



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria

Luigi Palumbo - Mauro Migliorati

**Lezioni del corso di Accelerator
Physics and Relativistic
Electrodynamics**

**Dall'elettrodinamica relativistica agli
Acceleratori di particelle
(Rev. 06)**

Aggiornato all'Anno Accademico 2015/16

Prefazione

...

Ringraziamenti

Questi appunti di Fisica Moderna sono stati realizzati grazie alla collaborazione degli studenti del corso: D. Bellaveglia, C. Bellei, G. Botta, L. Faillace, L. Lancia, S. Mangialardo, G. Prettico, che a partire dalle lezioni del corso dell'a.a. 2003/04 hanno prodotto una prima versione degli appunti.

Indice

1	I principi della meccanica e dell'elettromagnetismo	4
1.1	Spazio e tempo assoluti e principi della meccanica classica . . .	4
1.2	Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche	8
1.3	Esperimento di Michelson-Morley	12
1.4	Tentativi di conservare il concetto di etere	15
2	La cinematica relativistica	19
2.1	Introduzione allo Spazio-Tempo di Einstein	19
2.2	Le Trasformazioni di Lorentz	21
2.3	Simultaneità e Misure Spazio-Tempo	26
2.4	Invariante Relativistico e Spazio di Minkowski	30
2.5	L'effetto Doppler e l'aberrazione stellare	35
3	Elementi di dinamica relativistica	39
3.1	Quantità di moto	39
3.2	Lavoro e Energia Cinetica	43
3.3	Trasformazione della quantità di moto e dell'energia	44
3.4	Quadrivettore impulso-energia	46
3.5	Trasformazione delle forze	53
3.6	Esempi di calcolo dell'accelerazione e della velocità in un sistema relativistico	56
3.6.1	Moto di una carica con \mathbf{f} e \mathbf{v} paralleli	56
4	Elettromagnetismo e relatività	62
4.1	Trasformazione della carica e della densità di corrente	62
4.2	Covarianza e trasformazioni dei campi	66
4.3	Quadrivettore potenziale	69
4.4	Campo e. m. di una carica in moto rettilineo uniforme	71
4.5	I potenziali ritardati	75

5	Elettrodinamica relativistica	83
5.1	Richiami di meccanica analitica	83
5.2	Il principio dei lavori virtuali	85
5.3	Equazioni di Lagrange	87
5.4	La funzione Hamiltoniana	93
5.4.1	Le equazioni di Hamilton	96
5.4.2	Hamiltoniana relativistica di una particella	97
5.4.3	Hamiltoniana ed equazioni del moto in coordinate cilindriche	104
6	Applicazioni della funzione Hamiltoniana: moto di particelle cariche in campi statici	107
6.1	Focheggiamento in un solenoide	107
6.2	Moto in un campo elettrico costante	112
6.3	Moto in un quadrupolo	114
6.4	Moto in campo elettrico e magnetico uniformi e paralleli . . .	117
6.5	Moto in campo elettrico magnetico uniformi e ortogonali tra loro	119

Capitolo 1

I principi della meccanica e dell'elettromagnetismo

1.1 Spazio e tempo assoluti e principi della meccanica classica

La meccanica “classica” o “newtoniana” è costituita da un insieme di principi ed equazioni proposto principalmente da Galilei (1564 - 1642) e Newton (1642 - 1727). La meccanica relativistica estende e generalizza tali leggi per spiegare nuove evidenze empiriche di cui si venne a conoscenza agli inizi del secolo XX e che risultavano in contraddizione con la meccanica classica.

Iniziamo questo capitolo col richiamare i principi fondamentali che regolano le leggi della meccanica classica:

1. Il principio di relatività (Galilei): Due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro sono indistinguibili;
2. Il principio di inerzia (Galilei-Newton): Un sistema di riferimento è inerziale se in esso un corpo non soggetto ad alcuna forza, e libero di muoversi, mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme;
3. Il secondo principio (Newton) della dinamica: In un sistema di riferimento inerziale, l'effetto di una forza sul moto dei corpi è regolato dalla legge:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \quad (1.1)$$

dove $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è la quantità di moto.

Si deve a Newton la formulazione di tali principi nella forma più generale possibile, e tali da poter essere applicati anche ad eventi nello spazio astronomico.

Il principio di relatività è uno dei principi fondamentali di tutta la fisica moderna. Ripreso da Einstein nella teoria della relatività ristretta, fu enunciato per la prima volta da Galileo ed esprime la covarianza delle leggi fisiche rispetto a sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

Il principio di inerzia stabilisce i criteri con i quali si possono identificare i sistemi di riferimento inerziali. In generale un sistema di riferimento è inerziale se si muove di moto rettilineo uniforme rispetto allo spazio assoluto.

A causa del suo moto di rivoluzione e di rotazione, ad esempio, non si può guardare alla terra come ad un sistema di riferimento in cui vale il principio di inerzia. Pertanto, Newton aveva individuato come un sistema di riferimento inerziale lo spazio astronomico, solidale con le stelle fisse, che egli identifica con lo spazio assoluto. Tutti i sistemi di riferimento di moto relativo uniforme rispetto ad esso, sono anch'essi inerziali.

Newton introdusse le nozioni di tempo e spazio assoluto:

Il Tempo Assoluto, Vero, Matematico, in sè e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato Durata: quello Relativo, Apparente e Comune è una misura sensibile ed esterna della Durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del Vero Tempo Assoluto: tali sono l' Ora, il Giorno, il Mese, l' Anno...

Egli pertanto sottolinea che nella realtà non esiste un moto tanto accurato da poter essere usato come misura esatta del Tempo Assoluto.

Lo Spazio Assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile; lo Spazio Relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile.

Può sembrare strano che Newton abbia ipotizzato l'esistenza di spazio e tempo assoluti senza alcun riferimento a oggetti esterni, avendo egli sempre affermato la necessità di indagare solo ciò che è osservabile: *Hypotheses non fingo*. Tuttavia, seppur lontani dall'evidenza sperimentale, spazio e tempo assoluti sono necessari per definire i principi fondamentali della meccanica.

Le definizioni di spazio e tempo date da Newton, sotto forma di postulati, gli permisero di dare maggiore rigore concettuale alla definizione di moto, già

introdotta da Galilei¹. Secondo Newton, il moto è una sequenza di posizioni occupate nello spazio in istanti di tempo successivi.

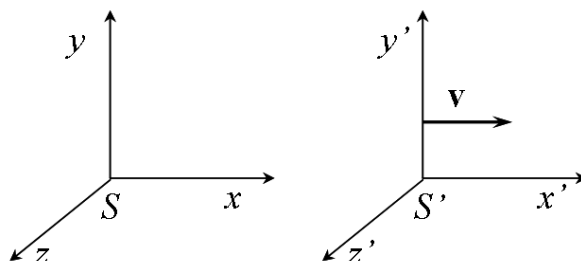


Figura 1.1: *Sistemi di riferimento inerziali*

Tra due sistemi di riferimento inerziali valgono trasformazioni di Galilei (trasformazioni di coordinate). Se consideriamo i due sistemi di riferimento in figura 1.1, $S \equiv Oxyz$ ed $S' \equiv O'x'y'z'$, l'uno in moto rettilineo uniforme rispetto all'altro, assumendo che il sistema di riferimento S' si muova rispetto a S con velocità \mathbf{v} diretta parallelamente all'asse x , ossia $\mathbf{v} = V\hat{\mathbf{i}}$, costante, e che all'istante $t = 0$ sia $O \equiv O'$, allora:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.2)$$

¹Quasi tutte le leggi della meccanica presero spunto dal lavoro di Galilei. Egli, con il principio d'inerzia, affermò che il moto degli oggetti non richiede l'intervento di una azione esterna, come invece ipotizzato da Aristotele, e che il moto procede con velocità costante su di una retta finché non interviene una forza esterna. Galilei introdusse anche il concetto di velocità vettoriale e il concetto di inerzia intesa come la resistenza naturale che un corpo oppone a qualsiasi cambiamento del suo stato di moto, e per primo identificò come forza l'agente capace di modificare il moto.

Fu tuttavia Newton a prendere i meriti maggiori per l'invenzione della fisica post-Aristoteliana dal momento che riuscì a dare una struttura matematica alle teorie di Galilei. Egli aveva studiato tutte le opere di Galilei e Keplero e, grazie alla notazione del calcolo infinitesimale, Newton riuscì a trascrivere le leggi del moto di Galilei sotto forma di equazioni semplici ma precise [Robert Laughlin, "Un Universo Diverso", La Biblioteca delle Scienze, Mondadori 2006]

Le trasformazioni di Galilei assumono che il tempo è una grandezza assoluta, invariante da un sistema di riferimento inerziale all'altro.

Il secondo principio della meccanica stabilisce che nei sistemi di riferimento inerziali vale la legge $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ovvero che la quantità di moto di un corpo può essere modificata solo dall'azione di una forza. All'interno di questo principio vi è una stretta connessione con la geometria euclidea dello spazio che si estende al di là dei limiti terrestri.

In due sistemi di riferimento inerziali le forze e le accelerazioni hanno sempre la stessa espressione, ovvero sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galilei.

I sistemi non inerziali invece sono quelli in cui le sole forze della natura non sono sufficienti a descrivere il moto. Nei sistemi non inerziali, accelerati rispetto ai sistemi di riferimento inerziali, non vale l'equazione (1.1). La trasformazione di coordinate da un sistema di riferimento inerziale ad uno accelerato, mette in evidenza che l'accelerazione nel sistema accelerato è diversa da quella che si avrebbe in un sistema inerziale. La differenza tra le due accelerazioni giustifica la presenza di un termine aggiuntivo nell'espressione della forza nel sistema accelerato, che prende il nome di forza apparente.

Moti relativi e moti assoluti

Newton cercò di dimostrare le differenze tra i sistemi inerziali rispetto a quelli non inerziali, attraverso un semplice esperimento.

Supponiamo di avere un secchio pieno d'acqua legato al soffitto da una corda. Sia S il sistema di riferimento fisso (inerziale), solidale con l'osservatore, e S' il sistema di riferimento solidale con il secchio (figura 1.2).

Attorcigliando la corda e rilasciandola il secchio inizia a ruotare rispetto al sistema S . All'inizio l'acqua non entra subito in rotazione con il secchio, ma è ferma nel sistema di riferimento S . Mano a mano l'acqua inizia a ruotare assieme al secchio e subisce l'azione di una forza apparente, la forza centrifuga. La superficie dell'acqua assume la forma di un paraboloide di rotazione (figura 1.2).

Nella prima fase, in cui l'acqua è ferma rispetto ad S , possiamo notare che rispetto al sistema di riferimento S' , (in rotazione con il secchio), l'acqua si muove di moto circolare. Se ci mettessimo sul bordo del secchio, ovvero nel sistema S' , vedremmo l'acqua muoversi. Col passare del tempo, l'acqua assume lo stesso moto del secchio e quindi risulterà in moto rispetto ad S , ma ferma rispetto ad S' .

Secondo Newton la presenza della forza centrifuga dimostra che il moto rotatorio di secchio e acqua è, rispetto al sistema di riferimento inerziale S ,

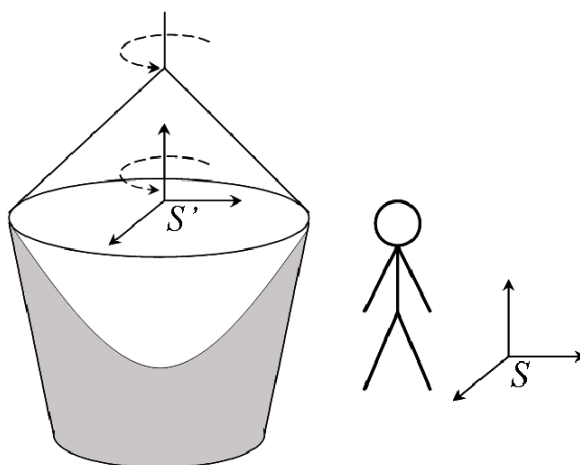


Figura 1.2: *Il secchio di Newton*

un moto *assoluto*, e deve essere assoluto anche rispetto allo spazio assoluto. Il moto iniziale dell'acqua rispetto al sistema di riferimento S' (quando l'acqua è ferma rispetto a S) è invece un moto *relativo*, in quanto non agiscono forze apparenti sull'acqua.

1.2 Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell descrivono in maniera completa i fenomeni elettromagnetici. Sebbene lo stesso Maxwell ritenesse che la luce si propaga in un mezzo non ben identificato, l'etere (che veniva assimilato allo spazio assoluto di Newton), le equazioni dell'elettromagnetismo e l'espressione della forza di Lorentz non risultano invarianti per trasformazioni di Galilei. Vedremo in seguito che la forma delle equazioni di Maxwell si conserva solo se si accettano i postulati della teoria della relatività ristretta di Einstein; ovvero è necessario applicare le trasformazioni di Lorentz per trasportarle correttamente da un dato sistema di riferimento ad uno in moto rettilineo uniforme.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti sono riportate

di seguito:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono rispettivamente i campi elettrico e induzione magnetica; μ_0 e ε_0 sono rispettivamente la permeabilità magnetica del vuoto e la costante dielettrica del vuoto.

Utilizzando la nota identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}), \tag{1.4}$$

dalle equazioni di Maxwell si ricava:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\
 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0. \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

L'equazione (1.5) è chiamata equazione delle onde e descrive un'onda che si propaga con velocità costante $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \cong 3 \times 10^8 m/s$. Rimane da chiarire rispetto a che cosa l'onda elettromagnetica viaggia a velocità c .

In analogia con le onde elastiche, si è ritenuto che l'onda elettromagnetica viaggiasse con velocità c rispetto ad un mezzo chiamato *etere*, e che pertanto la luce dovesse viaggiare con velocità diverse nei sistemi di riferimento in moto rispetto all'etere, rispettando la legge di addizione delle velocità di Galilei. Il sistema di riferimento dell'etere è stato inizialmente identificato con lo spazio assoluto di Newton² ed è stato oggetto di ricerca teorica e sperimentale sin dalla formulazione della teoria delle onde elettromagnetiche.

La velocità di propagazione della luce c è stata misurata con sempre maggiore precisione nel corso degli anni. Il suo valore è $c = 2.99792458 \cdot 10^8 m/s$

²Secondo Aristotele (384 - 322 a.C.) l'universo è la somma degli spazi occupati dai corpi. Egli sostiene che la terra si trova al centro di un Universo finito circoscritto da una sfera che contiene tutti i corpi dell'Universo. Al di là di tale sfera non c'è nulla, né vuoto né estensione.

e risulta, entro i limiti dell'errore sperimentale, costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Come vedremo, sarà l'esperienza di Michelson-Morley (paragrafo 1.3) a porre fine alle speculazioni sull'esistenza dell'etere e ad aprire la strada a nuove teorie. Per descrivere l'esperimento occorre richiamare i concetti base dell'interferenza tra due onde piane.

Onde piane e interferenza

Si dimostra che un qualsiasi campo elettromagnetico che si propaga in un qualsiasi mezzo si può esprimere come sovrapposizione (sommatoria ovvero integrale) di onde piane [3]. In realtà un'onda piana è una rappresentazione di un campo ideale che non può esistere fisicamente; tuttavia essa rappresenta con buona approssimazione i campi lontani dalla sorgente. Un'onda piana nel vuoto si propaga con velocità c e ha la seguente espressione matematica, soluzione dell'equazione (1.5):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} . \quad (1.6)$$

Ad esempio, per un'onda piana che si propaga nella direzione dell'asse x (considerando un campo elettrico polarizzato linearmente lungo l'asse y), l'equazione (1.6) diventa:

$$\mathbf{E} = E_{0y} e^{j(kx-\omega t)} \hat{\mathbf{j}} = E_{0y} e^{jk(x-ct)} \hat{\mathbf{j}} , \quad (1.7)$$

con:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} . \quad (1.8)$$

Newton assume l'esistenza di uno spazio infinito ed assoluto identificabile con uno spazio geometrico euclideo. Egli ritiene tuttavia che le stelle siano distribuite in modo uniforme in una regione finita dello spazio formando un'agglomerazione finita e stabile come la nostra Galassia. Nella concezione di Newton pertanto l'Universo è finito e organizzato dalla gravitazione nel contesto di uno spazio infinito e un tempo infinito.

Leibniz (1646 - 1716) concorda sulla estensione infinita dello spazio, ma ne contesta l'assolutezza, in quanto si ritiene che esso sia legato all'esistenza dei corpi. Inoltre ritiene che le stelle siano distribuite in modo uniforme nello spazio infinito, considerando inamissibile un mondo finito necessariamente sferico con un centro che avrebbe una posizione privilegiata nell'Universo.

Consideriamo ora due onde piane monocromatiche alla stessa frequenza con un generico sfasamento:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{01} \exp [j(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega t)] \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_{02} \exp [j(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega t + \varphi_{12})] ,\end{aligned}\quad (1.9)$$

dove \mathbf{E}_{01} e \mathbf{E}_{02} rappresentano il vettore campo elettrico; $\omega = 2\pi f$ e f è la frequenza delle onde; \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 sono i vettori di propagazione e \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono i vettori posizione centrati nelle ipotetiche sorgenti (vedi figura 1.3). Supponiamo inoltre che le due onde siano mutualmente coerenti e che lo sfasamento tra esse si mantenga costante ($\varphi_{12} = cost$).

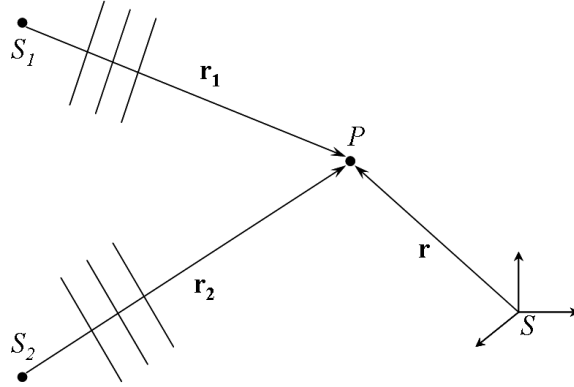


Figura 1.3: *Interferenza tra due onde piane*

Il campo elettrico risultante nel punto P è semplicemente la somma vettoriale di quelli delle due onde piane (principio di sovrapposizione degli effetti). Dalla teoria dei campi elettromagnetici è noto che l'intensità media del campo elettromagnetico risulta data da [2]:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T |E|^2 dt = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta ,$$

dove θ è dato da:

$$\theta = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \varphi_{12} . \quad (1.10)$$

Il termine $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta$ è detto termine d'interferenza, e si nota che al variare di θ l'intensità del campo elettrico può essere maggiore o minore della somma delle intensità delle singole onde.

Il termine θ rappresenta la differenza di fase delle due onde nel punto P e dipende dalle variabili spaziali, oltre che dall'eventuale sfasamento temporale

tra le due onde, e determina l'interferenza (costruttiva o distruttiva) tra di esse.

Se lo sfasamento φ_{12} non è costante, ma varia col tempo, le due onde non sono coerenti e risulta che il valor medio di $\cos \theta$ è zero, ovvero non si ha interferenza. L'interferenza è nulla anche se le due onde sono perpendicolari tra loro.

