	18.0	7.0	460	65.7	3.2					
2	5.6	17.9	7.5	"	61.3	3.1	4.7	6.8	1.44	3.10	10.3
3	5.6	18.0	7.0	"	65.7	3.2					
4	8.3	19.0	7.2	"	63.9	3.3					
5	9.2	18.0	8.0	"	57.5	3.2					
6	10.2	18.4	10.3	615	59.7	3.2	4.5	6.8	1.45	2.39	5.8
7	11.0	18.2	8.3	460	55.4	3.2	4.5		1.35	3.61	
8	13.3	19.0	9.1	"	50.5	3.3					
9	13.3	19.1	9.2	"	50.0	3.3	4.6		1.37	2.58	
10	14.0	18.0	10.8	"	42.6	3.2					
11	21.7	19.0	9.8	"	46.9	3.3					

f_{MIN} diminuisce all'aumentare di α . Si tratta di trovarne la dipendenza!

Cerchiamo un'espressione per il flusso $f_{MIN}(\alpha)$

Ipotizziamo quanto segue:

$$f_{MIN}(\alpha) = Q / T(\alpha, d_{MIN}) = f_{MIN}(0^\circ) \cdot \exp(-k \cdot \operatorname{tg} \alpha)$$

Con $f_{MIN}(0^\circ)$ e k da determinare sperimentalmente.

$$\log_{10} [f_{MIN}(\alpha)] = \log_{10} [f_{MIN}(0^\circ)] - 0.434 \cdot k \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Un plot dei dati di $\log_{10} [f_{MIN}(\alpha)]$ in funzione di $\operatorname{tg} \alpha$ dovrebbe dare un andamento lineare ...

Slide →

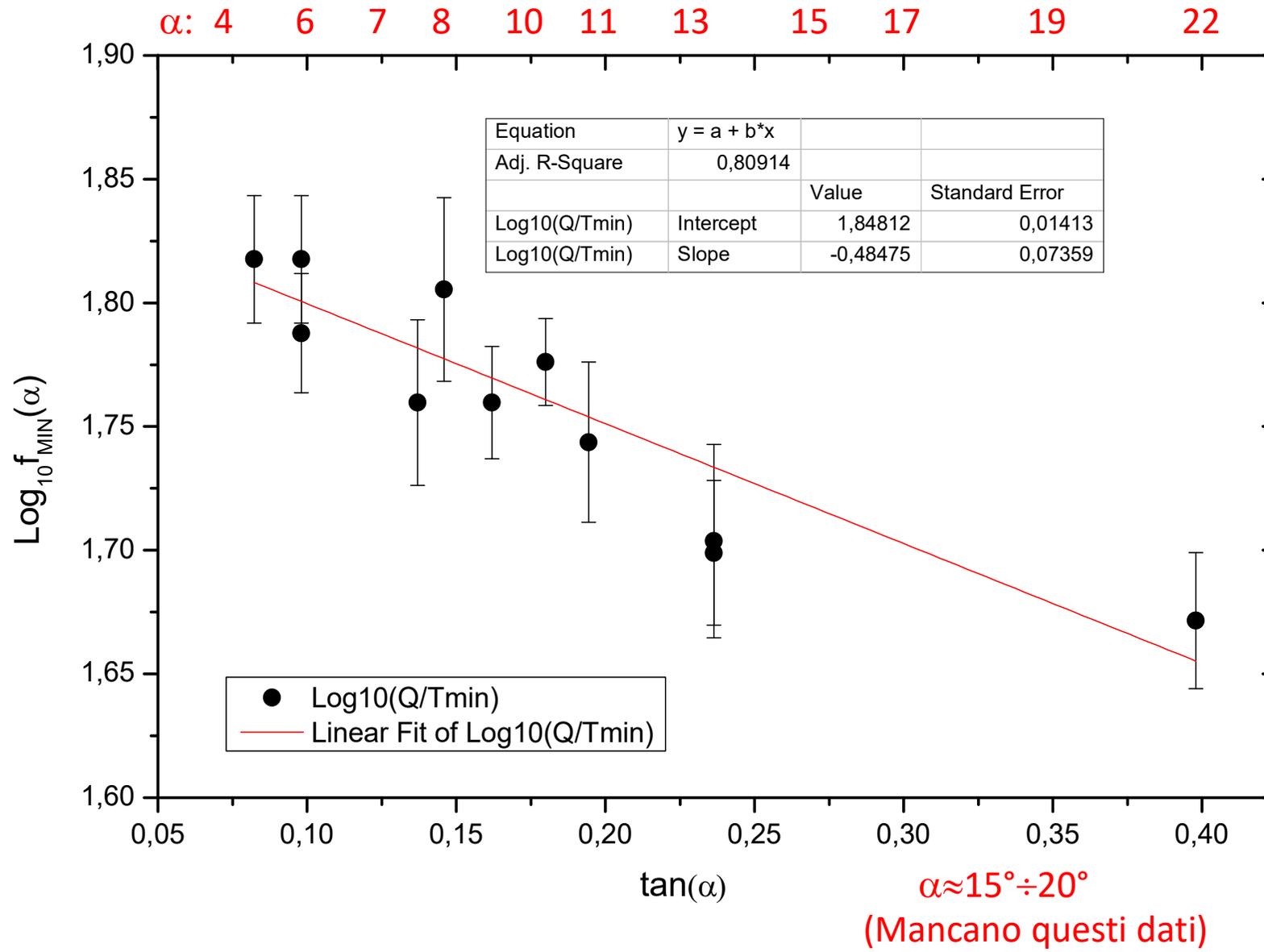
Dal plot seguente troviamo: $f_{MIN}(0^\circ) = 70.5$ (g/s) ; $k = 1.12$.

Abbiamo infine:

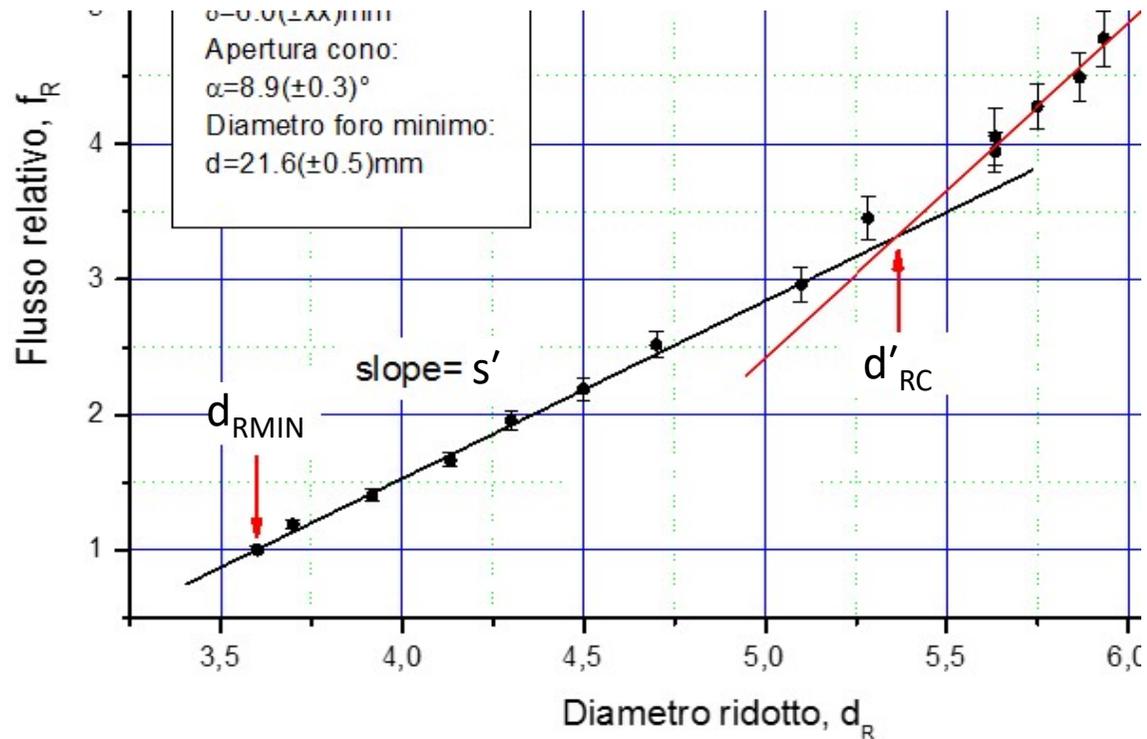
$$f_{MIN}(\alpha) = Q / T(\alpha, d_{MIN}) = 70.5 \cdot \exp(-1.12 \cdot \operatorname{tg} \alpha)$$

Relazioni simili vanno cercate anche per le altre sferette.

Flusso $f_{\text{MIN}}(\alpha)$ per il campione di sferette ZU57, $\delta=5.7\text{mm}$



Cerchiamo un'espressione per il flusso $f(\alpha, d)$ per $d_{\min} < d < d'_c$ (primo tratto lineare)



Esempio del primo tratto lineare

$$f_{rel}(\alpha, d_R) = 1 + s'(\alpha) \cdot [(d_R - d_{RMIN})]$$

$$f_{rel}(\alpha, d) = 1 + s'(\alpha) \cdot [(d - d_{MIN}) / \delta]$$

($s'(\alpha)$ è la pendenza, adimensionale, della retta di f_{rel} vs. d_R , ed è costante: ≈ 1.4)

Espressione per il flusso $f(\alpha, d)$ per $d_{\min} < d < d'_c$ (primo tratto lineare)

$$f_{rel}(\alpha, d) = f(\alpha, d) / f_{MIN}(\alpha) = 1 + s'(\alpha) \cdot [(d - d_{MIN}) / \delta]$$

$$f(\alpha, d) = f_{MIN}(\alpha) \cdot \{1 + s'(\alpha) \cdot [(d - d_{MIN}) / \delta]\} = \dots$$

Ma avevamo trovato prima che:

$$f_{MIN}(\alpha) = f_{MIN}(0^\circ) \cdot \exp(-k \cdot \operatorname{tg} \alpha)$$

Per cui la formula finale, generalizzata, per il flusso nella prima regione lineare diventa:

$$f(\alpha, d) = Q / T(\alpha, d) = f_{MIN}(0^\circ) \cdot \exp(-k \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \{1 + s'(\alpha) \cdot [(d - d_{MIN}) / \delta]\}$$

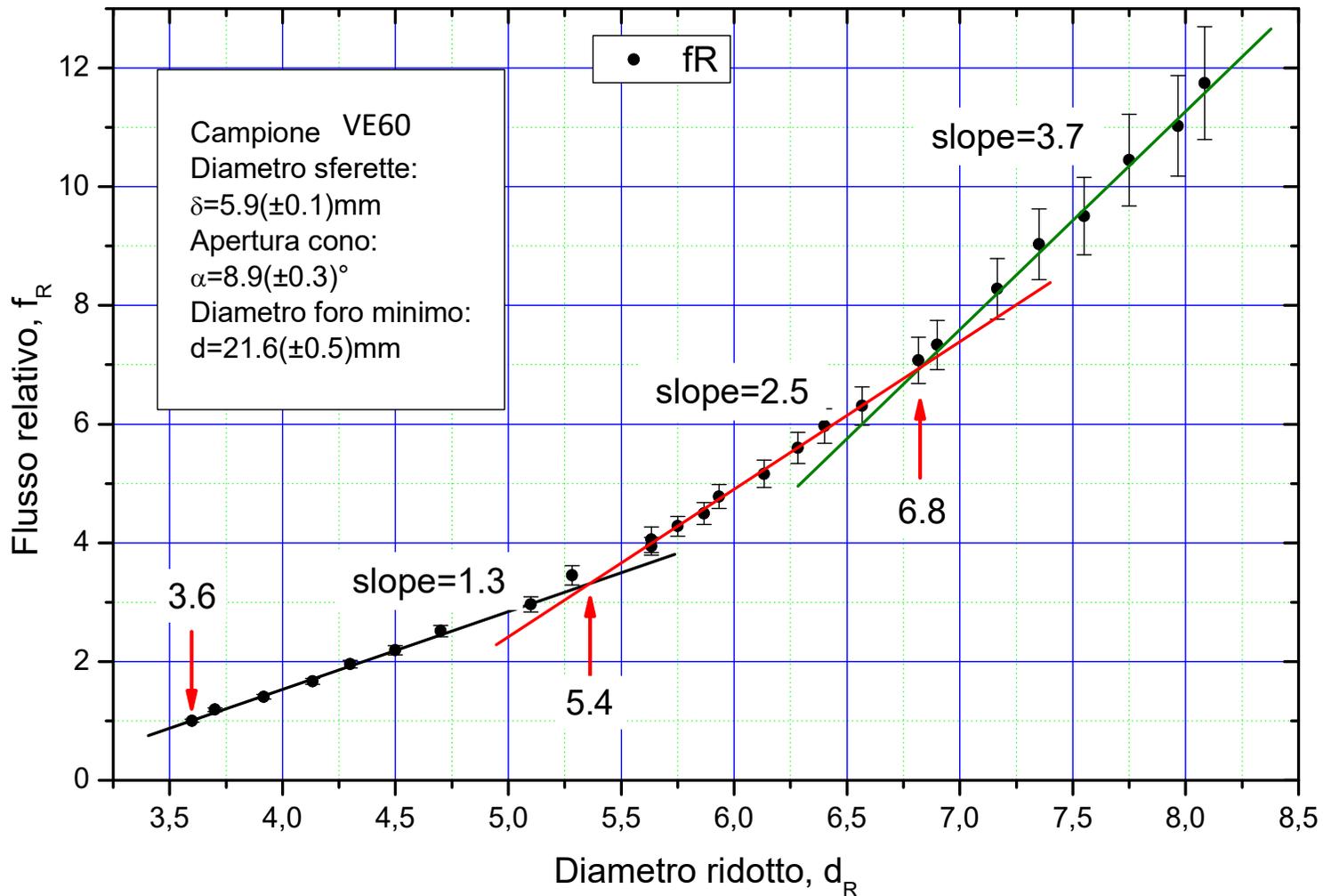
Per il campione di sferette ZU57, $\delta=5.7\text{mm}$, abbiamo infine:

$$f(\alpha, d) = Q / T(\alpha, d) = 70.5 \cdot \exp(-1.12 \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \{1 + 1.4 \cdot [(d - d_{MIN}) / 5.7]\}$$