1.3 Esperimento di Michelson-Morley

Nel 1887 A. A. Michelson ed il suo collega E. W. Morley, con un esperimento diventato famoso e ripetuto per anni in seguito, cercarono di misurare le variazioni di velocità della luce in vari sistemi di riferimento. Essi usarono uno strumento chiamato interferometro che doveva provare l'esistenza dell'etere, mezzo "immateriale", che si ipotizzava solidale con le stelle fisse. La Terra si muove intorno al Sole ad una velocità v di circa 30 km/sec , quindi, se l'etere è immobile rispetto alle stelle fisse, si dovrebbe poter misurare tramite esperimenti ottici un "vento d'etere", ovvero la differenza nella velocità dell'etere rispetto alla terra. La figura (1.4) mostra uno schema piuttosto semplificato dell'interferometro reale. La sorgente emette un raggio collimato di luce monocromatica con lunghezza d'onda λ . Il raggio incide su uno specchio semitrasparente inclinato di 45° rispetto al raggio luminoso: una parte di questo, che indichiamo con r_1 , viene trasmessa verso lo specchio S_1 e una parte, r_2 , viene riflessa verso lo specchio S_2 .

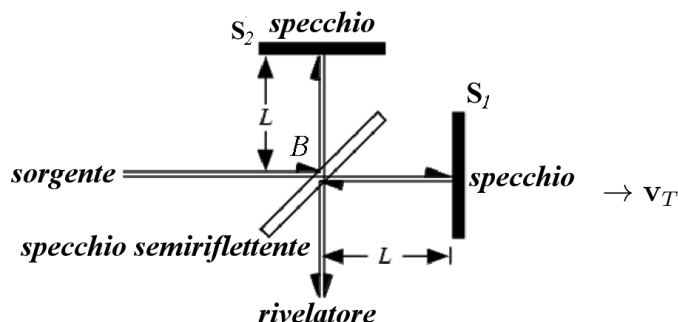


Figura 1.4: Schema semplificato dell'interferometro

I due raggi r_1 , r_2 compiono rispettivamente i due percorsi BS_1 e BS_2 , entrambi di lunghezza L e vengono riflessi dai due specchi per tornare in B . A

questo punto il raggio r_1 viene riflesso dallo specchio semitrasparente, mentre il raggio r_2 viene trasmesso. In questo modo entrambi i raggi raggiungono un rivelatore, che riceve così due raggi luminosi fra di loro coerenti.

L'apparato è montato su un supporto orizzontale rigido, che nell'esperimento originale era un blocco di granito fatto galleggiare in una vasca piena di mercurio in modo da poter essere ruotato attorno a un asse verticale passante per il centro dello specchio B .

Supponendo valida l'ipotesi dell'etere fermo rispetto al sole e che l'apparato sperimentale sia orientato con il braccio BS_1 parallelo alla velocità \mathbf{v}_T della Terra, il raggio r_1 si muove con velocità $c - v$ nel tratto BS_1 , e con velocità $c + v$ nel tratto S_1B . Il tempo t_1 impiegato da r_1 per compiere il tragitto di andata e ritorno (essendo L la lunghezza del percorso) è dunque:

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = L \frac{2c}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (1.11)$$

Il raggio r_2 , invece, si muove in direzione ortogonale alla velocità \mathbf{v} . Il tratto effettivamente percorso dalla luce (tratto BS_2) non è dunque di lunghezza L , ma di lunghezza $\left[L^2 + \left(v \frac{t_2}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$, come mostrato in figura (1.5). Pertanto il tempo t_2 impiegato dal raggio r_2 per compiere il tragitto di andata e ritorno è:

$$t_2 = \frac{2}{c} \left[L^2 + \left(v \frac{t_2}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

da cui si ricava:

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.13)$$

Sottraendo si ottiene la differenza dei tempi di arrivo dei due raggi sul rivelatore:

$$\begin{aligned} \Delta t = t_1 - t_2 &= \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cong \\ &= \frac{2L}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{L v^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ciò significa che in uno stesso intervallo di tempo, i due raggi compiono cammini ottici diversi dando luogo ad un fenomeno di interferenza con una differenza di fase pari a:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \cong 2\pi \frac{L v^2}{\lambda c^2}. \quad (1.15)$$

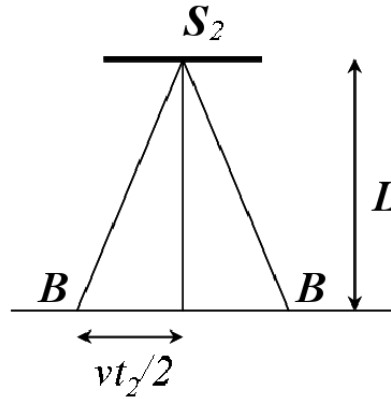


Figura 1.5: *Percorso reale del raggio di luce r_2*

Operando una rotazione di $\pi/2$ dell'intero sistema, complessivamente si dovrebbe verificare uno spostamento delle frange di interferenza dovuto alla diversa orientazione dello strumento rispetto al moto della Terra. Lo spostamento in fase delle due onde, che si manifesta come spostamento delle frange d'interferenza, deve essere pari a $2\Delta\theta$.

Michelson e Morley realizzarono un cammino ottico L di circa 11 m , e utilizzando luce di lunghezza d'onda $\lambda = 5.5 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ e $v/c = 10^{-4}$, dalla (1.15) si ottiene uno spostamento delle frange d'interferenza pari a:

$$\frac{2\Delta\theta}{2\pi} = \frac{2L}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2 \times 11\text{ m}}{5.5 \cdot 10^{-7}\text{ m}} 10^{-8} = 0.4. \quad (1.16)$$

L'esperimento venne ripetuto più volte durante il giorno e la notte, per tener conto della rotazione della terra su se stessa, più volte durante le stagioni, per tener conto della rivoluzione della terra intorno al sole. Il risultato era sempre lo stesso: nessuno spostamento delle frange di interferenza (il dispositivo aveva una sensibilità di $1/100$ di frangia), quindi nessun moto variabile della terra attraverso l'etere. Il risultato negativo fu la base sperimentale più importante che portò ad escludere l'esistenza di un riferimento (assoluto) riconducibile all'etere.

1.4 Tentativi di conservare il concetto di etere

Per “salvare l’etere” e spiegare tuttavia il risultato di Michelson-Morley, gli scienziati proposero varie ipotesi.

Contrazione di Lorentz-Fitzgerald: l’ipotesi proposta da Fitzgerald e poi elaborata da Lorentz, fu che tutti i corpi subiscono una contrazione nella direzione del moto relativo, con velocità v , rispetto all’etere stazionario di un fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Lorentz riuscì a rendere conto di tale contrazione nella sua teoria elettronica della materia. Tale teoria, basata sull’ipotesi dell’esistenza dell’etere, non fu confermata sperimentalmente.

Trascinamento dell’etere: questa ipotesi assumeva che il riferimento dell’etere fosse localmente solidale a tutti i corpi di massa finita, cioè fosse trascinato da questi corpi. Ciò spiegava l’assenza del “vento d’etere” che si voleva rilevare con l’esperimento di Michelson-Morley; ma tale teoria era contraddetta da effetti evidenti, tra cui l’aberrazione stellare (vedi paragrafo 2.5). Se l’etere fosse trascinato dalla terra, e quindi in riposo rispetto a essa, per osservare una stella fissa allo zenith il telescopio dovrebbe essere puntato verticalmente, ossia la luce non subirebbe alcuna aberrazione.

Teoria emissiva: si ipotizzò che la velocità di un’onda luminosa dipendesse dal moto della sorgente piuttosto che dallo stato di moto del mezzo in cui si propaga la luce, cioè dell’etere. Tale teoria fu contraddetta da esperimenti che si basavano sulle osservazioni delle stelle doppie.

La contrazione di Lorentz

Il fattore di contrazione di Lorentz appare in modo naturale quando si confronta il campo elettromagnetico generato da una carica elettrica puntiforme in moto con velocità costante v con quello di una carica a riposo. A tale scopo consideriamo una carica q che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ rispetto al sistema $S \equiv Oxyz$. Le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti sono:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.17}$$

Dalla terza equazione di Maxwell si ha che:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (1.18)$$

dove \mathbf{A} rappresenta il potenziale vettore. Sostituendo la (1.18) nella seconda equazione di Maxwell, si ottiene che:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 , \quad (1.19)$$

e pertanto³

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi . \quad (1.20)$$

Sostituendo la (1.18) e la (1.20) nella IV equazione di Maxwell si ottiene, tenendo conto della nota identità vettoriale (1.4):

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) , \quad (1.22)$$

e applicando la *condizione di Lorenz*⁴:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 , \quad (1.23)$$

si ha⁵

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} . \quad (1.24)$$

Sostituendo la (1.20) nella I equazione di Maxwell, si ottiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\nabla \phi) - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.25)$$

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (1.26)$$

³È noto che ogni campo vettoriale a rotazione nulla ammette un potenziale scalare da cui è derivabile attraverso la (1.20)

⁴Fisico danese del XIX secolo

⁵Il potenziale vettore \mathbf{A} non è univocamente determinato attraverso l'eq. (1.18), e la sua espressione può essere vincolata attraverso l'eq. (1.23)

che per la (1.23) diventa:

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} . \quad (1.27)$$

Osserviamo che nel caso in cui la carica è a riposo nel sistema S' , ϕ' dovrà soddisfare invece la seguente:

$$\nabla_t'^2 \phi' + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0} , \quad (1.28)$$

con

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} . \quad (1.29)$$

Nel sistema S' , il potenziale ϕ' generato dalla carica q è centrosimmetrico (simmetria sferica). Il potenziale della carica in moto nel sistema S può essere espresso come

$$\phi = \phi(x - vt) . \quad (1.30)$$

Esprimendo il laplaciano in coordinate cartesiane, dalla 1.27 si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (1.31)$$

e con le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} \xi &= x - vt \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v \frac{\partial \phi}{\partial \xi} , \quad (1.33)$$

si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.34)$$

$$\nabla_t^2 \phi + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (1.35)$$

avendo posto:

$$\beta = \frac{v}{c} . \quad (1.36)$$

Dalla (1.35) si giunge a:

$$\nabla_t^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (\gamma \xi)^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (1.37)$$

dove γ rappresenta il fattore relativistico definito da

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.38)$$

che per la definizione di β in (1.36) risulta essere sempre $\gamma > 1$.

La (1.37) rappresenta l'equazione cui deve soddisfare il potenziale ϕ osservato dal sistema S . Confrontando le equazioni differenziali che governano il potenziale nei due casi, la dipendenza spaziale deve soddisfare

$$\begin{cases} z' = z \\ y' = y \\ x' = \gamma\xi = \gamma(x - vt) \end{cases} \quad (1.39)$$

Fissiamo un tempo di osservazione, ad esempio $t = 0$. Dall'ultima uguaglianza delle (1.39) risulta: $x = x'/\gamma$, ossia si osserva una contrazione lungo l'asse del moto dell'elettrone e pertanto la mappa di campo elettrico, osservato in S , muta la sua distribuzione (vedi figura 1.6). Il potenziale ϕ , conseguentemente, da sferico che è in S' , assume una forma ellissoidale. Poichè vale la relazione (1.20), si trova che anche la mappa di \mathbf{E} si contrae similmente.

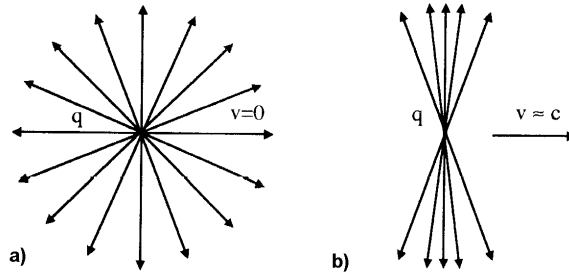


Figura 1.6: *Mappa di campo dell'elettrone in S' (a) e in S (b)*

In conclusione, le leggi dell'elettromagnetismo applicate a cariche in moto mostrano che i campi e i potenziali sono deformati a causa del moto stesso, e tale deformazione è interpretabile assumendo una contrazione dello spazio per le cariche in moto rispetto alle cariche in quiete.

Capitolo 2

La cinematica relativistica

2.1 Introduzione allo Spazio-Tempo di Einstein

I due principi fondamentali, dai quali può essere dedotta l'intera teoria della relatività ristretta¹, sono:

- Principio di Relatività:
le leggi della fisica sono invarianti da un sistema di riferimento inerziale a un altro sistema di riferimento inerziale.

¹Nel 1918 Albert Einstein definì il 'principio di Mach' secondo il quale l'inerzia di un corpo è determinata da tutti gli altri corpi dell'Universo e, pertanto, l'origine dell'inerzia è la gravitazione. Ernst Mach aveva esposto tali considerazioni nel 1883 invalidando il concetto di spazio assoluto, stabilito da Isaac Newton. Secondo Mach le forze centrifughe originate dalla rotazione del secchio (cfr. figura 1.2) sono dovute al moto rotatorio 'relativo' dell'acqua rispetto alla distribuzione delle masse celesti lontane. Gli stessi effetti centrifughi si otterrebbero infatti sia attraverso la rotazione del secchio e l'immobilità delle masse celesti lontane sia attraverso la rotazione di tali masse celesti e l'immobilità del secchio. Ciò che cambia sono i due diversi sistemi di riferimento che tale considerazione implica. I medesimi effetti centrifughi prodotti nell'esperimento del secchio sono dunque relativi e non è possibile attribuirvi cause assolute quali il moto o lo spazio assoluto evocati da Newton.

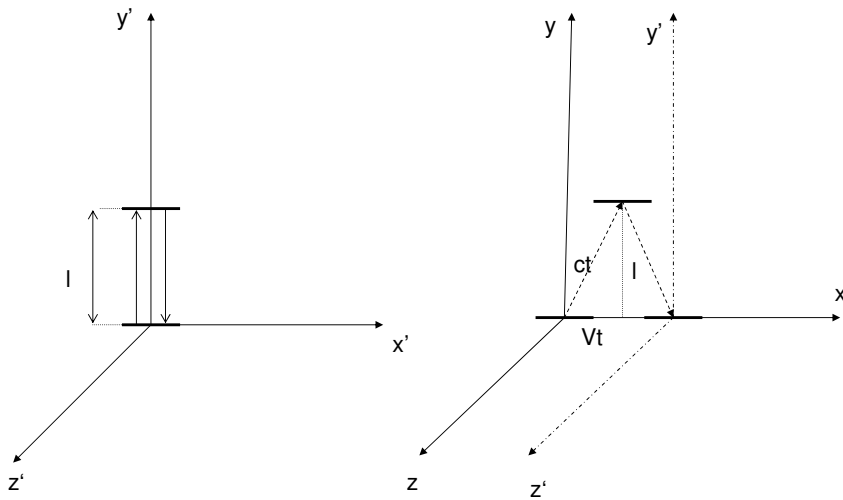


Figura 2.1: *Periodo di oscillazione di un raggio di luce tra due specchi osservato da un s.r.i. solidale agli specchi e da un altro s.r.i. rispetto al quale gli specchi si muovono con velocità V*

- Principio di costanza della velocità della luce:
la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore (c) in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Il principio di relatività ci permette di abbandonare l'idea dell'esistenza di un sistema di riferimento assoluto. Infatti essendo impossibile stabilire, per mezzo di una qualunque misura fisica, se un sistema sia in quiete o in moto assoluto, ha senso solo considerare il moto di un sistema relativo ad altri sistemi.

Con la proprietà di invarianza della velocità della luce, si abbandona anche il concetto di tempo assoluto. Le conseguenze sono sorprendenti, infatti la misura del tempo, inteso come ritmo degli orologi, e la misura della lunghezza dipendono dall'osservatore, ovvero dallo stato di moto relativo tra l'osservatore e gli elementi misurati. Si può facilmente vedere che l'unità di tempo non è la stessa in due sistemi di riferimento in moto relativo prendendo in esame un fenomeno periodico: un raggio di luce nel vuoto intrappolato tra due specchi, posti a distanza l uno dall'altro, e in moto con velocità costante V rispetto ad un osservatore in S (vedi figura 2.1).

Sia T' il periodo del fenomeno, cioè il tempo impiegato dal raggio di luce per partire e ritornare sullo stesso specchio in S' . Un osservatore in quiete in S' , misura un periodo $T' = 2l/c$. Per un osservatore in S , il tempo t necessario alla luce per arrivare sul secondo specchio si ottiene tenendo conto

del moto degli specchi:

$$c^2 t^2 = V^2 t^2 + l^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{l}{c\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \frac{l}{c}. \quad (2.1)$$

Essendo $t = T/2$, otteniamo:

$$T = 2\gamma \frac{l}{c} = \gamma T', \quad (2.2)$$

cioè il periodo osservato su S è più lungo di un fattore γ rispetto a quello osservato su S' . Il periodo di un orologio in moto risulta dunque più lungo di un fattore γ , pertanto l'orologio scandisce il tempo più lentamente.

Parallelamente al fenomeno di dilatazione del tempo si ha quello di contrazione della lunghezza. Per chiarire questo punto consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' con S' in moto con velocità V rispetto ad S parallelamente agli assi x e x' . I due orologi in S e S' sono sincronizzati e posti ad una estremità di una sbarra di lunghezza l ferma in S , come mostrato in figura 2.2 A. Nell'istante $t_A = t'_A = 0$ il sistema S' dotato di moto rettilineo uniforme con velocità V verso l'estremo destro della sbarra ha l'origine O' coincidente con O . Quando il sistema S' è arrivato all'estremo destro della sbarra (evento B), l'orologio in S segna un tempo $t_B = l/V$, mentre l'orologio in S' segna un tempo $t'_B = t_B/\gamma = l/(\gamma V)$.

Dal punto di vista di un osservatore in quiete su S' , il sistema S e la sbarra si muovono con velocità $-V$ (per il principio di relatività). Il suo orologio segna un tempo $t'_B = t_B/\gamma$ e misurerà la lunghezza della sbarra l' come la distanza percorsa dal sistema S in moto con velocità $-V$, in un tempo t'_B :

$$l' = V t'_B = \frac{l}{\gamma}. \quad (2.3)$$

L'osservatore in S' misurerà pertanto una lunghezza minore per la sbarretta.