Altri dati

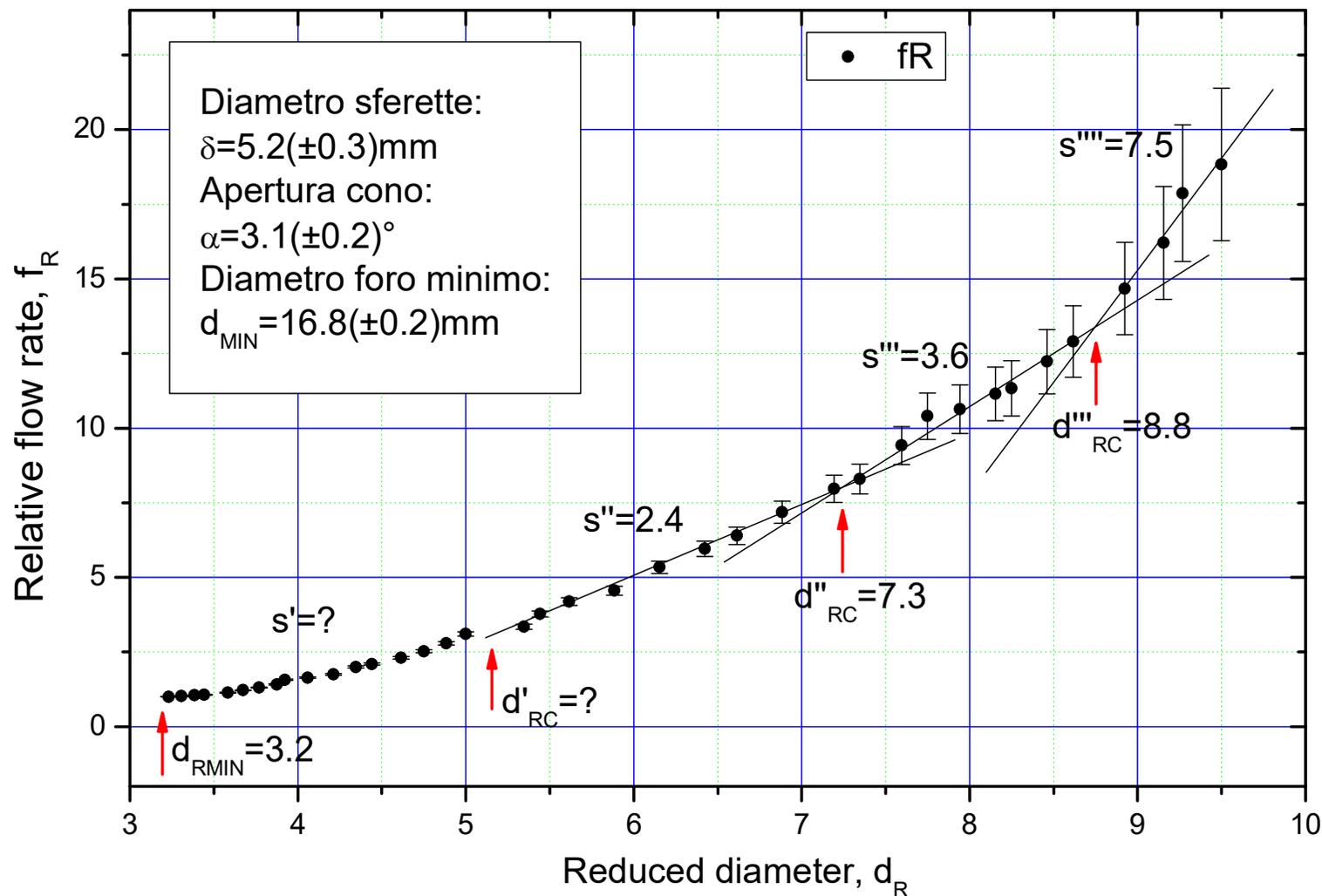
Sferette vetro VE60, $\delta=6\text{mm}$

n	α ($^\circ$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
1	8.9	21.6	10.66	1750	164.2	3.6	5.4	6.8		1.3	2.5	3.7	



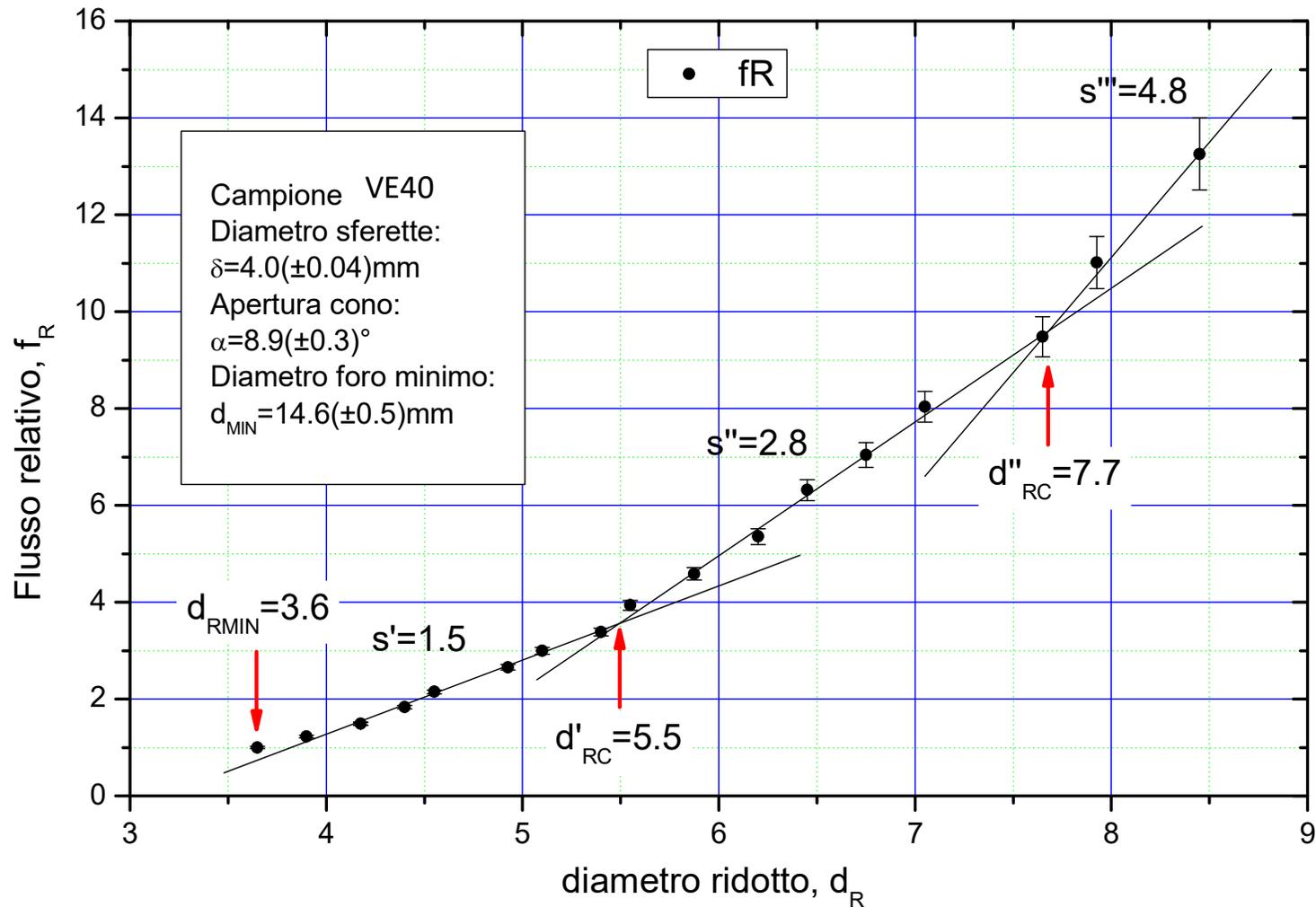
Sferette dolci ZU52, $\delta=5.2\text{mm}$