2.2 Le Trasformazioni di Lorentz

È evidente che le relazioni spazio-temporali tra due sistemi di riferimento inerziali in moto non possono essere più descritte dalle trasformazioni di Galilei. Al fine di ricavare le nuove trasformazioni, assumiamo che lo spazio-tempo sia omogeneo e scegliamo due sistemi tali che gli assi x e x' siano sovrapposti e che la velocità relativa sia diretta parallelamente a questi, come

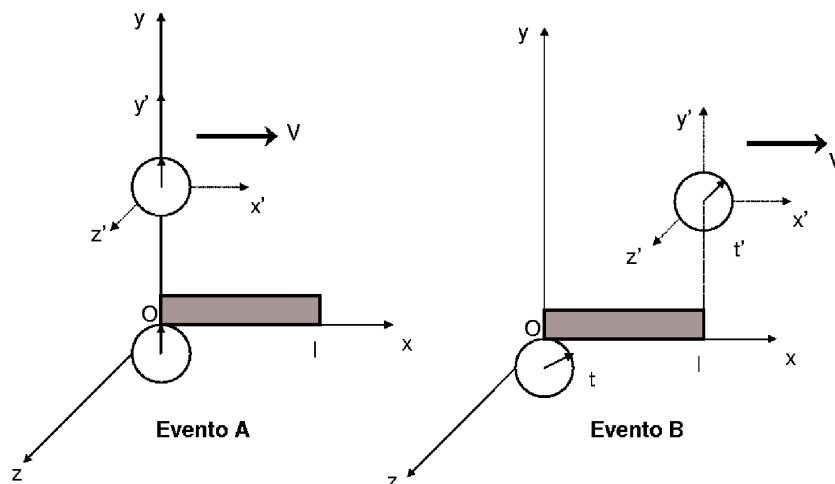


Figura 2.2: *Contrazione delle lunghezze*

in figura (2.3). Assumiamo, inoltre, che le trasformazioni di coordinate siano invarianti rispetto alla inversione simultanea del verso degli assi y, z, y', z' :

$$t, x, y, z; t', x', y', z' \mapsto t', x', -y', -z'; t, x, -y, -z. \quad (2.4)$$

Questo è equivalente a dire che S e S' sono invarianti rispetto all'inversione dei piani xz e xy .

Trasformazione delle coordinate

L'ipotesi di omogeneità impone che le relazioni siano lineari; avremo quindi[4]:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ricaviamo ora i sedici coefficienti a_{ij} .

Per le ipotesi sui due sistemi di riferimento, i due assi x e x' sono sempre sovrapposti; quindi quando $y = 0$ e $z = 0$, deve sempre risultare $y' = 0$ e

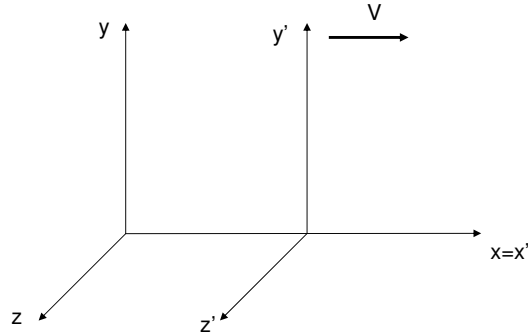


Figura 2.3: Sistemi di riferimento inerziali per i quali valgono le trasformazioni di Lorentz

$z' = 0$. Sostituendo nelle (2.5) otteniamo:

$$\begin{cases} a_{21}x + a_{24}t = 0 \\ a_{31}x + a_{34}t = 0 . \end{cases} \quad (2.6)$$

Dovendo queste equazioni valere per qualunque scelta di x e t , i coefficienti a_{21} , a_{24} , a_{31} , a_{34} risultano essere necessariamente nulli.

Allora le formule di trasformazione per y e z sono del tipo:

$$\begin{cases} y' = a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{32}y + a_{33}z . \end{cases} \quad (2.7)$$

Osserviamo che anche i piani $x - y$ (caratterizzato da $z = 0$) e $x - z$ (caratterizzato da $y = 0$) risultano essere sempre coincidenti rispettivamente ai piani $x' - y'$ ($z' = 0$) e $x' - z'$ ($y' = 0$). otteniamo allora:

$$\begin{cases} a_{23}z = 0 \\ a_{32}y = 0 , \end{cases} \quad (2.8)$$

che mostra come anche i coefficienti a_{23} e a_{32} devono essere nulli.

A questo punto abbiamo:

$$\begin{cases} y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z . \end{cases} \quad (2.9)$$

Applicando l'inversione xz alla prima delle due (2.9) otteniamo:

$$\begin{cases} y' = a_{22}y \\ y = a_{22}y' , \end{cases} \quad (2.10)$$

che ci porta a concludere che $a_{22} = \pm 1$; osservando che per $V = 0$ abbiamo $y' = y$ otteniamo infine $a_{22} = 1$. Con un ragionamento analogo, considerando l'inversione xy , otteniamo $a_{33} = 1$.

Allora le prime due equazioni cercate sono:

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z . \end{cases} \quad (2.11)$$

Per come sono stati scelti i sistemi di riferimento, c'è simmetria rispetto all'asse x sia in direzione y che z , per cui vale:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z + a_{14}t ,$$

da cui si ottiene:

$$a_{12}y + a_{13}z = 0 . \quad (2.12)$$

dovendo la (2.12) valere per qualunque y e z , i coefficienti a_{12} e a_{13} devono essere nulli.

Con un ragionamento analogo dimostriamo che anche i coefficienti a_{42} e a_{43} sono nulli. A questo proposito osserviamo che il piano individuato da $x' = 0$ è coincidente con quello individuato da $x = Vt$, quindi avremo:

$$x' = a_{11}(x - Vt) . \quad (2.13)$$

Le equazioni sono quindi ridotte a:

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t . \end{cases} \quad (2.14)$$

Per ricavare gli ultimi tre coefficienti, sfruttiamo il principio di costanza della velocità della luce. Prendiamo in considerazione le equazioni (2.37) che tratteremo nella sezione 2.4 e applichiamo le trasformazioni (2.14) alla seconda delle due, ottenendo:

$$a_{11}^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2 = 0 , \quad (2.15)$$

da cui sviluppando i quadrati e raccogliendo abbiamo:

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(V a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44})xt - (c^2 a_{44}^2 - V^2 a_{11}^2)t^2 = 0 . \quad (2.16)$$

Per il principio di relatività i coefficienti di questa equazione devono essere uguali a quelli della prima delle (2.37); allora otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \\ Va_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} = 0 \\ c^2 a_{44}^2 - V^2 a_{11}^2 = c^2 . \end{cases} \quad (2.17)$$

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \\ a_{41} = -\frac{V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = -\gamma \frac{V}{c^2} \\ a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma , \end{cases} \quad (2.18)$$

che, sostituite nel sistema (2.14), danno le trasformazioni di Lorentz per le coordinate spazio-temporali:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) . \end{cases} \quad (2.19)$$

Per trovare le trasformazioni delle coordinate di S in funzione di quelle di S' , basta considerare che S si muove con velocità relativa $-V$ rispetto a S' , ottenendo allora:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) . \end{cases} \quad (2.20)$$

Trasformazione delle velocità

Per ottenere la trasformazione della componente della velocità lungo x , differenziamo le funzioni $x'(x, t)$ e $t'(x, t)$:

$$dx' = \gamma(dx - Vdt) \quad ; \quad dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right) , \quad (2.21)$$

e facciamone il rapporto:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}. \quad (2.22)$$

Analogamente, per le componenti lungo y e z :

$$dy = dy' \Rightarrow v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)}. \quad (2.23)$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)}. \quad (2.24)$$

Come per le trasformazioni delle coordinate, per trovare le relazioni delle componenti della velocità di S in funzione di quelle di S' , basta cambiare segno alla velocità relativa:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \quad (2.25)$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}, \quad (2.26)$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}. \quad (2.27)$$

Verifichiamo che, per mezzo delle trasformazioni ricavate, la velocità della luce si mantiene costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Consideriamo una torcia su di un carrello (sistema S') che si muove con velocità V rispetto ad un osservatore in quiete in S . La luce della torcia viene emessa con velocità c rispetto al carrello, sia pertanto $v'_x = c$; allora sostituendo nella (2.25), si ha:

$$v_x = \frac{c + V}{\left(1 + \frac{cV}{c^2}\right)} = \frac{c + V}{\frac{c+V}{c}} = c. \quad (2.28)$$

2.3 Simultaneità e Misure Spazio-Tempo

Nella relatività è rilevante il concetto di simultaneità; consideriamo in S due orologi sincronizzati e posti a distanza l l'uno dall'altro. Un'onda elettromagnetica originata da una sorgente solidale con S , a distanza $l/2$ dagli orologi, avente velocità c , li raggiungerà simultaneamente (figura 2.4):

$$t_A = t_B = \frac{l}{2c} \rightarrow t_B - t_A = 0. \quad (2.29)$$

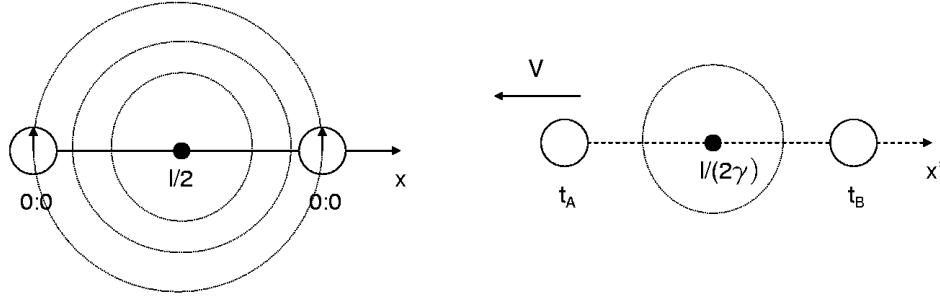


Figura 2.4: Sincronizzazione degli orologi in S e contrazione della lunghezza in S'

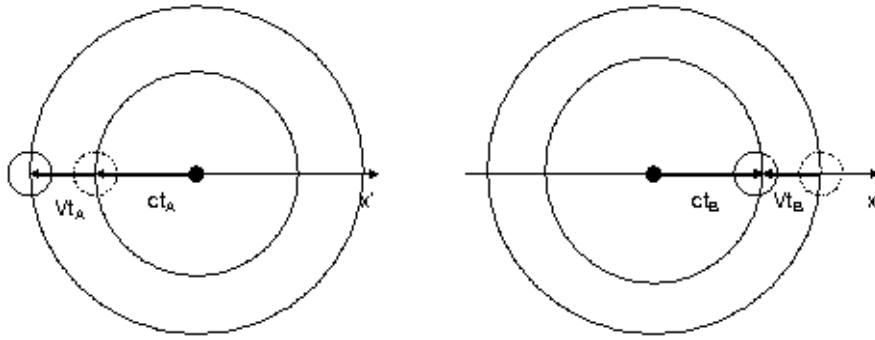


Figura 2.5: Determinazione del $\Delta t'$ in S'

Per un osservatore in S' , che si muove con velocità V rispetto ad S diretta lungo x , per la contrazione delle lunghezze, si avrà (figura 2.5):

$$ct'_A = \frac{l}{2\gamma} - Vt'_A \Rightarrow t'_A = \frac{l}{2\gamma(c+V)}, \quad (2.30)$$

$$ct'_B = \frac{l}{2\gamma} + Vt'_B \Rightarrow t'_B = \frac{l}{2\gamma(c-V)}, \quad (2.31)$$

da cui:

$$\begin{aligned} t'_B - t'_A &= \frac{l}{2\gamma} \left[\frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V} \right] = \frac{l}{2\gamma} \frac{2V}{c^2 - V^2} = \\ &= \frac{lV}{c^2\gamma(1 - \frac{V^2}{c^2})} = \frac{lV}{c^2\gamma} \gamma^2 = \gamma \left[\frac{lV}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

L'equazione (2.32), come trasformazioni di Lorentz, ci permette di comprendere la dipendenza del tempo dalla posizione presente, dovuta al fatto che gli eventi simultanei in S , non lo sono per un osservatore in S' e viceversa.

La teoria della relatività può essere interpretata come una teoria della misura di eventi osservabili; cioè possiamo considerare ogni evento fisico come una misura spazio-temporale.

Lunghezza propria e tempo proprio

Per chiarire meglio questo concetto, introduciamo l'intervallo di *tempo proprio* misurato da un orologio in quiete in un s.r.i. e la *lunghezza propria*, misurata per un oggetto in quiete in un s.r.i.

Consideriamo un orologio in quiete in un sistema di riferimento S' che si muove con velocità costante V rispetto ad un s.r.i. S (figura 2.6). L'orologio

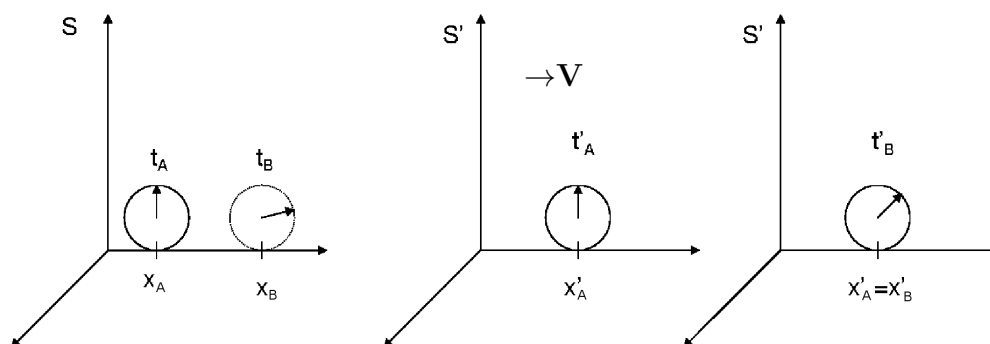


Figura 2.6: *L'orologio misura un intervallo di tempo non proprio in S e proprio in S'*

in quiete in S' misurerà un intervallo di tempo proprio $\Delta t'_p = t'_B - t'_A$. L'osservatore in S misura un intervallo di tempo non proprio, essendo l'orologio in moto. Dalle trasformazioni di Lorentz, posto $\beta = v/c$ otteniamo:

$$t_B = \gamma \left[t'_B + \frac{\beta}{c} x'_B \right] \quad ; \quad t_A = \gamma \left[t'_A + \frac{\beta}{c} x'_A \right] \quad , \quad (2.33)$$

ed essendo $x'_B = x'_A$:

$$\Delta t = t_B - t_A = \gamma [t'_B - t'_A] = \gamma \Delta t'_p \quad . \quad (2.34)$$

in cui ritroviamo la proprietà della dilatazione del tempo

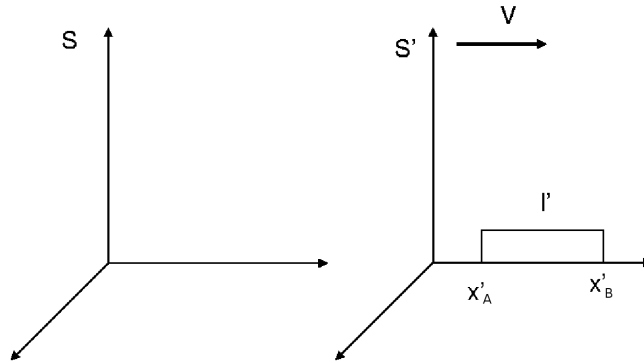


Figura 2.7: La lunghezza propria della sbarra è l' in quanto l'asta si muove solidale con il s.r.i. S'

La lunghezza di un oggetto si dice propria se è misurata in un s.r.i. in cui questo è a riposo.

Una sbarra a riposo in S' (figura 2.7) ha una lunghezza propria l'_p , mentre un osservatore nel s.r.i. S , misura una lunghezza diversa, infatti per mezzo delle trasformazioni di Lorentz, otteniamo:

$$x'_B = \gamma[x_B - \beta ct_B] \quad ; \quad x'_A = \gamma[x_A - \beta ct_A], \quad (2.35)$$

per misurare la lunghezza della sbarra in S si devono considerare le posizioni x_A e x_B simultaneamente, cioè nello stesso istante $t_A = t_B$:

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_A - x_B) \quad \Rightarrow \quad l'_p = \gamma l. \quad (2.36)$$

È chiaro che due eventi simultanei per un osservatore, non lo sono per un altro osservatore che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, e che, se cambia la simultaneità, cambia anche il risultato di una misura. Non esistono, dunque, né una simultaneità né una misura assoluta; queste non possono essere altro che relative, e variare a seconda della scelta del sistema

di riferimento².

2.4 Invariante Relativistico e Spazio di Minkowski

Esaminiamo ora una conseguenza del principio di costanza della velocità della luce. Prendiamo in esame due sistemi di riferimento inerziali S e S' ; S' scorre su S di moto rettilineo uniforme con velocità V lungo l'asse x e coincide con S per $t = 0$. Nell'istante $t = 0$ viene generata in $O \equiv O'$ un'onda elettromagnetica sferica. Nei due sistemi, per il fronte d'onda vale:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (2.37)$$

²La relazione tra l e l'_p può essere ricavata ovviamente partendo anche dalle trasformazioni inverse:

$$x_A = \gamma(x'_A + Vt'_A)$$

$$x_B = \gamma(x'_B + Vt'_B)$$

da cui ricaviamo

$$(x_B - x_A) = \gamma(x'_B - x'_A) + \gamma V(t'_B - t'_A),$$

ovvero

$$l = \gamma l'_p + \gamma V(t'_B - t'_A).$$

In questo caso occorre ricordare che la misura della lunghezza l va effettuata con una misura simultanea dei suoi estremi, ad esempio nell'istante $t_A = t_B = 0$. Sappiamo però che una misura simultanea in S non lo è in S' , infatti agli istanti t_A e t_B corrispondono

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{V}{c^2} x_A \right)$$

$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{V}{c^2} x_B \right)$$

da cui ricaviamo

$$t'_B - t'_A = -\gamma \frac{V}{c^2} l,$$

che da per la lunghezza l :

$$l = \gamma l'_p - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} l,$$

da cui $\gamma l = l'_p$.

Quindi su entrambi i sistemi di riferimento si osserva un fronte d'onda sferico, nonostante il moto relativo.

Consideriamo le quantità:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2, \quad (2.38)$$

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2, \quad (2.39)$$

e osserviamo che:

$$\begin{aligned} s^2 &= \gamma^2 (x' + Vt')^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \gamma^2 \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right)^2 = \\ &= \gamma^2 x'^2 (1 - \beta^2) + y'^2 + z'^2 - \gamma^2 c^2 t'^2 (1 - \beta^2) = \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = s'^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Quindi s^2 è invariante per ogni evento, rispetto alle trasformazioni relativistiche. Se rappresentiamo l'evento con i vettori dello spazio-tempo:

$$\mathbf{s} = (x, y, z, ict) \quad , \quad \mathbf{s}' = (x', y', z', ict') \quad , \quad (2.41)$$

si ha che s^2 è il modulo quadro di tali vettori (in uno spazio complesso ma con prodotto scalare standard), e questi sono legati dalla relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

o, in scrittura compatta:

$$\mathbf{s} = [\lambda] \mathbf{s}', \quad (2.43)$$

dove $[\lambda]$ è una matrice ortogonale che comporta una rotazione dello spazio-tempo, e conserva il modulo dei vettori (una matrice $[A]$ è ortogonale se $[A] \cdot [A]^T = [I]$).

Spazio di Minkowski

Per semplicità, ma senza perdere di generalità, restringiamo lo studio a spazi bidimensionali e consideriamo il piano che ha in ascissa le lunghezze (x) e in ordinata i tempi (moltiplicati per c) come mostrato in figura 2.8, tale piano è chiamato “Spazio di Minkowski”. La linea universo è la rappresentazione del moto di una particella nello spazio-tempo. Per esempio la linea universo di un raggio di luce nel vuoto è la retta $x = ct$, mentre le linee universo di

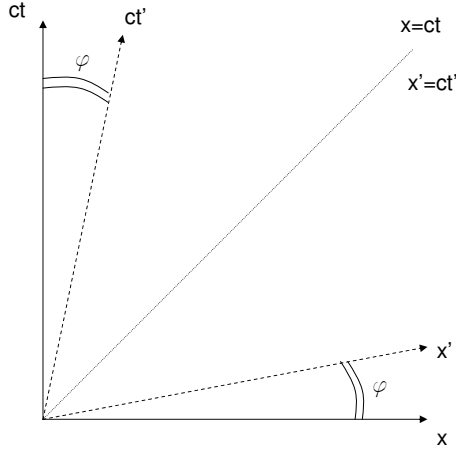


Figura 2.8: *Piano di Minkowski*

oggetti dotati di massa devono avere una inclinazione minore di questa retta, rispetto all'asse ct in quanto, come vedremo, non è possibile che una massa abbia velocità maggiore di quella della luce.

Nel piano di Minkowski le trasformazioni di Lorentz si riducono a:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) . \end{cases} \quad (2.44)$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} , \quad (2.45)$$

Possiamo trovare nel piano (x, ct) gli assi che rappresentano il sistema di riferimento S' , imponiamo rispettivamente $ct' = 0$ e $x' = 0$:

$$\text{asse } x' : ct' = 0 \Rightarrow \gamma(ct - \beta x) = 0 \Rightarrow ct = \beta x , \quad (2.46)$$

$$\text{asse } ct' : x' = 0 \Rightarrow x - \beta(ct) = 0 \Rightarrow ct = \frac{x}{\beta} . \quad (2.47)$$

Quindi gli assi x' e ct' ruotano rispetto agli assi x e ct di un angolo φ (rispettivamente in senso orario e antiorario) tale che $\tan \varphi = \beta$. Lo spazio-tempo e la metrica in S' sono quindi deformati mentre notiamo che per qualunque s.r.i. la linea universo del raggio di luce risulta essere sempre la bisettrice dell'angolo compreso tra gli assi.

Per trovare l'unità di misura nel s.r.i. S' imponiamo che l'invariante relativistico s^2 sia uguale all'unità:

$$s^2 = x^2 - c^2 t^2 = 1 , \quad (2.48)$$

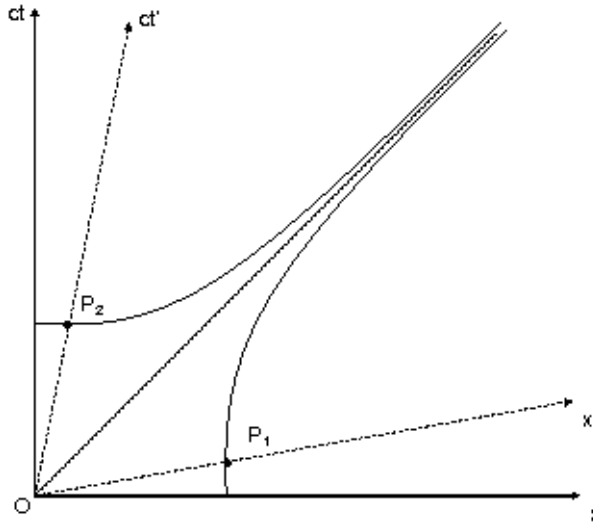


Figura 2.9: *Unità di misura in due s.r.i. in moto relativo l'uno rispetto all'altro*

notiamo che questa è l'equazione di una iperbole riferita agli assi $x = ct$ e $x = -ct$ e rappresenta il luogo dei vettori dello spazio-tempo che hanno modulo pari a 1; con riferimento alla figura 2.9, sia P_1 l'intersezione di questa iperbole con l'asse x' , allora $\overline{OP_1}$ rappresenta l'unità di lunghezza nel sistema S' . Analogamente, imponendo $s^2 = -1$ si trova l'unità di tempo di S' . In altre parole $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ rappresentano le unità di lunghezza e di tempo propri per il s.r.i. S' .

Simultaneità e misure spazio-tempo sul piano di Minkowski

Ritorniamo, ora, sul concetto di simultaneità: due eventi sono simultanei in S' se hanno la stessa coordinata temporale ct' , cioè giacciono su una retta parallela a x' come ad esempio per gli eventi A e B in figura 2.10, per i quali risulta $t'_B = t'_A$ in S' , $\Delta t = t_B - t_A \neq 0$ in S .

Consideriamo una sbarretta a riposo in S di lunghezza l_p . Gli eventi spazio tempo C e D in S sono simultanei ($t = 0$) e la loro distanza spaziale fornisce la lunghezza l_p propria della sbarretta in S . La misura della lunghezza dalla sbarretta in S' può essere realizzata considerando la posizione dei due estremi C' e D' nello stesso istante (ad esempio in $t' = 0$) in modo

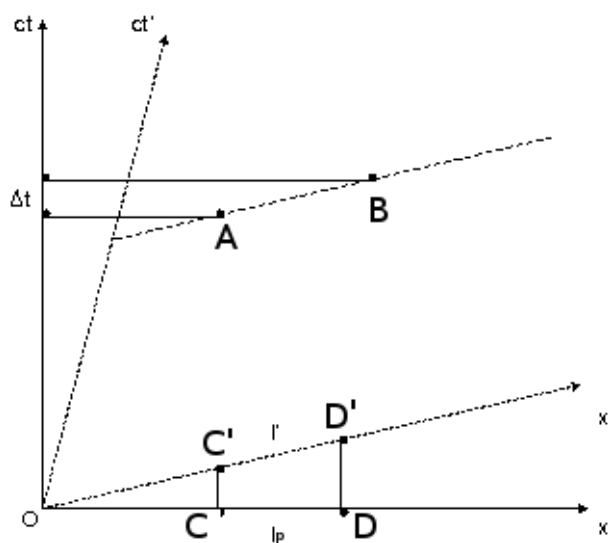


Figura 2.10: *Simultaneità e contrazione delle lunghezze sul piano di Minkowski*

da garantire la simultaneità. Dalla rappresentazione grafica risulta evidente che la differenza dei risultati di misura delle lunghezze è dovuta al disaccordo nella simultaneità degli eventi nei diversi sistemi di riferimento inerziali.

Si fa presente che la lunghezza dell'asta in S' è comunque minore rispetto a quella in S dato che l'unità di misura in S' è maggiore di quella in S .

Grazie alla rappresentazione geometrica dello spazio-tempo, possiamo comprendere meglio i concetti di ordine temporale e separazione spaziale degli eventi: con riferimento alla figura 2.11, consideriamo un qualunque punto P nell'area grigia; possiamo sempre trovare un asse ct' che passi per l'origine e quel punto, cioè possiamo trovare un s.r.i. in cui gli eventi O e P siano distanziati nel tempo ma non nello spazio.

Chiameremo, quindi, futuro assoluto l'area grigia per $ct > 0$ e passato assoluto quella per $ct < 0$. Analogamente, per un qualsiasi punto Q nella regione chiara del piano, potremmo sempre trovare un asse x' tale che passi per O e Q , cioè un s.r.i. nel quale O e Q sono due eventi simultanei: allora chiameremo le regioni chiare presente.

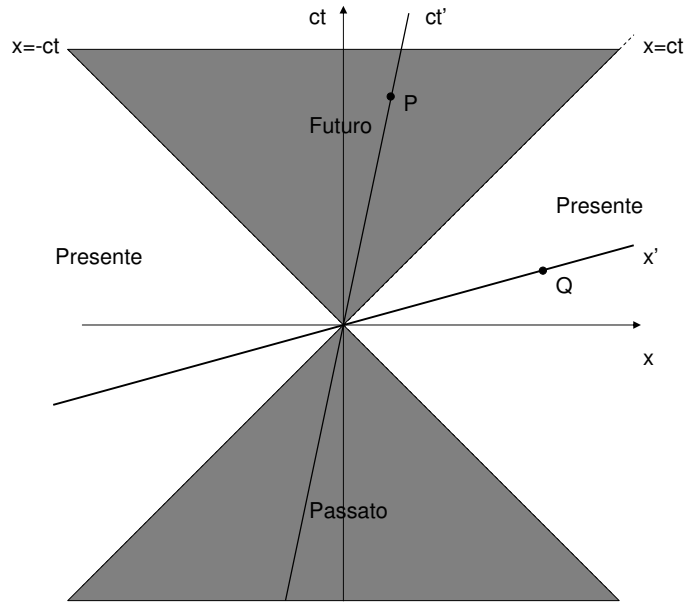


Figura 2.11: *Ordine temporale e spaziale nel piano di Minkowski*

2.5 L'effetto Doppler e l'aberrazione stellare

Uno dei fenomeni più interessanti previsti dalla teoria della relatività riguarda le trasformazioni subite dalla direzione di propagazione e dalla frequenza di un'onda elettromagnetica vista da due osservatori in moto relativo rettilineo uniforme. Consideriamo un sistema S a riposo e un sistema S' che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità \mathbf{V} rispetto a S . Fissiamo questi due riferimenti cartesiani, rispettivamente xyz e $x'y'z'$, tali che gli assi x, x' coincidano e siano paralleli a \mathbf{V} . Infine, facciamo coincidere le due terne all'istante $t = t' = 0$. Per semplicità, tratteremo il problema in due dimensioni (vedi figura 2.12).

Supponiamo che nell'istante iniziale dall'origine dei due sistemi parta un'onda elettromagnetica piana. Sapendo che le trasformazioni di Lorentz producono una rotazione dello spazio-tempo, assumiamo che l'onda abbia una frequenza ω in S , e che in generale essa abbia una diversa frequenza ω' e diversa direzione di propagazione θ' in S' . I due osservatori solidali ad S ed S' scriveranno per la fase di quest'onda un'espressione che, per il principio di relatività, deve avere la stessa forma nei due sistemi di riferimento:

$$S' \quad e^{j(\omega't' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')} = e^{j[\omega't' - (k'x' \cos \theta' + k'y' \sin \theta')]} , \quad (2.49)$$

$$S \quad e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = e^{j[\omega t - (kx \cos \theta + ky \sin \theta)]} . \quad (2.50)$$

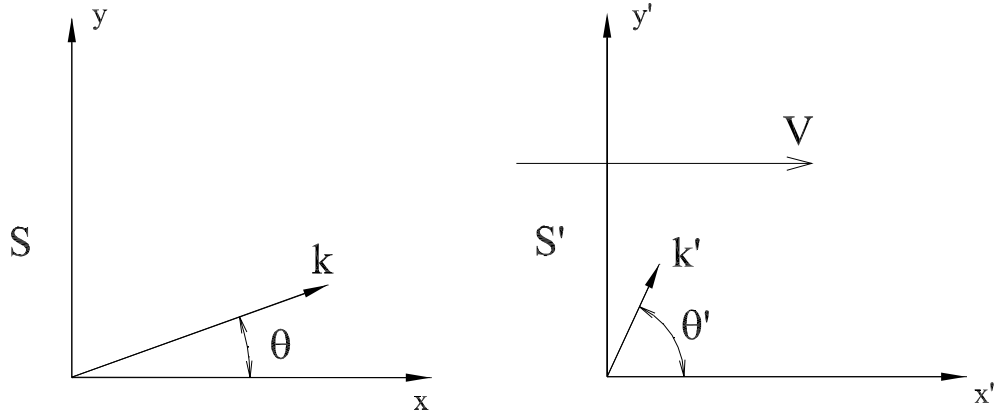


Figura 2.12: *Effetto Doppler*

Sfruttando il fatto che la fase dell'onda deve essere la stessa nei due sistemi di riferimento (è un invariante di Lorentz per cui i massimi restano i massimi e i minimi restano i minimi), vogliamo stabilire quali sono le trasformazioni subite dalle frequenze e dall'angolo di propagazione.

Applicando le trasformazioni di Lorentz, la fase della (2.49) diventa:

$$\begin{aligned} \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' &= \omega' \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right) - k' [\gamma(x - Vt) \cos \theta' + y \sin \theta'] \\ &= (\omega' \gamma + \gamma k' V \cos \theta') t - \left(\gamma \frac{\omega' V}{c^2} + k' \gamma \cos \theta' \right) x - k' \sin \theta' y, \end{aligned} \quad (2.51)$$

mentre la fase della (2.50) può essere riscritta:

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta. \quad (2.52)$$

Confrontando la (2.51) con la (2.52) otteniamo:

$$\omega = \gamma (\omega' + k' V \cos \theta') = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta'), \quad (2.53)$$

che esprime l'**effetto Doppler relativistico**.

Mettiamo in luce un risultato notevole: ponendo nella (2.53) $\theta' = \pi/2$ si ha ancora $\omega \neq \omega'$; si parla in questo caso di *effetto Doppler trasverso*, ed è un risultato non ottenibile classicamente. Nel caso classico, infatti, i due osservatori in S e S' avrebbero misurato la stessa frequenza, essendo la velocità \mathbf{V} e la direzione di propagazione dell'onda ortogonali. Ancora dalle (2.51), (2.52) ricaviamo le due relazioni:

$$\begin{cases} k \sin \theta = k' \sin \theta' \\ k \cos \theta = \gamma k' (\beta + \cos \theta') \end{cases} \quad \rightarrow \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\beta + \cos \theta')}. \quad (2.54)$$

La (2.54) descrive il fenomeno dell'**aberrazione** della luce nel caso relativistico. La formula classica è facilmente ottenibile nel limite di $\beta \ll 1$. Supponiamo infatti che dal riferimento delle "stelle fisse" S parta un'onda elettromagnetica in direzione $\theta = -\pi/2$. Se $\beta \ll 1$ un osservatore in S' in moto con velocità V in direzione della sorgente percepirà la stessa onda con un angolo θ' tale che:

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(-\beta + \cos \theta)} \approx \frac{-1}{-V/c} = \frac{c}{V},$$

che è proprio la formula classica che descrive l'effetto di aberrazione.

Un'osservazione importante: la (2.53) risolve l'incongruenza (agli occhi di Einstein) che si aveva nell'elettromagnetismo classico, per cui l'effetto Doppler, descritto dalle trasformazioni di Galileo, fornisce la seguente relazione:

$$\omega' = \omega(1 - \beta \cos \theta), \quad (2.55)$$

che non verifica il principio di relatività, poiché la descrizione dello stesso fenomeno in due sistemi inerziali diversi porterebbe a risultati diversi.

Infatti la (2.55) è valida nel caso in cui la sorgente sia ferma e l'osservatore in moto. Se, al contrario, la sorgente è in moto e l'osservatore in quiete, quest'ultimo dovrebbe misurare una frequenza diversa da quella data dalla (2.55), e ottenibile dalla

$$\omega = \omega'(1 + \beta \cos \theta),$$

da cui:

$$\omega' = \frac{\omega}{(1 + \beta \cos \theta)}. \quad (2.56)$$

È evidente che le (2.55), (2.56) portano a risultati diversi. Tuttavia, nel limite di $\beta \ll 1$ questi due risultati differiscono per una quantità dell'ordine di β^2 , come si può verificare immediatamente sviluppando la (2.56) in serie di Taylor nell'intorno di $\beta = 0$:

$$\omega' = \omega(1 - \beta \cos \theta) + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (2.57)$$

Solamente l'utilizzo di strumenti molto sensibili, in grado di apprezzare quantità dell'ordine di β^2 , ne avrebbero potuto dare la conferma sperimen-

tale, e ciò spiega perchè ci volle del tempo (vedi l'esperienza di Michelson e Morley paragrafo 1.3) prima di metterne in dubbio la validità³.

In maniera molto più generale il principio di Relatività Ristretta formulato da Einstein postula la validità delle leggi della fisica in sistemi di riferimento inerziali per tutti i fenomeni fisici, e il Principio di Relatività Generale lo estenderà a qualsiasi sistema di riferimento.

L'effetto Doppler descritto dalla (2.53) rispetta il principio di relatività (per semplicità poniamo $\theta = 0 \Rightarrow \theta' = 0$):

$$\omega = \gamma\omega' (1 + \beta) ,$$

$$\omega' = \gamma\omega (1 - \beta) ,$$

da cui deve risultare l'identità:

$$\frac{\omega}{\gamma(1 + \beta)} = \gamma\omega (1 - \beta) .$$

³A prima vista si può sollevare la seguente obiezione: la (2.55) è valida anche in meccanica classica nello studio della propagazione di onde elastiche nei mezzi; ma allora, ancor prima degli studi sull'elettromagnetismo, già la meccanica classica violava il principio di relatività? In realtà il principio di relatività classica postula che le leggi della meccanica, in pratica le *accelerazioni*, siano le stesse in sistemi di riferimento inerziali; ciò non impedisce che, nel caso specifico, la velocità o la frequenza di un'onda siano diverse.

In particolare, l'origine fisica dell'asimmetria nei risultati (2.55), (2.56) è motivata dalla asimmetria stessa del problema: nei due casi considerati cambia la velocità dell'osservatore rispetto al mezzo di propagazione.

Ma nel caso elettromagnetico, una volta mostrata l'irrelevanza del concetto di etere e quindi di un mezzo di propagazione delle onde elettromagnetiche, il problema considerato risulta simmetrico, e non c'è ragione perchè non valga un principio di relatività.

Capitolo 3

Elementi di dinamica relativistica

Le leggi della dinamica subiscono un cambiamento radicale nella meccanica relativistica. Se prendiamo in esame, ad esempio, il principio di conservazione della quantità di moto e poniamo la nostra attenzione sulla collisione tra due masse, dalla meccanica classica sappiamo che quando i due corpi collidono la quantità di moto si conserva indipendentemente dalla variazione delle loro rispettive velocità. Volendo mantenere valida questa legge anche nella dinamica relativistica vedremo che sarà necessario assumere anche la relatività della massa inerziale, il cui valore dipende dalla velocità.