n	α ($^\circ$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
1	3.1	16.8	13.94	900	64.6	3.2	?	7.2	8.8	?	2.4	3.6	7.5



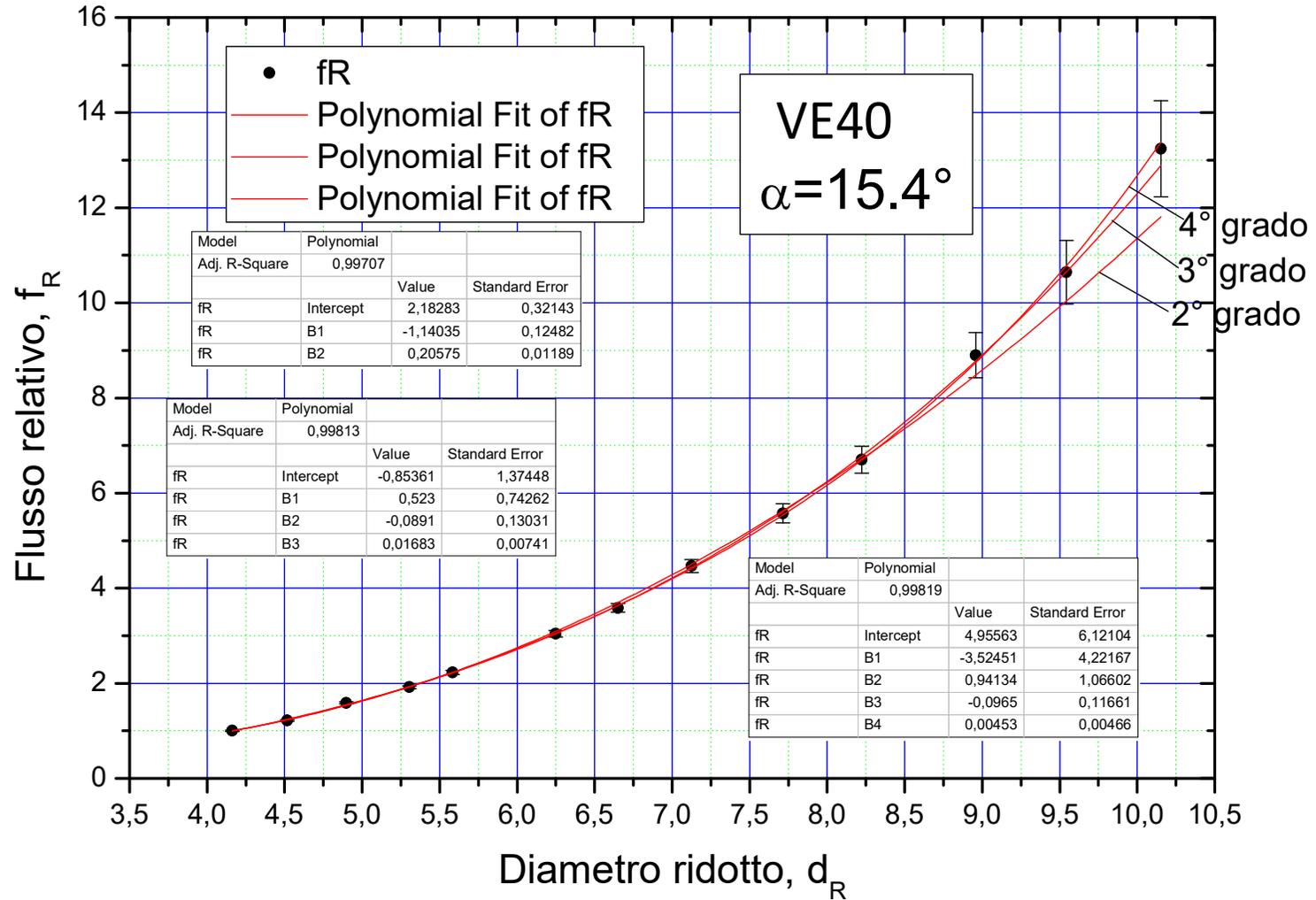
Sferette vetro VE40, $\delta=4\text{mm}$

n	α ($^\circ$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
1	8.9	14.6	18.34	1050	57.2	3.6	5.5	7.7		1.5	2.8	4.8	



Sferette vetro VE40, $\delta=4\text{mm}$

n	α ($^\circ$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
2	15.4	16.4	38.0	3005	79.08	4.1	?	?	?	?	?	?	?



Sferette vetro VE60, $\delta=6\text{mm}$

n	α ($^{\circ}$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
1	8.9	21.6	10.66	1750	164.2	3.6	5.4	6.8		1.3	2.5	3.7	
2	15.4	22.0	19.85	2867	144.4	3.7	?	?		?	?		