3.1 Quantità di moto

Consideriamo nel sistema S due corpi m_A e m_B che viaggiano con velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B lungo due traiettorie rettilinee che le portano a collidere in un punto dell'asse x come mostrato in figura 3.1. Se l'urto è elastico, e nell'ipotesi che $m_A = m_B$, e $\mathbf{v}_A = -\mathbf{v}_B$ (centro di massa fermo nel punto di collisione), la conservazione della quantità di moto si scrive:

$$p_x = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = 0 \quad (3.1)$$

$$p_y = m_A v_{Ay} + m_B v_{By} = 0, \quad (3.2)$$

e comporta che le due masse dopo l'urto sono deflesse lungo due traiettorie con velocità \mathbf{V}_A e \mathbf{V}_B tali che:

$$\mathbf{V}_A = -\mathbf{V}_B,$$

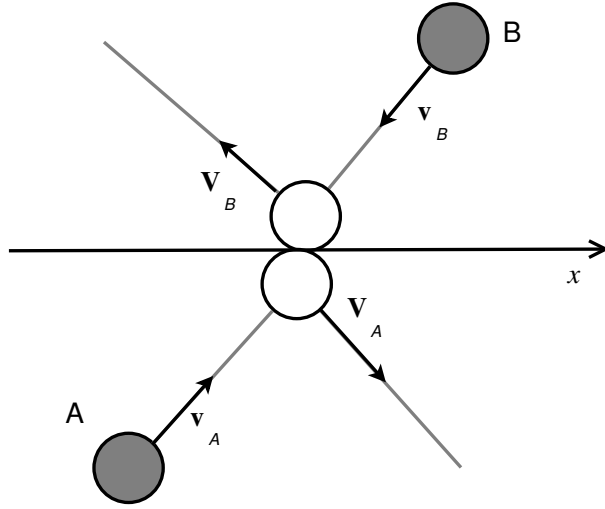


Figura 3.1: *Urto tra due corpi nel sistema di riferimento S*

$$\begin{cases} V_{Ax} = v_{Ax} \\ V_{Ay} = -v_{Ay} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{Bx} = v_{Bx} \\ V_{By} = -v_{By} \end{cases}$$

Spostiamoci ora su di un sistema di riferimento S' che si muove con velocità $V = v_{Ax}$ (figura 3.2) e sia

$$\gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

In tale sistema di riferimento le velocità delle masse prima dell'urto \mathbf{v}'_A e \mathbf{v}'_B , utilizzando le trasformazioni delle velocità sono:

$$\begin{cases} v'_{Ax} = \frac{v_{Ax} - V}{1 - \frac{v_{Ax}V}{c^2}} = 0 \\ v'_{Ay} = \frac{v_{Ay}}{\gamma_V \left(1 - \frac{v_{Ax}V}{c^2}\right)} \end{cases}$$

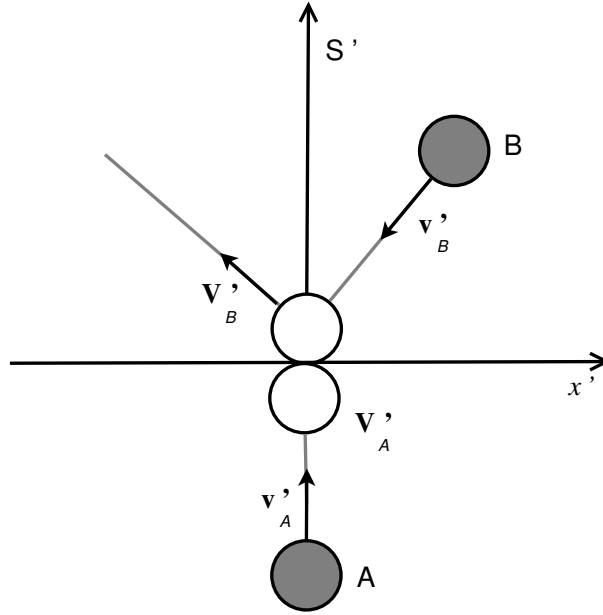


Figura 3.2: *Urto tra due corpi nel sistema di riferimento S'*

$$\begin{cases} v'_{Bx} = \frac{v_{Bx} - V}{1 - \frac{v_{Bx}V}{c^2}} = -\frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} \\ v'_{By} = \frac{v_{By}}{\gamma_V \left(1 - \frac{v_{Bx}V}{c^2}\right)} = \frac{v_{By}}{\gamma_V \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)}. \end{cases}$$

Osserviamo che in S' il centro di massa non è più fermo, e possiamo affermare che esso si muova verso l'asse negativo delle x' . Risulta ancora $p'_y = 0$, ovvero:

$$m'_A v'_{Ay} + m'_B v'_{By} = 0, \quad (3.3)$$

dove assumiamo che le due masse m'_A e m'_B non siano necessariamente uguali in S' .

Se ora consideriamo la relazione (3.2), con $m_A = m_B$ in S , ed esprimiamo le velocità mediante le trasformazioni $S' \rightarrow S$, otteniamo:

$$m_A \frac{v'_{Ay}}{\gamma_V \left(1 + \frac{v'_{Ax}V}{c^2}\right)} + m_A \frac{v'_{By}}{\gamma_V \left(1 + \frac{v'_{Bx}V}{c^2}\right)} = 0, \quad (3.4)$$

da cui, essendo $v'_{Ax} = 0$, si ha:

$$v'_{Ay} = -\frac{v'_{By}}{1 + \frac{v'_{Bx}V}{c^2}}. \quad (3.5)$$

Utilizzando tale relazione nella (3.3) otteniamo:

$$m'_A \frac{-v'_{By}}{1 + \frac{v'_{Bx}V}{c^2}} + m'_B v'_{By} = 0, \quad (3.6)$$

ovvero:

$$m'_B = \frac{m'_A}{1 + \frac{v'_{Bx}V}{c^2}}. \quad (3.7)$$

Risulta pertanto che la quantità di moto nella direzione y' si conserva solo se $m'_A \neq m'_B$.

Per ricavare una relazione generale, che dipenda solo dalla velocità v'_{Bx} usiamo:

$$V = -v_{Bx} = -\frac{v'_{Bx} + V}{1 + \frac{v'_{Bx}V}{c^2}}, \quad (3.8)$$

che, risolvendo per la velocità V , da:

$$V = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - v'^2_{Bx}/c^2}}{v'_{Bx}/c^2}, \quad (3.9)$$

che, sostituita nella (3.7), permette di scrivere:

$$m'_B = \frac{m'_A}{\sqrt{1 - v'^2_{Bx}/c^2}}. \quad (3.10)$$

Se ora facciamo tendere $v'_{Ay} \rightarrow 0$, e $v'_{By} \rightarrow 0$, la massa A risulta a riposo nel sistema S' potendo scrivere $m'_A = m'_0$, mentre v'_{Bx} risulta essere la velocità della massa B , pertanto:

$$m'_B = \frac{m'_0}{\sqrt{1 - v'^2_B/c^2}}. \quad (3.11)$$

Possiamo concludere che, in qualunque sistema di riferimento S in cui la massa m si muove con velocità v , la massa dipende dalla sua velocità secondo la legge:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.12)$$

dove m_0 è la massa a riposo in quel sistema. Pertanto la quantità di moto relativistica di un corpo in moto con velocità $v = |\mathbf{v}|$ diventa:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} = \gamma_v m_0 \mathbf{v}. \quad (3.13)$$

Da questa, possiamo calcolare la legge del moto di un corpo sul quale agiscano delle forze, mediante il II principio della dinamica di Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d}{dt} m + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (3.14)$$

3.2 Lavoro e Energia Cinetica

La prima interessante conseguenza della massa relativistica riguarda l'energia cinetica K e il principio di conservazione dell'energia \mathcal{E} . La variazione di energia cinetica K è definita come:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \int_1^2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 \left(\frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} dt = \int_1^2 (v^2 dm + m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) . \quad (3.15)$$

La relazione delle masse (3.12) può essere riscritta come:

$$m^2 c^2 - m^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m_0^2 c^2 , \quad (3.16)$$

che, differenziata, diventa:

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = 0 \quad \implies \quad v^2 dm + m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = c^2 dm ,$$

allora, se assumiamo che la massa sia inizialmente in quiete, $K_1 = 0$, l'energia cinetica K della massa in qualsiasi istante si scrive:

$$K = \int_1^2 (v^2 dm + m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2 . \quad (3.17)$$

L'energia cinetica guadagnata dalla massa risulta pertanto composta dalla differenza di due termini: il primo rappresenta l'energia totale, il secondo quella a riposo, associata alla massa del corpo stesso.

In tale ipotesi si può scrivere $\mathcal{E} = K + m_0 c^2$.

È interessante notare che se espandiamo la relazione delle masse in serie di Taylor e ci fermiamo al primo ordine, otteniamo:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) . \quad (3.18)$$

L'energia cinetica classica altro non è che un'approssimazione al primo ordine di quella relativistica:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 . \quad (3.19)$$

Qual'è il significato dell'energia a riposo? Sappiamo che un oggetto fermo è in realtà composto da molecole, atomi, nuclei, elettroni, etc., che si trovano

in uno stato di moto. Le loro energie, cinetica e potenziale, di qualunque natura, che costituiscono l'energia interna, contribuiscono alla massa a riposo.

Il modo più semplice per verificare tale affermazione potrebbe essere quello di misurare la massa a seguito di un riscaldamento o di una trasformazione chimica, accompagnate da un assorbimento di calore Q o da un rilascio di energia $\Delta\mathcal{E}$. Tuttavia la variazione di massa corrispondente, pari a Q/c^2 o $\Delta\mathcal{E}/c^2$ è troppo piccola per essere misurata sperimentalmente. È solo con le trasformazioni nucleari che grandi quantità di energia vengono prodotte e si ottengono variazioni di massa misurabili.

3.3 Trasformazione della quantità di moto e dell'energia

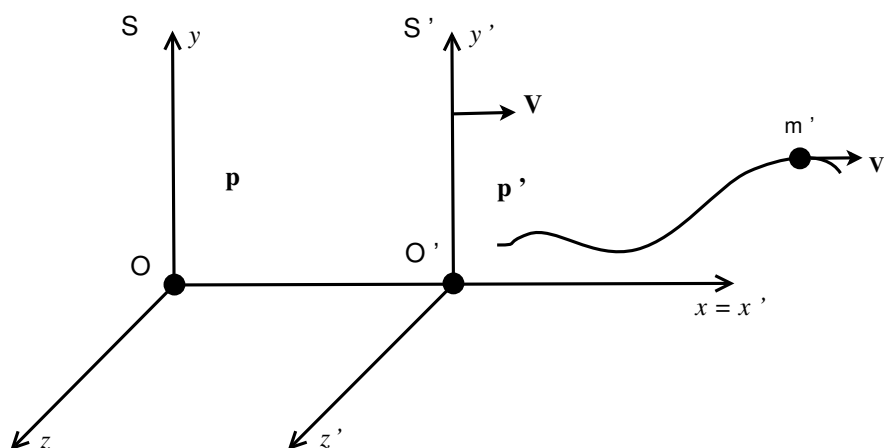


Figura 3.3: Moto di un corpo in S e in S' e trasformazione della quantità di moto.

Supponiamo di avere un corpo di massa m che si muove con velocità \mathbf{v} nel riferimento S e con velocità \mathbf{v}' nel riferimento S' (vedere figura 3.3). La componente della quantità di moto p'_x in direzione x' è:

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}}. \quad (3.20)$$

Trasformazione dei fattori relativistici γ

Per le leggi di trasformazione delle velocità:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}, \quad (3.21)$$

dunque:

$$\begin{aligned} \frac{v'^2}{c^2} &= \frac{1}{c^2} (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) = \frac{1}{c^2} \left[\frac{(v_x - V)^2}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} + \frac{v_y^2 + v_z^2}{\gamma^2 \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \right] = \\ &= \left[\frac{\left(\frac{v_x}{c} - \frac{V}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \right], \quad (3.22) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_{v'}^2} &= 1 - \frac{v'^2}{c^2} = 1 - \left[\frac{\left(\frac{v_x}{c} - \frac{V}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \right] = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2}, \quad (3.23) \end{aligned}$$

che, espressa mediante i fattori relativistici¹:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \gamma_{v'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad (3.24)$$

ci consente di ricavare:

$$\gamma_{v'} = \gamma \gamma_v \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right), \quad (3.25)$$

analogamente si ottiene:

$$\gamma_v = \gamma \gamma_{v'} \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right). \quad (3.26)$$

¹D'ora in poi, a meno che non sia necessario, omettiamo il pedice V per indicare il fattore di trasformazione relativistico tra S e S' .

Trasformazione della quantità di moto

Utilizzando la relazione (3.12) e $\mathcal{E} = mc^2$, l'espressione della quantità di moto diventa:

$$p'_x = m_0 \gamma_v v'_x = m_0 \gamma \gamma_v (v_x - V) = \gamma (mv_x - mV) = \gamma \left(p_x - \frac{V}{c^2} \mathcal{E} \right), \quad (3.27)$$

per le altre componenti si trova:

$$p'_y = m_0 \gamma_v v'_y = m_0 \gamma_v v_y = p_y \quad (3.28)$$

$$p'_z = m_0 \gamma_v v'_z = m_0 \gamma_v v_z = p_z. \quad (3.29)$$

L'espressione più semplice delle componenti y e z è dovuta alla perpendicolarità tra le rispettive componenti della velocità e \mathbf{V} .

Analogamente si trova nella trasformazione inversa $S' \rightarrow S$:

$$p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}' \right) \quad (3.30)$$

$$p_y = p'_y \quad (3.31)$$

$$p_z = p'_z. \quad (3.32)$$

Trasformazione dell'energia

Cerchiamo ora le relazioni di passaggio dell'energia da un riferimento ad un altro:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= m_0 \gamma_v c^2 = m_0 \gamma \gamma_v \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) c^2 = mc^2 \gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) = \\ &= \gamma (mc^2 - mv_x V) = \gamma (\mathcal{E} - p_x V). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Analogamente:

$$\mathcal{E} = \gamma (\mathcal{E}' + p'_x V). \quad (3.34)$$

3.4 Quadrivettore impulso-energia

Nella relatività c'è una stretta connessione tra la quantità di moto e l'energia, che si traduce in relazioni analoghe a quelle tra lo spazio e il tempo.

$$\begin{cases} cp_x = \gamma (cp'_x + \frac{V}{c} \mathcal{E}') = \gamma (cp'_x + \beta \mathcal{E}') \\ cp_y = cp'_y \\ cp_z = cp'_z \\ i\mathcal{E} = i\gamma (\mathcal{E}' + p'_x V) = i\gamma (\mathcal{E}' + cp'_x \beta). \end{cases} \quad (3.35)$$

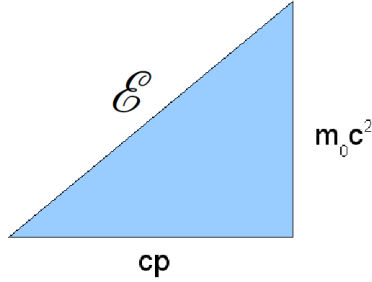


Figura 3.4: *Energia totale in funzione dell'energia a riposo e della quantità di moto.*

In matrici:

$$\begin{pmatrix} cp_x \\ cp_y \\ cp_z \\ i\mathcal{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cp'_x \\ cp'_y \\ cp'_z \\ i\mathcal{E}' \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

la trasformazione del quadrivettore $(\mathbf{cp}, i\mathcal{E})$ impulso-energia è quindi governata dalla stessa matrice che regola le trasformazioni del quadrivettore spazio-tempo. Questa matrice è ortogonale, quindi la trasformazione conserva le dimensioni:

$$c^2p^2 - \mathcal{E}^2 = c^2p'^2 - \mathcal{E}'^2. \quad (3.37)$$

Nel caso di una massa a riposo nel sistema S' si ha $\mathbf{p}' = 0$, l'energia a riposo della massa è $\mathcal{E}' = m_0c^2$, pertanto il valore dell'invariante è pari a $c^2p^2 - \mathcal{E}^2 = -m_0^2c^4$, che possiamo scrivere anche come:

$$\mathcal{E}^2 = c^2p^2 + (m_0c^2)^2, \quad (3.38)$$

che fornisce l'energia totale a partire dall'energia a riposo m_0c^2 e dal valore della quantità di moto p . Tale relazione è rappresentabile geometricamente come in fig. 3.4.

Un'applicazione interessante delle formule di trasformazione che legano la quantità di moto e l'energia è quella del calcolo del quadrivettore per i fotoni, particelle a massa nulla che viaggiano alla velocità della luce.

Infatti si può notare dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \mathbf{p} = \gamma_v m_0 \mathbf{v} \\ \mathcal{E}^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2 \end{cases}, \quad (3.39)$$

che una particella di massa nulla (fotone) può avere energia o impulso non nullo solo se $v = c$. Infatti, essendo

$$pc^2 = mvc^2 = vmc^2 = v\mathcal{E}, \quad (3.40)$$

ricaviamo, per $v = c$, che $p = \mathcal{E}/c$ che soddisfa la III delle (3.39) solo se $m_0 = 0$. Solo entità a massa nulla possono trasportare energia \mathcal{E} alla velocità della luce, e ad esse viene associato un impulso pari a $p = \mathcal{E}/c$.

Con l'ipotesi di Planck $\mathcal{E} = h\nu$, dove $h =$ costante di Planck $= 6.67 \cdot 10^{-27}$ g cm² s⁻¹ e $\nu =$ frequenza, si ottiene che ad una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ e frequenza ν viene associato un impulso pari a:

$$p = h \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.41)$$

Un'onda luminosa può essere quindi rappresentata anche come un insieme di particelle con massa a riposo nulla, caratterizzata da un impulso $p = \mathcal{E}/c$ ed energia $\mathcal{E} = h\nu$.

ESEMPI:

collisione anelastica

- a) Consideriamo una collisione centrale anelastica tra due masse identiche m_0 in moto in direzioni opposte (figura 3.5) con velocità $\pm v$.

dopo la collisione le masse arresteranno il loro moto nel punto corrispondente al centro di massa dove si avrà una massa M_0 con velocità nulla. Appliciamo il principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia totale:

$$m_0 \gamma_v v - m_0 \gamma_v v = M_0 V \quad \Rightarrow \quad V = 0 \quad (3.42)$$

$$m_0 \gamma_v c^2 + m_0 \gamma_v c^2 = M_0 c^2 \quad \Rightarrow \quad M_0 = 2\gamma_v m_0. \quad (3.43)$$

Osserviamo che per $\gamma_v \rightarrow 1$ (basse velocità), $M_0 \rightarrow 2m_0$.



Figura 3.5: *Urto centrale anelastico tra due masse identiche in moto in direzioni opposte.*

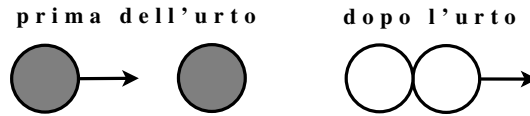


Figura 3.6: *Urto centrale anelastico tra due masse identiche, una in moto e l'altra ferma.*

- b) Consideriamo l'urto centrale anelastico tra una massa m_0 in moto con velocità v e un'identica massa ferma come in figura 3.6 .

Applichiamo di nuovo la conservazione della quantità di moto e dell'energia totale:

$$\begin{cases} m_0 \gamma_v v = M_0 \gamma_V V \\ m_0 \gamma_v c^2 + m_0 c^2 = M_0 \gamma_V c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} V = \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} v \\ M_0 = \frac{\gamma_v + 1}{\gamma_V} m_0 \end{cases} . \quad (3.44)$$

Per ricavare M_0 in funzione di γ_v soltanto, esplicitiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_V} &= \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\gamma_v} &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma_v^2} = \frac{\gamma_v^2 - 1}{\gamma_v^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{\gamma_V^2} = 1 - \frac{\gamma_v^2 - 1}{\gamma_v^2} \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma_v - 1}{\gamma_v + 1} = \frac{2}{\gamma_v + 1}, \quad (3.45)$$

e infine

$$M_0 = \sqrt{2(\gamma_v + 1)}m_0 .$$

Fusione e fissione nucleare: esempi di equivalenza tra massa ed energia

Il sole è una gigantesca fornace termo-nucleare dove viene generata una enorme quantità di energia mediante trasformazione di massa secondo la relazione $\mathcal{E} = mc^2$. Ciò avviene a causa della trasformazione dell'idrogeno (nuclei) in elio, il quale possiede una massa inferiore alla somma degli elementi costituenti (protoni e neutroni).

In generale un elemento naturale X è costituito da un nucleo formato da protoni e neutroni (nucleoni). Il peso atomico A dell'elemento è dato dal numero totale di protoni (Z) e neutroni ($A - Z$). L'elemento si indica con il simbolo A_ZX . Si osserva che la massa dell'elemento di fusione è inferiore alle masse dei nucleoni costituenti, in altre parole

$$M_{AZ} < Zm_p + (A - Z)m_n ,$$

dove m_p = massa del protone, m_n = massa del neutrone, M_{AZ} = massa dell'elemento A_ZX .