Sferette dolci ZU52, $\delta=5.2\text{mm}$

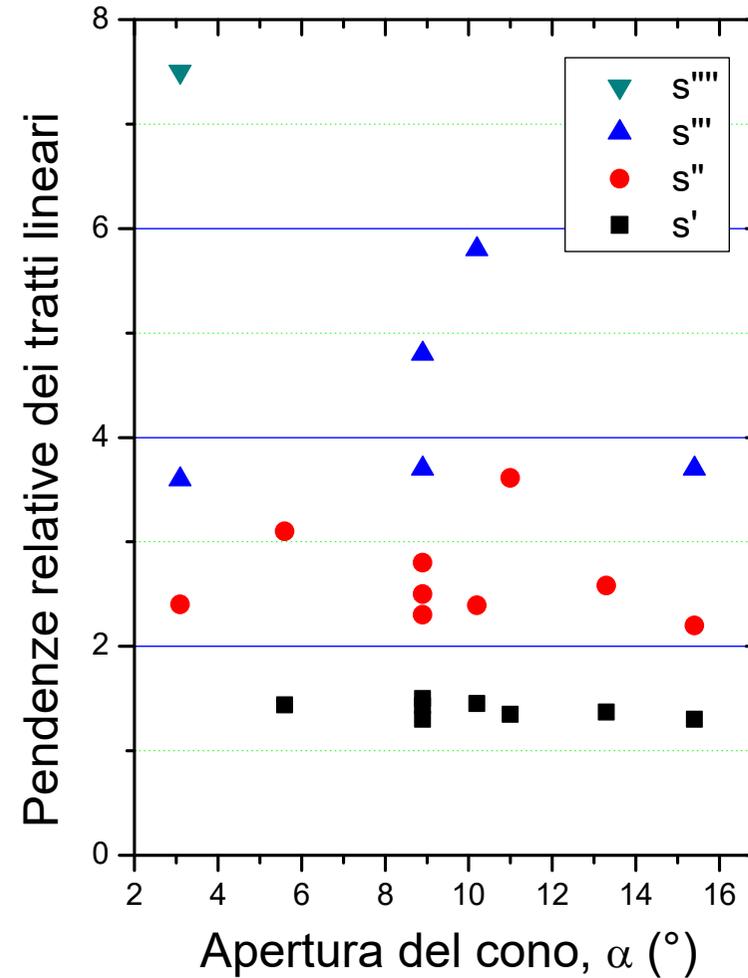
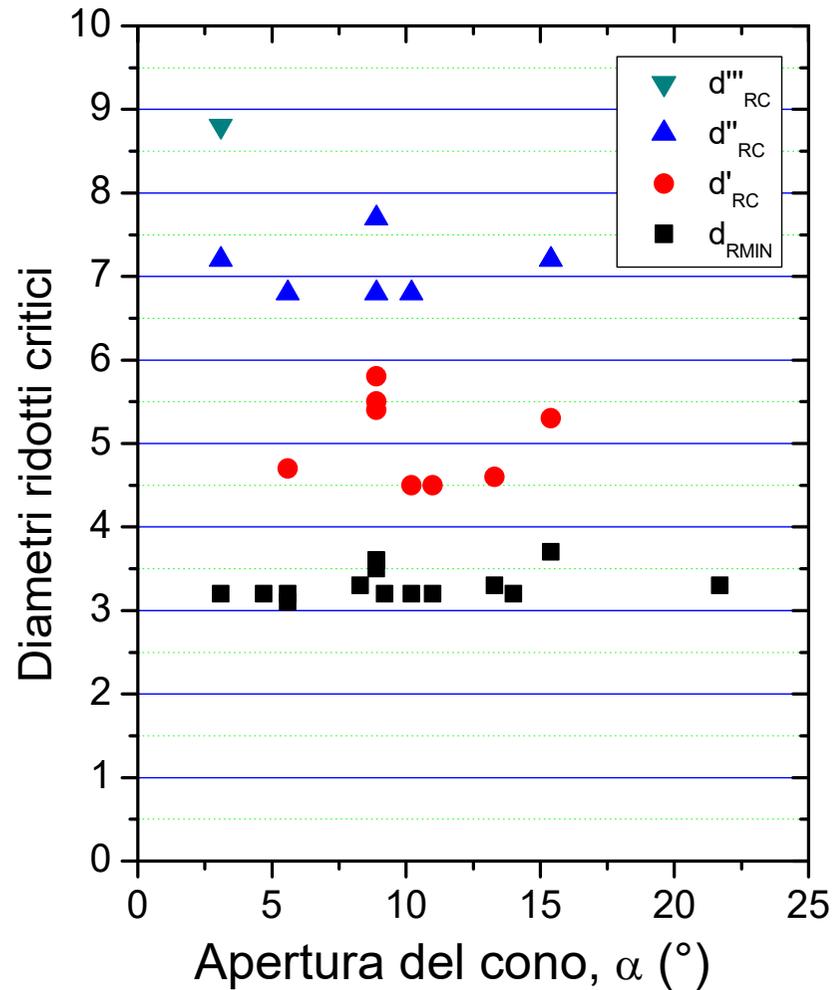
n	α ($^{\circ}$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
1	3.1	16.8	13.94	900	64.6	3.2	?	7.2	8.8	?	2.4	3.6	7.5
2	8.9	18.2	18.2	910	50	3.5 ?	5.8 ?	?		1.43	2.3	?	
3	15.4	19.3	36.5	1582	43.3	3.7	5.3 ?	7.2 ?		1.3 ?	2.2 ?	3.7 ?	

Sferette vetro VE40, $\delta=4\text{mm}$

n	α ($^{\circ}$)	d_{MIN} (mm)	T_{MIN} (s)	Q (g)	f_{MIN} (g/s)	d_{RMIN}	d'_{RC}	d''_{RC}	d'''_{RC}	s'	s''	s'''	s''''
1	8.9	14.6	18.34	1050	57.2 ?	3.6	5.5	7.7		1.5	2.8	4.8	
2	15.4	16.4	38.0	3005	79.1 ?	4.1	?	?	?	?	?	?	?