Convenzionalmente è stata adottata come unità di massa atomica (u.m.a.) un valore pari a 1/12 della massa dell'atomo di carbonio ${}^{12}_6C$, atomo stabile con pari numero di protoni e neutroni. L'u.m.a. pertanto è un valore medio di massa/nucleone riferito a tale elemento². La presenza di elettroni nell'atomo non comporta sostanziali differenze essendo la massa dell'elettrone $m_e = 1/1850m_p$.

La massa dei singoli nucleoni isolati risulta leggermente superiore al valore dell'u.m.a.: $m_p = 1.00783$ u.m.a., $m_n = 1.00867$ u.m.a.

La differenza tra la massa dell'elemento e la massa dei suoi costituenti è detta differenza di massa che, trasformata in energia e divisa per il peso atomico A , fornisce l'energia di legame/nucleone $\mathcal{E}_{\text{leg}} = \Delta mc^2/A$ mostrata in figura 3.7 .

Quando si produce la fusione tra i nuclei di due elementi, viene generata una quantità di energia pari alla differenza di massa tra gli elementi iniziali (più pesanti) e l'elemento finale (più leggero). Nel caso della fissione invece, per spezzare il nucleo di un atomo, occorre inizialmente fornire una certa quantità di energia, ma, alla fine del processo, l'energia liberata sarà ancora maggiore di quella fornita.

²L'u.m.a. vale $(1.660531 \pm 0.000011) \times 10^{-24}$ g.

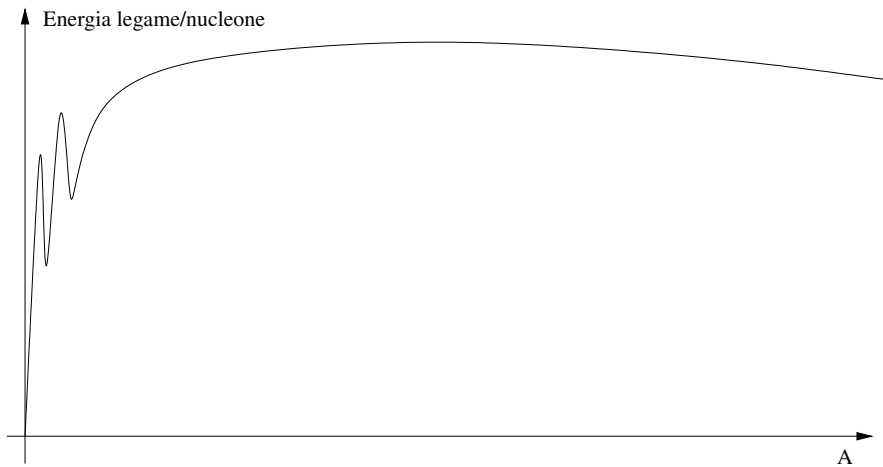


Figura 3.7: *Energia di legame per nucleone.*

Il fenomeno della fusione è alla base della generazione di energia nel sole, mentre la fissione è il meccanismo utilizzato nelle centrali ad energia nucleare.

Il ciclo protone - protone nel sole

Nel sole l'energia generata proviene dal meccanismo di fusione dei nuclei di idrogeno che diventano elio, più leggero dei nuclei costituenti. Il meccanismo di fusione avviene mediante tre fasi (vedere figura 3.8):

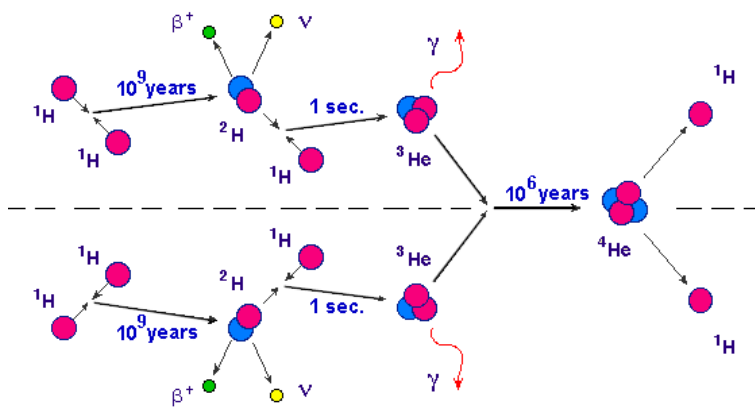
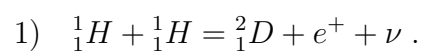
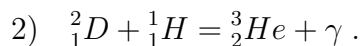


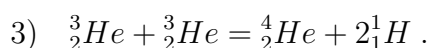
Figura 3.8: *Ciclo protone - protone nel sole*



Due nuclei di idrogeno formano un nucleo di deuterio con formazione di un positrone e un neutrino. Il tempo medio di tale trasformazione è 1.4×10^{10} anni/coppia di nucleoni.



Il deuterio si fonde con un protone dando luogo all'elio con emissione di energia di 26 MeV. Il tempo medio di tale trasformazione è 6 secondi/coppia di nucleoni.



Si ha formazione di 4_2He , con tempo medio di trasformazione di 10^6 anni.

Il peso atomico di 1_1H /nucleone è 1.008 u.m.a., mentre quello di 4_2He è 1.001 u.m.a., da cui si ricava il difetto di massa di $\Delta m = 0.007$ u.m.a./nucleone.

Il sole brucia una massa di 4.3×10^9 kg/s che si trasforma in una potenza emessa pari a 3.8×10^{23} kW. Tale potenza di radiazione, emessa isotropicamente dal sole, è catturata in piccola parte dalla superficie terrestre ad una distanza di circa 1.5×10^8 km. Sulla regione più esterna dell'atmosfera arriva una intensità di potenza pari a circa 1.3 kW/m².

La fissione dell'uranio

Nel 1939 tre fisico-chimici tedeschi furono i primi a capire che un nucleo di ${}^{235}U$, quando viene colpito ed assorbe un neutrone, si rompe in 2 o più frammenti ed ha luogo la fissione del nucleo.

Affinchè avvenga la fissione bisogna fornire al nucleo una certa energia per superare la buca di potenziale nella quale si trovano i nucleoni. Tale energia è detta energia critica, definita anche come l'energia che bisogna fornire al nucleo dall'esterno per provocare la fissione. Quando un neutrone viene catturato dall'uranio, si forma un nucleo che ha una energia di legame maggiore, per cui viene liberata energia (energia di separazione) che, se maggiore dell'energia critica, fa oscillare il nucleo fino a formare due nuclei distinti (prodotti di fissione) ma ancora uniti. A questo punto l'energia nucleare di legame rimane costante (ed è quella dei due prodotti di fissione), mentre invece l'energia di repulsione coulombiana si fa sentire ed inizia ad allontanare i due nuclei fino a formare i due distinti prodotti di fissione. In tale processo di rottura si producono anche dei neutroni (≥ 2).

I materiali che subiscono questo processo, come ad esempio ${}^{235}U$, si dicono fissili e si fissionano con i cosiddetti neutroni 'termici' (neutroni con energia cinetica pari a 0.025 eV). Esistono altri materiali, come ${}^{238}U$ che hanno una energia di separazione inferiore a quella critica per cui, affinché avvenga la

fissione, è necessario un ulteriore contributo di energia, fornita ad esempio dall'energia cinetica dei neutroni (i cosiddetti neutroni veloci).

Nella fissione all'interno di un reattore nucleare, oltre ai due frammenti di fissione, si producono 2 o più neutroni veloci che, dopo aver perso parte della loro energia, possono venire assorbiti da altri nuclei di ^{235}U producendo così una reazione a catena: se per ogni fissione si produce un neutrone che a sua volta genera fissione allora la reazione è stabile, e la massa di combustibile si definisce massa critica.

Un parametro importante per la criticità di un reattore è il rapporto tra i neutroni di fissione prodotti e i neutroni termici catturati. Si può avere reazione a catena anche con uranio naturale, ma la massa critica deve essere elevata: ecco perchè l'uranio naturale, che contiene una bassissima percentuale di ^{235}U (solo lo 0.7%), deve essere arricchito per l'utilizzo nelle centrali nucleari con neutroni termici.

Energia rilasciata nella fissione di ^{235}U

- $K_{\text{fissione}} = 168$ MeV lasciata in $r \leq 10^{-3}$ cm e totalmente recuperabile
- γ pronti = 7 MeV
- $K_{\text{neutroni di fissione}} = 5$ MeV

C'è inoltre l'energia prodotta dal decadimento dei prodotti di fissione:

- $K_{\beta} = 8$ MeV totalmente recuperabile
- $E_{\gamma} = 7$ MeV totalmente recuperabile
- $E_{\nu} = 12$ MeV totalmente irrecuperabile

Per un totale di 207 MeV (quasi tutta recuperabile)

3.5 Trasformazione delle forze

Consideriamo una massa in moto in un sistema S che possiede quantità di moto \mathbf{p} e che si muove sotto l'azione di una forza \mathbf{f} . Un osservatore solidale con un sistema S' , in moto con velocità \mathbf{V} rispetto ad S , osserverà un moto relativo caratterizzato da una quantità di moto \mathbf{p}' sotto l'azione di una forza \mathbf{f}' . Nella meccanica classica si suppone che se S' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad S , due osservatori solidali uno con S e l'altro con S' trovano $\mathbf{f} = \mathbf{f}'$. Vediamo che ciò non è più vero nella meccanica relativistica.

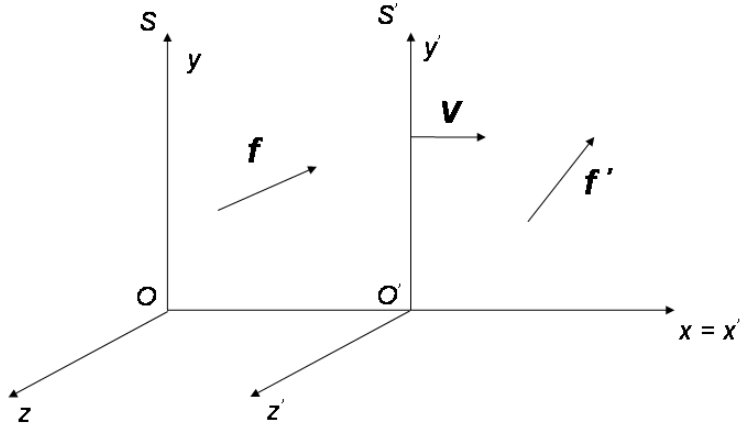


Figura 3.9: *Trasformazione delle forze tra due sistemi di riferimento S e S'*

Trasformiamo le forze passando dal sistema di riferimento S a quello S' (figura 3.9):

$$\begin{cases} \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \mathbf{f}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \end{cases} . \quad (3.46)$$

Analizziamo per prima la componente della forza nella direzione privilegiata del moto, x :

$$f'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left[\gamma \left(p_x - \frac{V}{c^2} \mathcal{E} \right) \right] . \quad (3.47)$$

Nota la relazione tra i tempi: $t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)$ deriviamo:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right) ,$$

e sostituiamo:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left[\gamma \left(p_x - \frac{V}{c^2} \mathcal{E} \right) \right] = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)} \frac{d}{dt} \left[\gamma \left(p_x - \frac{V}{c^2} \mathcal{E} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \left(\frac{d}{dt} p_x - \frac{V}{c^2} \frac{d}{dt} \mathcal{E} \right) . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Sostituiamo la derivata dell'energia: $d\mathcal{E} = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$.
 Otteniamo infine:

$$f'_x = \frac{1}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \left(\frac{d}{dt} p_x - \frac{V}{c^2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right) =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \left(f_x - \frac{Vv_x}{c^2} f_x - \frac{Vv_y}{c^2} f_y - \frac{Vv_z}{c^2} f_z \right) = f_x - \frac{V/c^2}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} (v_y f_y + v_z f_z) .$$

Parallelemente:

$$f_x = f'_x + \frac{V/c^2}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} (v'_y f'_y + v'_z f'_z) .$$

Per le altre due componenti, tenendo presente che $p'_y = p_y$ e $p'_z = p_z$, otteniamo:

$$\begin{cases} f'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dt'} p_y = \frac{dt}{dt'} f_y = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)} f_y \\ f_y = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)} f'_y , \end{cases} \quad (3.49)$$

e

$$\begin{cases} f'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dt'} p_z = \frac{dt}{dt'} f_z = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)} f_z \\ f_z = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)} f'_z . \end{cases} \quad (3.50)$$

Osserviamo che nel caso di una particella a riposo nel sistema O' ($\mathbf{v}' = 0$), si ha:

$$\begin{cases} f_x = f'_x \\ f_y = f'_y / \gamma \\ f_z = f'_z / \gamma . \end{cases} \quad (3.51)$$

3.6 Esempi di calcolo dell'accelerazione e della velocità in un sistema relativistico

L'espressione che lega la forza all'accelerazione è la (3.14). Dalla relazione tra la massa e l'energia ricaviamo la derivata della massa nel tempo:

$$\mathcal{E} = mc^2 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} .$$

Dunque, dalla (3.14) si ha:

$$\mathbf{f} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} .$$

L'accelerazione è:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{mc^2} \mathbf{v} ,$$

dove $m = m_0/(1 - \beta^2)^{1/2}$ è la massa relativistica. L'accelerazione non si manifesta soltanto nella direzione della forza, ma ha, in generale, anche una componente traversa alla forza.

3.6.1 Moto di una carica con \mathbf{f} e \mathbf{v} paralleli

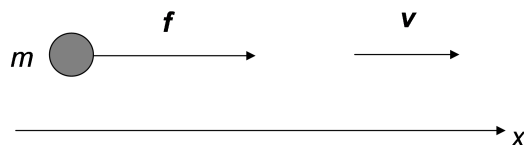


Figura 3.10: azione di una forza \mathbf{f} parallela alla velocità.

Consideriamo una massa m , che si muove lungo l'asse x con velocità \mathbf{v} , soggetta a una forza \mathbf{f} diretta parallelamente al suo moto, come in figura (3.10). La forza e la velocità sono nella stessa direzione, dunque: $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = f_{//}v$. L'accelerazione è:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{v}}{mc^2} (f_{//}v) . \quad (3.52)$$

Proiettando su x e sostituendo l'espressione della massa otteniamo:

$$a_{//} = \frac{f_{//}}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{f_{//}}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} . \quad (3.53)$$

Definendo la massa longitudinale:

$$m_{//} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m_0 \gamma_v^3, \quad (3.54)$$

l'espressione dell'accelerazione è:

$$a_{//} = \frac{f_{//}}{m_{//}}. \quad (3.55)$$

Carica in campo elettrico uniforme

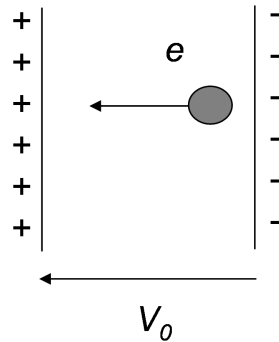


Figura 3.11: *Moto di una carica in un campo elettrico uniforme.*

Con riferimento alla figura 3.11, la forza che agisce sull'elettrone è pari a $f_{//} = eE_{//}$, dove e è la carica dell'elettrone pari a $1,6 \cdot 10^{-19}$ C e $E_{//}$ è il campo elettrico.

Caso classico $v \ll c$

$$a_{//} = \frac{f_{//}}{m_0} = \frac{eE_{//}}{m_0} \quad (3.56)$$

da cui si ricava

$$v_{//} = \frac{eE_{//}}{m_0} t. \quad (3.57)$$

Caso relativistico

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = f_{//}v = eE_{//}v. \quad (3.58)$$

Sostituendo $\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2$ e $v = \beta c$, l'equazione diventa

$$\frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{eE_{//}}{m_0 c} dt, \quad (3.59)$$

che, integrata a sinistra in $d\gamma$ da 1 a $\gamma(t)$ e a destra in dt da 0 a t , permette di ottenere

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{eE_{//}t}{m_0c}\right)^2}, \quad (3.60)$$

da cui si ricava la velocità

$$v = \beta c = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} c = c \frac{\left(\frac{eE_{//}t}{m_0c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{eE_{//}t}{m_0c}\right)^2}}. \quad (3.61)$$

Nel caso in cui

$$\left(\frac{eE_{//}t}{m_0c}\right)^2 \ll 1, \quad (3.62)$$

si ritrova il caso classico.

Considerazioni energetiche

Dal punto di vista energetico, l'energia che un elettrone acquista quando è accelerato da una differenza di potenziale V_0 , è $K = eV_0$. Inserendo i dati numerici, preso $V_0 = 1\text{V}$:

$$K = eV_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J} = 1\text{eV}, \quad (3.63)$$

che definisce l'unità di energia in eV.

L'energia a riposo di un elettrone è:

$$\mathcal{E}_0 = m_0c^2 \cong 0,511 \text{ MeV} = 511 \text{ KeV}, \quad (3.64)$$

con m_0 massa a riposo dell'elettrone pari a $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

L'energia dell'elettrone è dunque:

$$mc^2 = K + m_0c^2 = eV_0 + m_0c^2. \quad (3.65)$$

Calcoliamo la variazione relativa di massa:

$$\left(\frac{m}{m_0} - 1\right) = \frac{eV_0}{m_0c^2} = \frac{eV_0}{\mathcal{E}_0}. \quad (3.66)$$

Se numericamente scegliamo un valore di $eV_0 = 1 \text{ KeV}$ notiamo che la variazione di massa (e dunque quella di velocità) non è significativa:

$$\left(\frac{m}{m_0} - 1\right) = \frac{1}{511} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{511} \approx 1,002 = 1 + \epsilon, \quad (3.67)$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \cong 1 - (1 - 2\epsilon) = 2\epsilon. \quad (3.68)$$

La velocità che otteniamo è piccola rispetto a c ; v non è una velocità relativistica.

Se eseguiamo lo stesso calcolo scegliendo $eV_0 = 1 \text{ MeV}$ otteniamo:

$$\left(\frac{m}{m_0} - 1\right) = \frac{1}{0,511} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 3. \quad (3.69)$$

Le masse sono cambiate, bisogna usare la meccanica relativistica per analizzare il fenomeno.