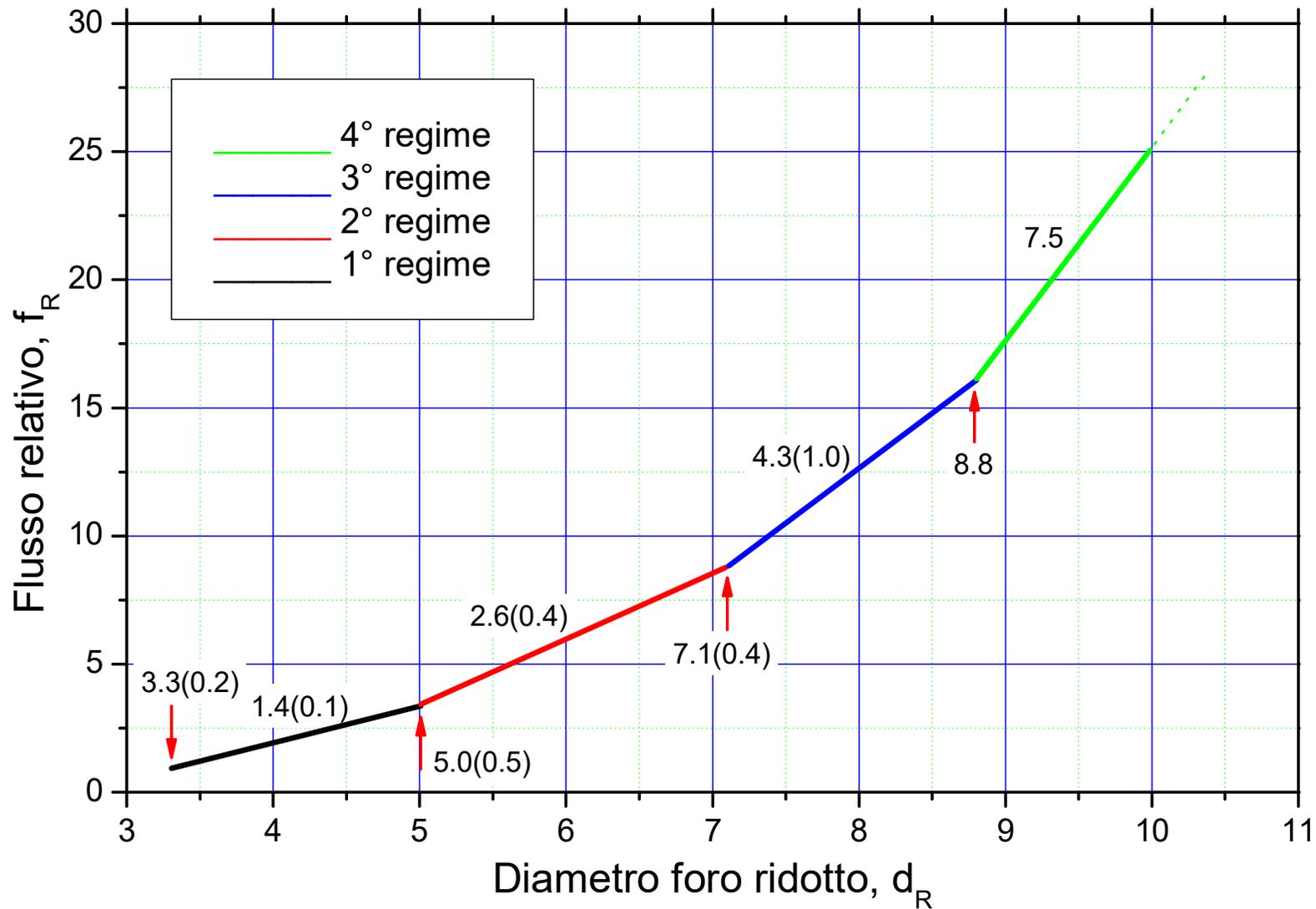
Sintesi di tutti i risultati

Grandezze relative e ridotte vs. α



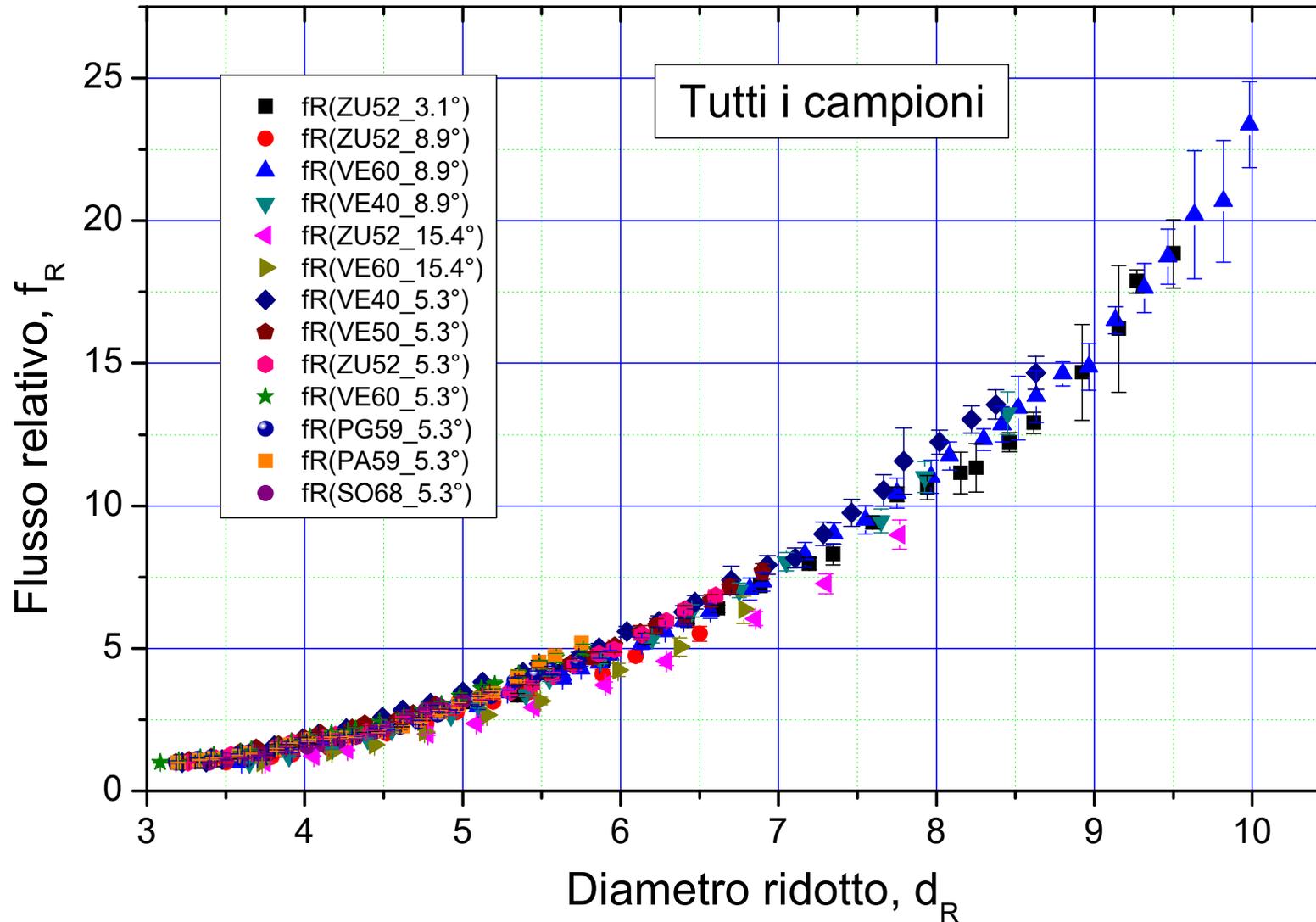
Tutte le grandezze mostrano poca dipendenza da α !!
(Da confermare con altre misure!)

TENTATIVO DI UNA SINTESI FINALE



Andamento (universale?) del flusso, ricostruito, per sfere attraverso tronchi di cono, con evidenziati i tratti lineari con i diametri critici medi e le pendenze medie.

TENTATIVO DI UNA SINTESI FINALE



Andamento reale (universale?) del flusso, per sfere attraverso tronchi di cono.
Sembra indipendente dalla natura delle sfere e dall'angolo α .

Conclusioni

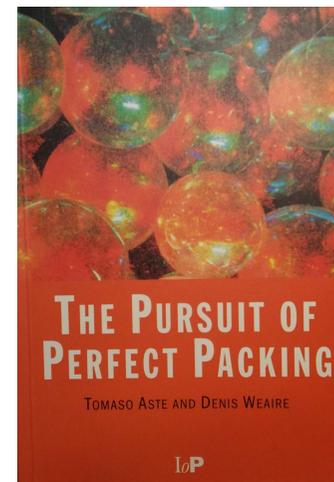
- Il flusso, per gravità, di sferette omogenee (diametro δ) attraverso tronchi di cono a parete soffice è risultato **non stazionario** nonostante non ci sia un controflusso di aria (come invece avviene nella clessidra).
- Il flusso è modulato (oscillatorio) a causa della formazione di una **struttura quasi-regolare** che si compatta sul fondo della colonna e che agisce da freno.
- La distruzione della struttura produce un **grappolo di sferette in uscita**, la cui **frequenza di caduta (75Hz)** è stata misurata in una condizione particolare.
- Ogni grappolo di sferette espulse corrisponde ad **un singolo strato compatto**, il cui diametro (5δ , 7δ , 9δ , ecc.) dipende dal valore attuale del diametro del foro.
- Come conseguenza di ciò, il flusso di massa (g/s) vs. il diametro del foro è caratterizzato da **diversi tratti lineari (diversi regimi di flusso)**.
- Dai dati sperimentali, ottenuti variando l'apertura del cono e il diametro del foro, si ottiene **un andamento universale** per il flusso, che risulterebbe valido per qualsiasi tipo di sfera, da confermare attraverso altre misure su sferette di diversa densità e dimensioni.
- In alcuni casi i **tratti lineari sono poco distinguibili**. La causa potrebbe essere dovuta alle imperfezioni del foro di uscita e/o alla scarsità di dati.

Miglioramenti e sviluppi futuri

- Ripetere l'esperimento col microfono in corrispondenza degli altri tratti lineari, cercando di ridurre il rumore.
- Ritentare la misura della pressione sul fondo del cono con una bilancia.
- Cosa succede se la parete è rigida?
- Cosa succede se mescoliamo sferette di dimensioni diverse?

Per approfondimenti sul "packing" di sfere, consiglio ...

T. Aste and D. Weaire,
"The Pursuit of Perfect Packing", Ed. IOP



Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare va all'Ing. **Pietro Grillo**, prematuramente scomparso, per il valido aiuto prodigato durante le misure con il microfono, effettuate all'ENEA di Portici.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!

Segue un breve video
sull'impacchettamento delle sfere in 2D ...

parretta@fe.infn.it; www.researchgate.net

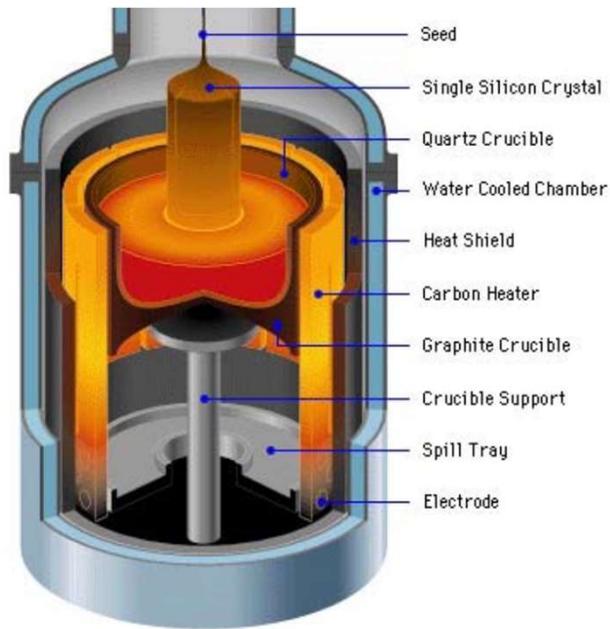
L'impacchettamento 3D ideale di sfere omogenee prevede un fattore $PF=0.74$. Nella pratica questo valore è irraggiungibile e si attesta normalmente intorno a 0.6.

Se invece delle sferette consideriamo degli atomi, ad esempio quelli del Silicio, allora l'impacchettamento ideale di essi in un cristallo regolare è una cosa possibile e viene realizzata con una delle tecniche illustrate nella seguente slide.

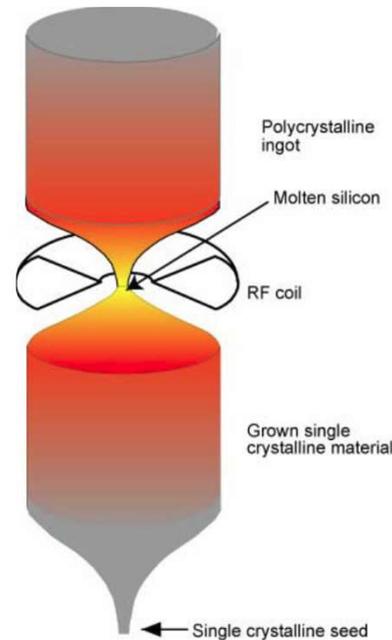
Queste tecniche prevedono il riscaldamento di tutto il Silicio fino al punto di fusione e poi un lento raffreddamento realizzato creando un gradiente di temperatura e muovendo il Silicio fuso rispetto a questo gradiente oppure muovendo il gradiente di temperatura rispetto al Silicio fuso.

Se raffreddassimo invece il Silicio fuso in maniera omogenea, il risultato sarebbe la formazione di tanti cristalli di piccole dimensioni, ognuno orientato a caso.