Ancora una volta eseguiamo lo stesso calcolo scegliendo $eV_0 = 1 \text{ GeV}$ e otteniamo:

$$\left(\frac{m}{m_0} - 1\right) = \frac{1000}{0,511} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2001. \quad (3.70)$$

f e v perpendicolari

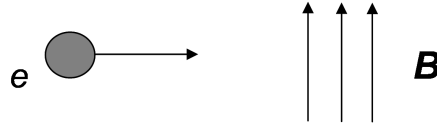


Figura 3.12: Azione di una forza perpendicolare alla velocità

Dal calcolo della forza di Lorentz notiamo che la forza magnetica e la velocità sono perpendicolari (figura 3.12):

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f} \perp \mathbf{v}. \quad (3.71)$$

Dunque nel calcolo dell'accelerazione si ottiene:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{v}}{mc^2} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}}{m}. \quad (3.72)$$

La componente perpendicolare (rispetto alla direzione del moto) dell'accelerazione è:

$$a_{\perp} = \frac{f_{\perp}}{m} = \frac{f_{\perp}}{m_0} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.73)$$

Definendo la massa trasversa:

$$m_{\perp} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.74)$$

l'espressione dell'accelerazione è:

$$a_{\perp} = \frac{f_{\perp}}{m_{\perp}}. \quad (3.75)$$

Carica in campo magnetico uniforme

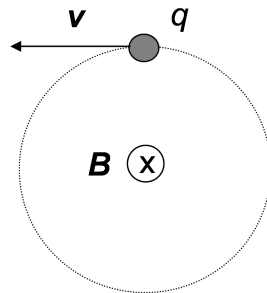


Figura 3.13: *Moto di una carica in un campo magnetico uniforme.*

Riferendoci alla figura 3.13, dall'equazione di Lorentz ricaviamo la forza:

$$f = qvB. \quad (3.76)$$

Data la forza ricaviamo l'accelerazione trasversa:

$$a_{\perp} = \frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{r}. \quad (3.77)$$

Il raggio della traiettoria è:

$$r = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}, \quad (3.78)$$

che, mettendo in evidenza la massa relativistica, diventa:

$$r = \gamma \frac{m_0 v}{qB}. \quad (3.79)$$

Nel caso classico γ non è presente. Alle alte energie questo fattore è determinante per valutare l'aumentare dell'inerzia della massa. Il raggio di curvatura aumenta dunque sia all'aumentare della velocità che all'aumentare della massa. Anzi, oltre un certo valore di energia l'aumento si deve soprattutto alla massa perché la velocità rimane comunque al di sotto della velocità della luce.

Ad esempio per un valore di energia di 1 GeV si ha una variazione di massa $m/m_0 = \gamma \approx 2000$, mentre la corrispondente variazione di velocità è:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2000}\right)^2 \Rightarrow v \approx c. \quad (3.80)$$

La velocità non può andare oltre quella della luce, dunque la variazione del raggio di curvatura è determinata dal fattore γ (elettrone ultrarelativistico):

$$r = \gamma \frac{m_0 c^2}{qB}. \quad (3.81)$$

Nel caso di un elettrone non relativistico la velocità angolare, detta anche frequenza di ciclotrone, è indipendente dalla velocità:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m_0}, \quad (3.82)$$

alle alte energie invece ($v \simeq c$), la frequenza dipende dall'energia:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{\gamma m_0}. \quad (3.83)$$

Capitolo 4

Elettromagnetismo e relatività

4.1 Trasformazione della carica e della densità di corrente

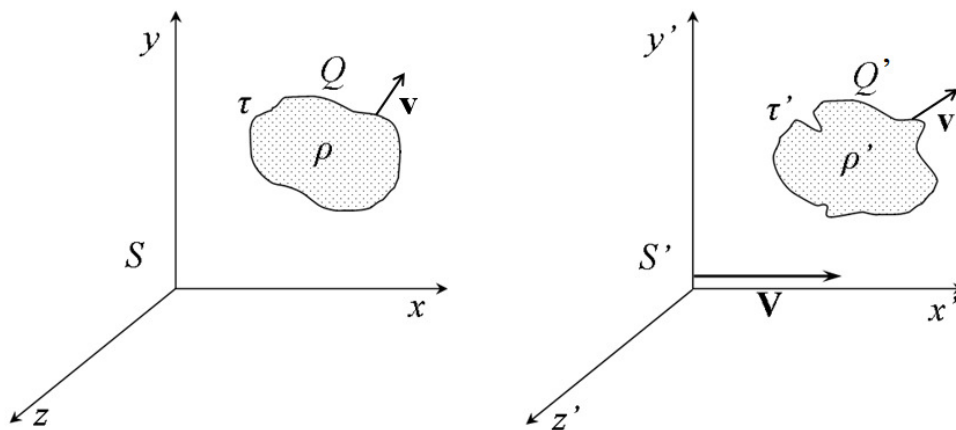


Figura 4.1: Sistemi di riferimento S e S' utilizzati per la trasformazione della carica.

Riprendiamo i due sistemi S e S' e sia \mathbf{V} la velocità di S' rispetto ad S , come rappresentato in fig. (4.1). Nel sistema S' è presente una distribuzione di carica Q' , distribuita in un volume τ' che si muove con velocità \mathbf{v}' . Vo-

gliamo ricavare, mediante le trasformazioni di Lorentz, la densità di carica nel sistema S .

Nei due sistemi le densità di carica sono:

$$\rho = \frac{Q}{\tau} \quad \text{e} \quad \rho' = \frac{Q'}{\tau'},$$

dove $Q = Q' = Q_0$, essendo la carica una quantità invariante da un sistema all'altro (per l'elettrone si ha sempre $Q_0 = 1.6 \times 10^{-19} \text{Coulomb}$).

Indichiamo inoltre con \mathbf{J} la densità di corrente, le cui componenti in S e S' possono essere espresse da:

$$\begin{aligned} J_x &= \rho v_x & J_y &= \rho v_y & J_z &= \rho v_z \\ J'_x &= \rho' v'_x & J'_y &= \rho' v'_y & J'_z &= \rho' v'_z, \end{aligned}$$

Indichiamo ora con

$$\rho_0 = \frac{Q_0}{\tau_0}$$

la distribuzione di carica in un sistema di riferimento S_0 in cui la carica è a riposo.

Applicando le trasformazioni spaziali di Lorentz, a causa della contrazione dello spazio lungo x , i volumi τ e τ' sono legati al volume τ_0 da:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\gamma_v} \quad ; \quad \tau' = \frac{\tau_0}{\gamma_{v'}},$$

mentre per le densità di carica abbiamo:

$$\rho = \rho_0 \gamma_v \quad ; \quad \rho' = \rho_0 \gamma_{v'},$$

da cui otteniamo:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\gamma_{v'}}{\gamma_v}. \quad (4.1)$$

Utilizzando la relazione (3.25):

$$\gamma_{v'} = \gamma_v \gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right),$$

otteniamo:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) \quad (4.2)$$

da cui

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \rho \frac{v_x V}{c^2} \right) = \gamma \left(\rho - \frac{V}{c^2} J_x \right) \quad (4.3)$$

e dualmente:

$$\rho = \gamma \left(\rho' + \frac{V}{c^2} J'_x \right) . \quad (4.4)$$

Per la densità di corrente si trova:

$$J'_x = \rho' v'_x = \gamma \rho \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) \frac{v_x - V}{(1 - v_x V/c^2)} = \gamma (\rho v_x - \rho V) = \gamma (J_x - V \rho) .$$

Ripetendo lo stesso procedimento per le altre due componenti si ha:

$$\begin{aligned} J'_y &= \rho' v'_y = \rho \gamma \left(1 - v_x \frac{V}{c^2} \right) \frac{v_y}{\gamma (1 - v_x \frac{V}{c^2})} = \rho v_y = J_y \\ J'_z &= J_z . \end{aligned}$$

Ricapitolando, abbiamo ricavato le relazioni tra le densità di carica e di corrente nei due sistemi di riferimento.

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma \left(\rho - \frac{V}{c^2} J_x \right) & \rho &= \gamma \left(\rho' + \frac{V}{c^2} J'_x \right) \\ J'_x &= \gamma (J_x - V \rho) & J_x &= \gamma (J'_x + V \rho') \\ J'_y &= J_y & J_y &= J'_y \\ J'_z &= J_z & J_z &= J'_z \end{aligned} \quad (4.5)$$

Osserviamo che le grandezze $(J_x, J_y, J_z, ic\rho)$ sono legate dalle stesse trasformazioni spazio-tempo relativistiche, e pertanto il quadrivettore $(\mathbf{J}, ic\rho)$ risulta un invariante, risultando:

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 - c^2 \rho^2 = \text{cost} .$$

ESEMPIO

Con questo esempio vogliamo dimostrare che il campo magnetico è un effetto relativistico. Consideriamo la distribuzione lineare di carica a riposo e infinitamente lunga disposta lungo l'asse x' in S' , come in figura (4.2).

La densità lineare di carica è:

$$\lambda' = \frac{dq'}{dx'} ; \quad (4.6)$$

il campo elettrostatico radiale è dato dalla nota espressione:

$$E'_r = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r'} \quad (4.7)$$

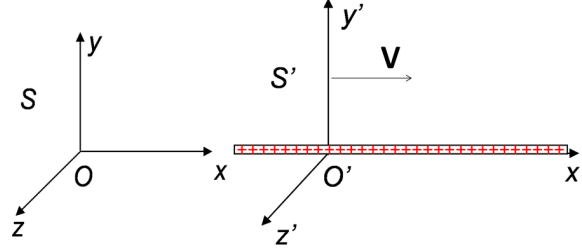


Figura 4.2: Distribuzione lineare di carica per la trasformazione di \mathbf{B} .

mentre $\mathbf{B}' = 0$.

Se il sistema S' si muove con velocità V , nel sistema S per la (4.4) (essendo $dq = \lambda dx = \rho d\tau = \rho A dx$ da cui $\rho = \frac{dq}{A dx} = \frac{\lambda}{A}$ con A sezione infinitesima del filo che simula la distribuzione), valgono le:

$$\begin{cases} \lambda = \gamma (\lambda' + \frac{V}{c^2} I') \\ I = \gamma (I' + V \lambda') \end{cases} \quad (4.8)$$

Poiché $I' = 0$, dal momento che la distribuzione di carica è ferma rispetto al sistema S' , le (4.8) divengono:

$$\begin{cases} \lambda = \gamma \lambda' \\ I = \gamma V \lambda' = V \lambda \end{cases} \quad (4.9)$$

Con tali distribuzioni di carica e corrente abbiamo:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\gamma \lambda'}{2\pi\epsilon_0 r'} = \gamma E'_r, \quad (4.10)$$

dove $r = r'$ essendo perpendicolare al moto. Si nota come il campo elettrico radiale nel sistema S risulti maggiore di quello visto nel sistema S' :

La contrazione lungo x si può rappresentare con un addensamento delle linee di campo.

D'altra parte la corrente prodotta dalle cariche in moto rispetto a S , crea in questo sistema di riferimento un campo magnetico:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 V \gamma \lambda'}{2\pi r} = \frac{V \gamma \lambda'}{2\pi\epsilon_0 r c^2} = \gamma \frac{V}{c^2} E'_r. \quad (4.11)$$

Per $V \rightarrow c$ il campo magnetico comincia ad assumere valori apprezzabili:
 $B_\varphi \simeq \gamma E'_r/c$.

4.2 Covarianza e trasformazioni dei campi

Quando le coordinate spazio e tempo delle equazioni di Maxwell sono trasformate secondo Lorentz, troviamo che esse hanno la stessa forma matematica in S e S' ; pertanto si dicono covarianti rispetto a tali trasformazioni. Utilizzando questa proprietà vediamo come si trasformano i campi passando da un sistema di riferimento ad un altro. Prendiamo ad esempio la

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

in S che, ha per componenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.12)$$

e, analogamente in S' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} &= -\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ -\frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial E'_x}{\partial z'} &= -\frac{\partial B'_y}{\partial t'} \\ \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} &= -\frac{\partial B'_z}{\partial t'} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Utilizziamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (4.14)$$

per esprimere le derivate parziali:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma V \frac{\partial}{\partial x'} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} .
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Consideriamo ora la seconda delle (4.12) che opera su B_y , sostituendo gli operatori precedenti otteniamo:

$$-\gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} + \gamma V \frac{\partial B_y}{\partial x'} = \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'}$$

cioè:

$$-\frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \right] = \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma (E_z + V B_y)] .$$

Dovendo valere allo stesso tempo anche la seconda delle (4.13), si ha:

$$\begin{aligned}
E'_x &= E_x \\
E'_z &= \gamma (E_z + V B_y) \\
B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) .
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Analogamente la terza delle (4.12) con gli operatori trasformati secondo Lorentz diventa:

$$\begin{aligned}
-\gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'} + \gamma V \frac{\partial B_z}{\partial x'} &= \gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} \\
-\frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma (E_y - V B_z)] - \frac{\partial E_x}{\partial y'} .
\end{aligned}$$

Dovendo valere la terza delle (4.13), si ha:

$$\begin{aligned}
E'_x &= E_x \\
E'_y &= \gamma (E_y - V B_z) \\
B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Per completare la relazione tra B_x e B'_x si usa la $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$:

$$\gamma \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0. \quad (4.18)$$

Valendo anche le relazioni duali delle (4.16) e (4.17):

$$\begin{aligned} B_y &= \gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right) \\ B_z &= \gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right), \end{aligned}$$

la (4.18) diventa:

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) &= 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} &= \frac{V}{c^2} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ora si procede analogamente con la prima delle (4.12):

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \gamma V \frac{\partial B_x}{\partial x'},$$

la quale, usando le duali delle (4.16) e (4.17):

$$\begin{aligned} E_z &= \gamma(E'_z - V B'_y) \\ E_y &= \gamma(E'_y + V B'_z), \end{aligned}$$

diventa:

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - V \frac{\partial B'_y}{\partial y'} \right) - \gamma \left(\frac{\partial E'_y}{\partial z'} + V \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) &= -\gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - V \frac{\partial B_x}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} - V \left(\frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial x'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial x'} &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Affinché valgano sia la (4.19) sia la (4.20), essendo $V \neq c$, deve risultare:

$$\frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial x'} = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B_x}{\partial t'} . \quad (4.21)$$

Inoltre, nel sistema di riferimento S' si ha:

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \implies \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'} ,$$

da cui concludiamo che:

$$B'_x = B_x . \quad (4.22)$$

Ricapitolando:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - VB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \\ B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{V}{c^2}E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{V}{c^2}E_y) \end{cases} \quad \begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + VB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - VB'_y) \\ B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z) \\ B_z = \gamma(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y) \end{cases} . \quad (4.23)$$

Indicando con \parallel e \perp le direzioni parallela e perpendicolare a \mathbf{V} e tenendo presente che $(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_{\parallel}$ e $(\mathbf{V} \times \mathbf{E}/c^2)_{\parallel}$ sono entrambi nulli, le (4.23) possono essere espresse nella forma vettoriale:

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_{\parallel} = (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = (\mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}/c^2)_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}/c^2)_{\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E}' - \mathbf{V} \times \mathbf{B}')_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}' - \mathbf{V} \times \mathbf{B}')_{\perp} \\ \mathbf{B}_{\parallel} = (\mathbf{B}' + \mathbf{V} \times \mathbf{E}'/c^2)_{\parallel} \\ \mathbf{B}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}' + \mathbf{V} \times \mathbf{E}'/c^2)_{\perp} \end{cases} . \quad (4.24)$$

4.3 Quadrivettore potenziale

Riprendiamo le equazioni (1.24) e (1.27) per i potenziali in S :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} . \end{aligned}$$

Introducendo l'operatore *D'Alambertiano*:

$$\begin{aligned}
\Box^2 &= \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \\
&= \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{V^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) = \\
&= \gamma^2 (1 - \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \gamma^2 (1 - \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \Box'^2, \quad (4.25)
\end{aligned}$$

possiamo scrivere le equazioni per i potenziali in forma compatta:

$$\Box^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.26)$$

$$\Box^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.27)$$

Inoltre, poiché tali equazioni, come le equazioni di Maxwell, sono invarianti per trasformazioni relativistiche, si ha anche che:

$$\Box'^2 \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{J}' \quad (4.28)$$

$$\Box'^2 \phi' = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0}, \quad (4.29)$$

che possono essere riscritte nella forma:

$$\Box^2 \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{J}' \quad (4.30)$$

$$\Box^2 \phi' = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0}. \quad (4.31)$$

Applicando sulla destra le trasformazioni (4.5) si ottiene:

$$\begin{cases}
\Box^2 A'_x = -\mu_0 \gamma (J_x - V \rho) \\
\Box^2 A'_y = -\mu_0 J_y \\
\Box^2 A'_z = -\mu_0 J_z \\
\Box^2 \phi' = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} \left(\rho - \frac{V}{c^2} J_x \right).
\end{cases} \quad (4.32)$$

Sommando alla quarta delle (4.32) la prima moltiplicata per V si ha:

$$\Box^2 (\phi' + V A'_x) = -\frac{\rho}{\gamma \varepsilon_0}. \quad (4.33)$$

Sommando alla prima delle (4.32) la quarta moltiplicata per V/c^2 si ha:

$$\square^2 \left(A'_x + \frac{V}{c^2} \phi' \right) = -\frac{\mu_0}{\gamma} J_x . \quad (4.34)$$

Le equazioni (4.32) si possono così riscrivere come:

$$\begin{cases} \square^2 \gamma \left(A'_x + \frac{V}{c^2} \phi' \right) = -\mu_0 J_x \\ \square^2 A'_y = -\mu_0 J_y \\ \square^2 A'_z = -\mu_0 J_z \\ \square^2 \gamma (\phi' + V A'_x) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} , \end{cases} \quad (4.35)$$

che, confrontate con le (4.26) e (4.27) danno:

$$\begin{cases} A_x = \gamma A'_x + \beta \gamma \frac{\phi'}{c} \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z \\ \phi = \gamma \phi' + \gamma V A'_x , \end{cases} \quad (4.36)$$

che possono essere riscritte come:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ i \frac{\phi}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \\ i \frac{\phi'}{c} \end{pmatrix} . \quad (4.37)$$

Il *quadrivettore potenziale* definito da $(\mathbf{A}, j \frac{\phi}{c})$ è un invariante, infatti risulta:

$$A^2 - \frac{\phi^2}{c^2} = \text{costante} .$$

4.4 Campo e. m. di una carica in moto rettilineo uniforme

Con riferimento alla figura (4.3), consideriamo una carica q in quiete nel sistema di riferimento S' dotato di moto relativo, rispetto ad S , con velocità $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{i}}$. Il campo elettromagnetico generato in S' è:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \\ \mathbf{B}' &= 0 . \end{aligned}$$

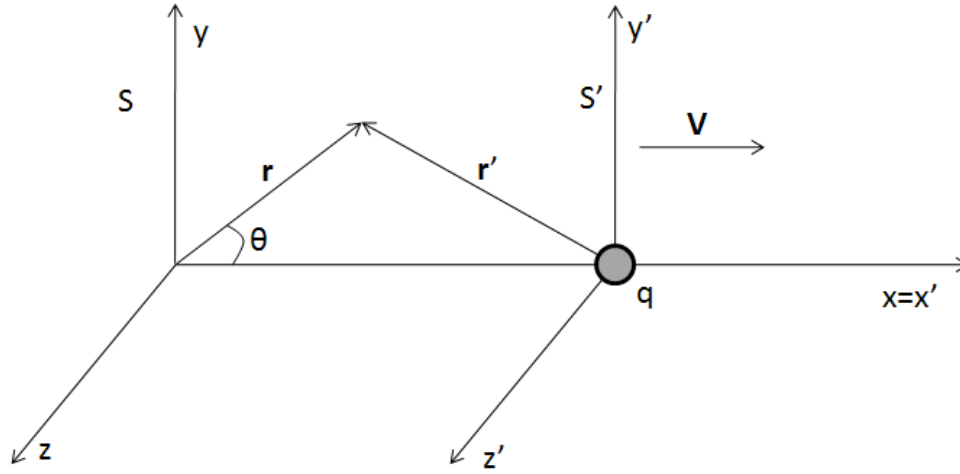


Figura 4.3: Carica q nel sistema S' ed osservata in S .