Crescita di silicio cristallino da fuso



Metodo Czochralski



Metodo Float-Zone



Metodo DS Bridgman



Silicio monocristallino

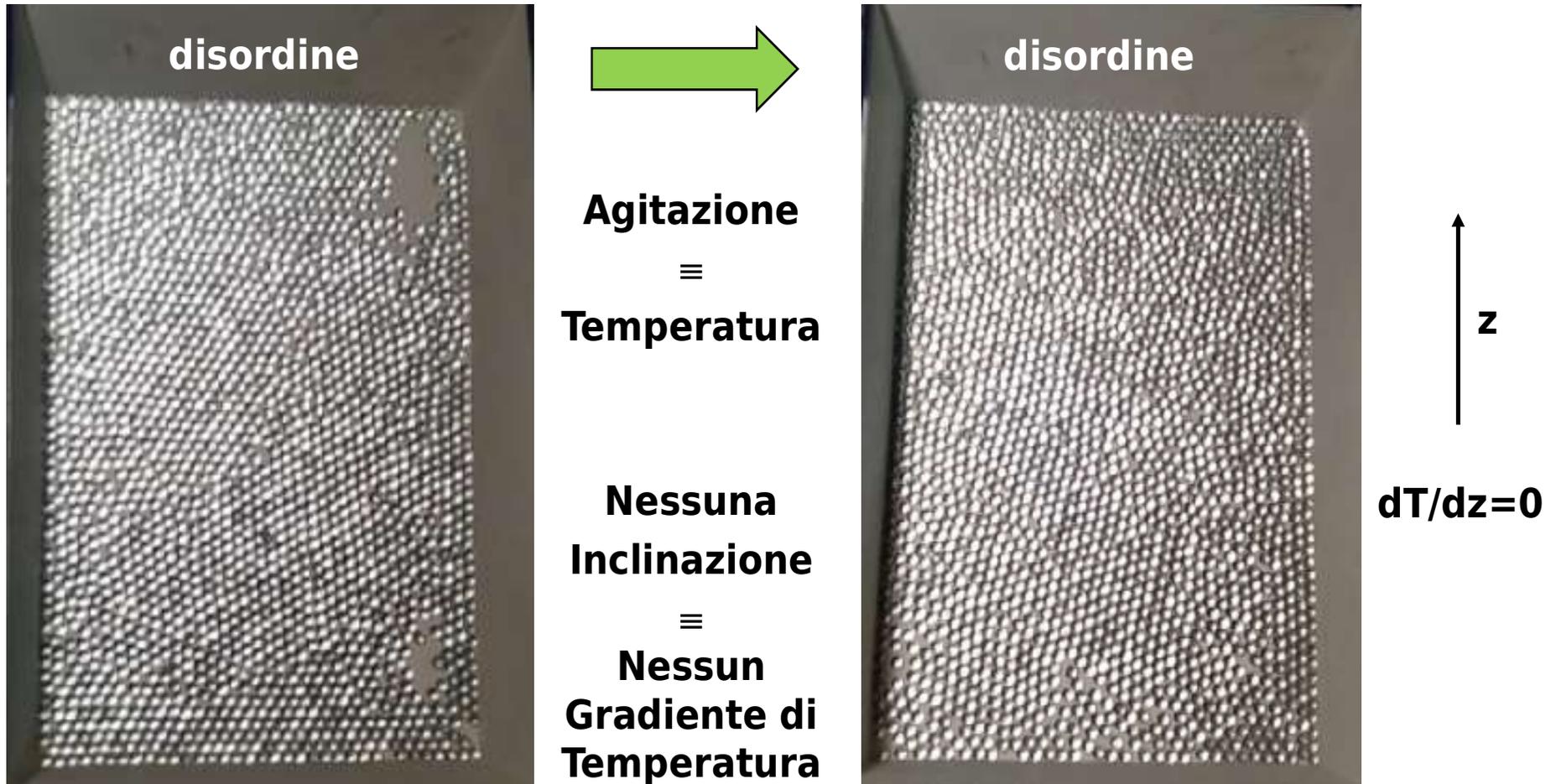


Silicio policristallino a grani colonnari

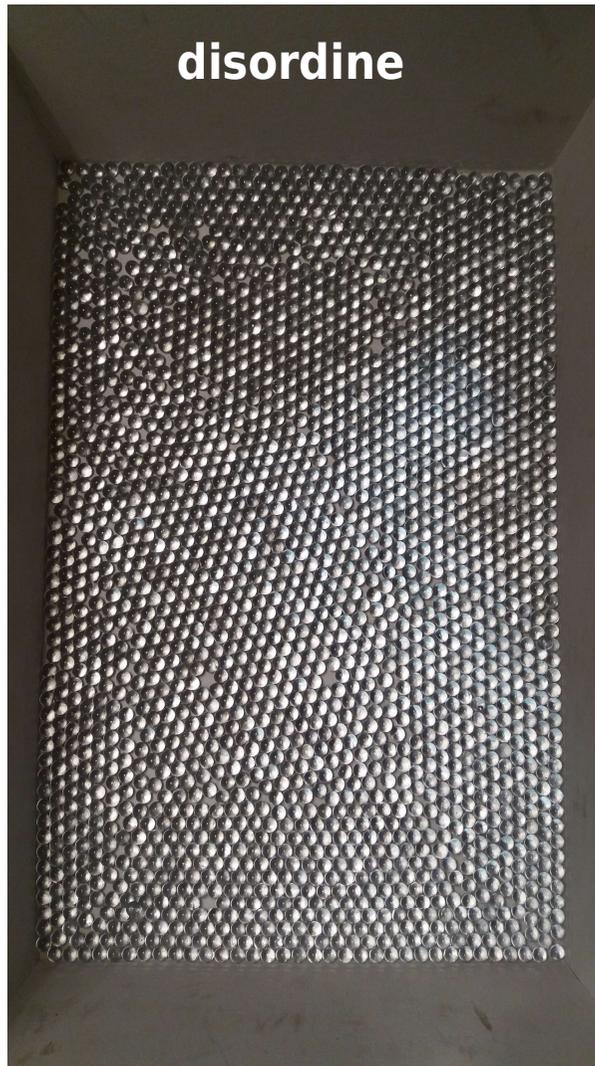
Contrariamente al caso 3D, l'impacchettamento ordinato di sfere in 2D può essere realizzato, con un fattore PF ideale uguale a 0.907. La cosa è possibile se adottiamo la stessa tecnica usata per crescere monocristalli di Silicio. In pratica si tratta di disporre le sferette all'interno di una scatola e di agitarla, ovvero di dare energia cinetica alle sferette; successivamente occorre inclinare la scatola in modo tale che le sferette prossime al bordo più basso siano costrette a ridurre il loro moto e a iniziare a formare una struttura ordinata sulla quale andranno a "condensarsi" le altre sferette. Il bordo della scatola, in questo caso, agisce alla stessa stregua del gradiente di temperatura nel caso del Silicio fuso.

Seguono due video. Nel primo si parte da una disposizione nella quale le sfere sono ordinate solo in piccoli domini; poi la scatola viene agitata mantenendola sempre orizzontale. Quando si riduce l'agitazione della scatola, le sfere tornano ad assumere una struttura simile a quella di partenza. Nel secondo video, l'agitazione della scatola è accompagnata dalla sua inclinazione verso il bordo basso. Continuando ad agitare la scatola, ma aumentando l'inclinazione, la frazione condensata di sferette aumenta fino a completare l'intero gruppo. Il risultato di questa operazione è la formazione di uno strato compatto ordinato di sferette con PF prossimo a quello ideale.

Impacchettamento di sfere in due dimensioni (animazione)



Impacchettamento di sfere in due dimensioni (animazione)



Agitazione
≡
Temperatura

+

Inclinazione
≡
**Gradiente di
Temperatura**



↑
z

 $dT/dz > 0$

Prossimo seminario

Riflessioni multiple all'interno di un prisma di Newton