Prendiamo in considerazione la componente E_x del campo elettrico, che nel sistema S , per le (4.23), è espresso da:

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q\gamma(x - Vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (4.38)$$

e per $t=0$ diventa

$$E_x = \frac{q\gamma x}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \cdot \quad (4.39)$$

Per le altre due componenti si ha

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{\gamma q y'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{\gamma q y}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (4.40)$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{\gamma q z'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{\gamma q z}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \cdot \quad (4.41)$$

Effettuiamo il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ \sqrt{y^2 + z^2} = \rho = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.42)$$

Con le (4.42), la (4.39) diventa

$$E_x = \frac{\gamma q r \cos \theta}{4\pi\epsilon_0[r^2\gamma^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta/\gamma^2)]^{3/2}} = \frac{q r \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3 \gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \cdot \quad (4.43)$$

La componente del campo elettrico sul piano yz può essere espressa come

$$\mathbf{E}_\rho = E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}} = \frac{\gamma q (y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}})}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (4.44)$$

e considerandone il modulo, tenendo conto delle (4.42), otteniamo

$$E_\rho = \frac{\gamma q r \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{q r \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3 \gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}. \quad (4.45)$$

Il campo elettrico totale in S può essere espresso, per le (4.43) e (4.44), da

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3 \gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}},$$

ossia

$$\mathbf{E} = \left(\frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}. \quad (4.46)$$

Per quanto riguarda \mathbf{B} , esso si può facilmente ricavare a partire dalle (4.23). Poiché $\mathbf{B}' = 0$, si ottiene

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{V}{c^2} \gamma E'_z \\ B_z = \frac{V}{c^2} \gamma E'_y. \end{cases} \quad (4.47)$$

Inoltre, sempre per le (4.23), si ha che $\gamma E'_y = E_y$ e $\gamma E'_z = E_z$. Il campo \mathbf{B} diventa quindi

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{V}{c^2} E_z \\ B_z = \frac{V}{c^2} E_y. \end{cases} \quad (4.48)$$

Poiché \mathbf{V} è diretto lungo x , queste relazioni possono essere scritte in termini vettoriali come

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (4.49)$$

Facciamo, a questo punto, qualche considerazione sulla (4.46):

- se la carica q è ferma anche nel sistema S ($\beta = 0$), il campo elettrico osservato coincide con quello in S' , ossia è il noto \mathbf{E}_0 elettrostatico generato da una carica in quiete;
- per $\beta \neq 0$ e $\theta = 0$, ossia consideriamo la componente E_x lungo la direzione del moto della carica q , l'intensità del campo diventa molto più debole che nel caso stazionario: E_x risulta avere come fattore di proporzionalità $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$ che, se la q è relativistica, ha un valore molto inferiore all'unità;

- per $\beta \neq 0$ sia $\theta = \frac{\pi}{2}$, ossia prendiamo in esame la componente E_ρ , ortogonale al moto della carica. Essa risulta molto più intensa rispetto al caso $\beta = 0$; E_ρ viene ad avere come fattore di proporzionalità γ , che per un regime relativistico è molto grande.

Riportiamo, di seguito, una tabella che riassume le considerazioni appena fatte:

$\beta = 0$	\Rightarrow	$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$	(4.50)
$\beta \neq 0 \theta = 0$	\Rightarrow	$E_x = \frac{1}{\gamma^2} E_{x_0}$	
$\beta \neq 0 \theta = \frac{\pi}{2}$	\Rightarrow	$E_\rho = \frac{E_{\rho_0}}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \gamma E_{\rho_0}$	

Abbiamo ritrovato, pertanto, tramite trattazione relativistica dell'elettromagnetismo, il risultato già esposto nel paragrafo (1.4): se la carica q ha una velocità all'incirca pari a quella della luce c , la sua distribuzione di campo elettromagnetico, osservata in S , tende a concentrarsi tutta sul piano trasverso alla direzione del moto.

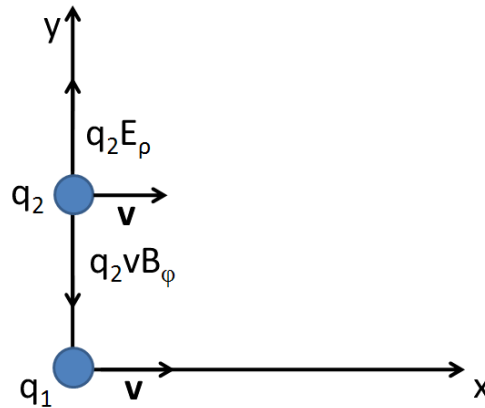


Figura 4.4: *Interazione tra due cariche q uguali in moto con velocità v .*

In figura (4.4), abbiamo una carica q_1 in moto rettilineo uniforme a velocità \mathbf{v} ; vogliamo ricavare la forza che subisce una carica q_2 , ad esempio di uguale polarità, che si muove parallelamente e con la stessa velocità \mathbf{v} .

Sia

$$\mathbf{F}_{12} = q_2(\mathbf{E}_\rho + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\varphi), \quad (4.51)$$

la *forza di Lorentz* che sente la carica q_2 , dove \mathbf{E}_ρ e \mathbf{B}_φ sono, rispettivamente, il campo elettrico e il campo induzione magnetica generati da q_1 ed agenti su q_2 (l'uno radiale e l'altro circonferenziale, essendo le due cariche parallele fra

loro). Tenendo presente le equazioni (4.10), (4.11) e (4.50), la (4.51) diventa

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_\rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{q_2 \mathbf{E}_\rho}{\gamma^2} = \frac{q_2 \mathbf{E}_{\rho_0}}{\gamma} \hat{\rho}. \quad (4.52)$$

Osserviamo dalla (4.52) che la forza diminuisce di un fattore $1/\gamma$ rispetto a quella elettrostatica. Questo fattore è dovuto all'azione del campo magnetico che genera una forza di attrazione tra le cariche. Se $\gamma \rightarrow \infty$, la carica q_2 non risente alcuna forza. Lo stesso ragionamento vale, dualmente, anche per q_1 e quindi è come se le due cariche non interagissero fra di loro. È bene osservare che le accelerazioni radiali delle cariche subiscono anch'esse una diminuzione, pertanto le cariche si allontaneranno tra loro più lentamente quando sono in moto. Ciò può essere visto anche come una conseguenza della dilatazione del tempo per gli orologi in S' in moto rispetto ad S .

4.5 I potenziali ritardati

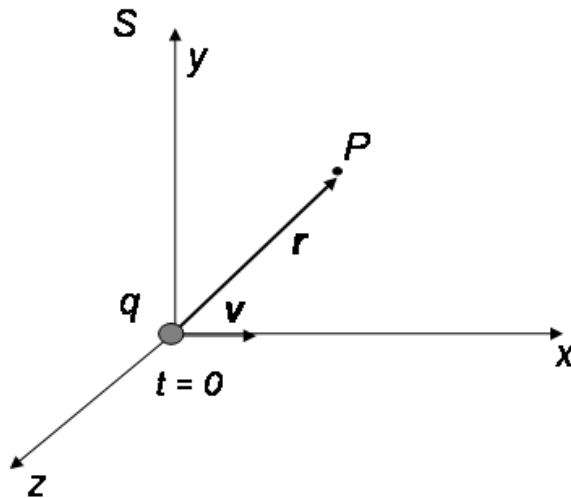


Figura 4.5: Sistema di riferimento per la determinazione dei potenziali ritardati.

Spesso è conveniente per la risoluzione delle equazioni di Maxwell introdurre il potenziale scalare ϕ ed il potenziale vettore \mathbf{A} . Le relazioni che

legano tali grandezze al campo elettrico e all'induzione magnetica sono:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (4.54)$$

Consideriamo una particella carica q puntiforme che si muove con velocità \mathbf{v} lungo l'asse x di un sistema inerziale S , come mostrato in figura (4.5). Sia q nell'origine di tale sistema al tempo $t = 0$ e P , il punto di coordinate $(x, y, z, t = 0)$ a distanza \mathbf{r} dall'origine, in cui vogliamo determinare il campo elettrico e magnetico. Le espressioni per il campo elettrico ed il campo magnetico di una carica puntiforme in moto con velocità uniforme (4.46) e (4.49), sono state ricavate considerando le trasformazioni di Lorentz, il principio di costanza della carica elettrica e la legge di Coulomb, come assiomi. Il campo elettrico, usando le espressioni (4.39) - (4.41), può essere riscritto come

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\gamma^2s^3} \quad (4.55)$$

con

$$s = \sqrt{x^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\gamma^2}} . \quad (4.56)$$

Questa espressione di \mathbf{E} , unitamente alla (4.49) per \mathbf{B} , può essere ricavata anche a partire dai potenziali scalare e vettore, assumendoli pari a

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0s} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0c^2s} , \quad (4.58)$$

Supponendo $\mathbf{v} = v\hat{i}$, il potenziale vettore ha componente solo lungo x . Inoltre, ad un tempo t generico si ha

$$s = \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\gamma^2}} , \quad (4.59)$$

da cui

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x - vt}{s} \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -v \frac{x - vt}{s} = -v \frac{\partial s}{\partial x} \quad (4.61)$$

e quindi anche

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = -v \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (4.62)$$

Dunque la componente x della (4.53) si può scrivere come

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 s} \right). \quad (4.63)$$

e poichè v è costante, allora:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} \right) = -\frac{x}{s^3}. \quad (4.64)$$

Sostituendo nell'equazione (4.63) si ottiene

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3}. \quad (4.65)$$

Allo stesso modo, e ricordando che $A_y = A_z = 0$, si ottengono E_y ed E_z . Combinandole insieme si ricava l'eq. (4.55).

Per quanto riguarda \mathbf{B} , poichè $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ed \mathbf{A} ha solo la componente lungo x , possiamo scrivere

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (4.66)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qvx}{4\pi\epsilon_0 c^2 s} \right). \quad (4.67)$$

Essendo

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{z}{\gamma^2 s^3}$$

la (4.67) diventa

$$B_y = -\frac{qvz}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 c^2 s^3},$$

ed usando la componente lungo z della (4.55), otteniamo:

$$B_y = -\frac{vE_z}{c^2} \quad (4.68)$$

e allo stesso modo

$$B_z = \frac{vE_y}{c^2}. \quad (4.69)$$

Poichè la \mathbf{v} ha solo la componente x , le equazioni (4.66), (4.68), (4.69) possono essere combinate nell'equazione vettoriale

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}.$$

Abbiamo così dimostrato che le eq. (4.57) e (4.58) rappresentano i potenziali scalare e vettore di una carica puntiforme in moto con velocità v .

Dal momento che il potenziale vettore viene scritto come

$$A_x = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 s} ; A_y = 0 ; A_z = 0 ,$$

allora

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s} \right) . \quad (4.70)$$

Operando sul potenziale scalare dato dalla (4.57), otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s} \right) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s} \right) . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Sommate, le equazioni (4.70) e (4.71) danno

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (4.72)$$

Questa relazione è nota come *Condizione di Lorentz* ed è soddisfatta dai potenziali trovati.

Consideriamo, adesso, la quantità s definita in (4.56); si ha:

$$s^2 = x^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = r^2 - (y^2 + z^2) \frac{v^2}{c^2} \neq r^2 \quad (4.73)$$

pertanto, cos'è s ? È utile a questo punto fare delle considerazioni sul campo presente nel punto P ad un istante t . Poiché la carica in istanti precedenti al tempo t , genera comunque campo, allora, per all'istante t , nel punto P è presente un campo generato dalla carica all'istante $t' = t - R/c$ [vedi figura (4.6)]. Come si vede in figura (4.7) è possibile esprimere s come:

$$s^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \theta \frac{v^2}{c^2} ,$$

essendo

$$y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta .$$

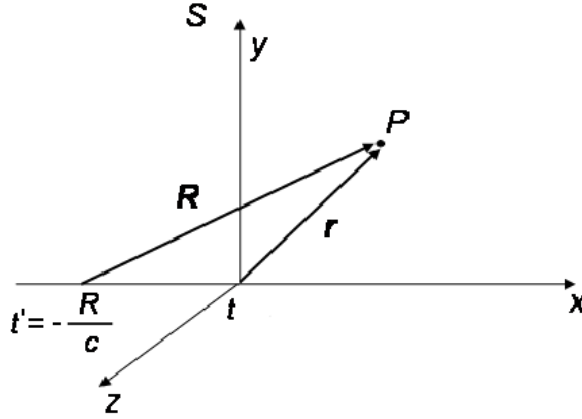


Figura 4.6: Relazione tra $R(t' = -R/c)$ e $r(t = 0)$

Inoltre dal teorema dei seni si ricava che:

$$\frac{R}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{v|t'|}{\sin \alpha},$$

per cui sostituendo $|t'|$ si ottiene:

$$\frac{v}{c} \sin \theta = \sin \alpha.$$

Ne deriva che

$$s^2 = r^2(1 - \sin^2 \alpha) = r^2 \cos^2 \alpha.$$

Osservando la figura (4.8), possiamo quindi concludere che:

$$s = R(t') - v|t'| \cos \delta,$$

poiché

$$\begin{cases} \cos \delta = \hat{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \\ |t'| = \frac{R}{c} \end{cases} \implies s = R(t') - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \quad (4.74)$$

si ottengono infine quelli che sono noti come *Potenziali di Lienard Wiechert*:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [R(t') - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}]} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 [R(t') - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}]} \quad (4.76)$$

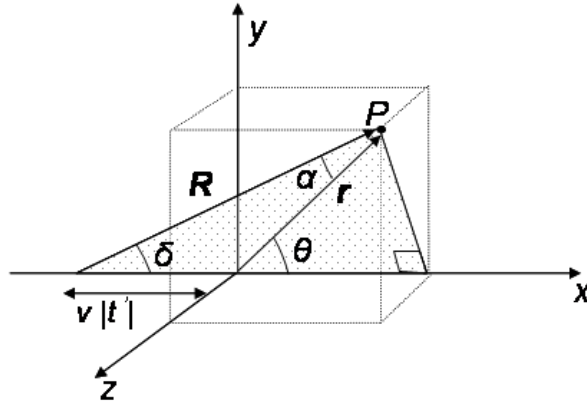


Figura 4.7: Angoli utilizzati per il legame tra R e r .

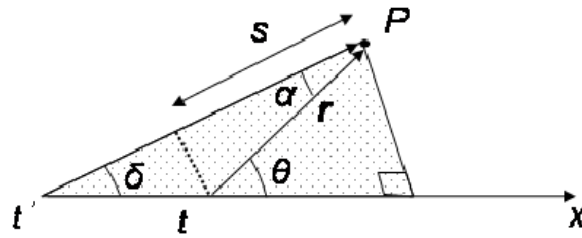


Figura 4.8: Particolare della figura (4.7) e determinazione di s .

Sostituendo i potenziali trovati nell'equazione (4.53) si ottiene il campo elettrico. In realtà va aggiunto un termine che considera il fatto che se la carica accelera (velocità variabile) allora viene emessa radiazione (vedi ref. [9]):

$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{R} - \frac{R}{c}\mathbf{v})}{4\pi\epsilon_0\gamma^2[R(t') - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}]^3} + \frac{q\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - \frac{R}{c}\mathbf{v}) \cdot \dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0c^2[R(t') - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}]^3}, \quad (4.77)$$

dove

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}, \quad t' = t - \frac{R(t')}{c}$$

e il secondo termine nel campo elettrico rappresenta la parte radiativa.

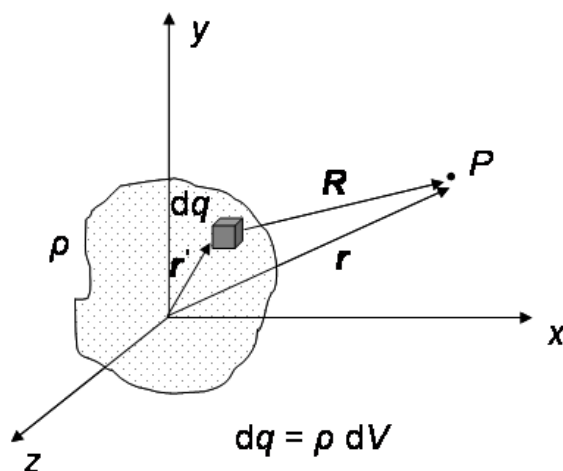


Figura 4.9: Determinazione del campo in P da una distribuzione di carica attraverso i potenziali ritardati.

Per ottenere i potenziali relativi ad una distribuzione di carica, come in figura (4.9), è necessario partire dall'equazione già vista in precedenza:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Esprimendo il laplaciano in coordinate sferiche e considerando il potenziale radiale (in quanto prodotto da un volumetto infinitesimo) si ha:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.78)$$

Prendendo

$$\phi = \frac{\chi(R)}{R},$$

si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = -\frac{\chi(R)}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \chi(R)}{\partial R}$$

e sostituendo nell'equazione (4.78) si ha:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(-\chi(R) + R \frac{\partial \chi(R)}{\partial R} \right) - \frac{1}{Rc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(R) = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \chi(R)}{\partial R} \right) - \frac{1}{Rc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(R) = 0,$$

ed infine

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\chi(R) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(R) = 0 .$$

Prendendo $\chi(t-R/c)$, e di conseguenza $\phi = \chi(t-R/c)/R$, e avvicinandosi al volumetto, cioè facendo il limite per $R \rightarrow 0$ si ha che

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial R^2}\chi(R) \gg \frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(R) \implies \frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(R) = 0$$

e infine

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV$$

Capitolo 5

Elettrodinamica relativistica

5.1 Richiami di meccanica analitica

Come è noto, nella meccanica classica il moto di un sistema di N particelle soggetto a vincoli può essere risolto a partire dal sistema di N equazioni differenziali vettoriali ($3N$ equazioni scalari)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)}, (i = 1, \dots, N) \quad (5.1)$$

dove m_i è la massa della particella i -esima (non relativistica), \mathbf{r}_i il raggio vettore che descrive la sua posizione, \mathbf{F}_{ji} la forza interna al sistema che la particella j -esima esercita sulla i -esima e infine $\mathbf{F}_i^{(e)}$ la risultante delle forze esterne che agisce su quest'ultima.

Al sistema di equazioni (5.1) vanno poi aggiunte le equazioni che descrivono i vincoli, che limitano il moto del sistema.

Se le condizioni imposte dai vincoli danno delle equazioni del tipo

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (5.2)$$

si dice che i vincoli sono **olonomi**.

Se le condizioni imposte dai vincoli non sono matematicamente esprimibili in una forma del tipo (5.2) allora si dice che i vincoli sono **anonomi**¹.

¹In alcuni testi (ad esempio P.G.Bordoni, *Lezioni di meccanica razionale*, Zanichelli) si definisce olonomo un vincolo esprimibile nella forma $f(r_1, \dots, r_N, t) \geq 0$; nel caso in

Fra tutti i possibili vincoli olonomi espressi dalla (5.2) occorre distinguere ancora fra quelli in cui si ha o meno una esplicita dipendenza dal tempo, che sono detti rispettivamente *reonomi* o *scleronomi*.

I vincoli introducono delle condizioni sulle coordinate \mathbf{r}_i , che dunque non risultano più indipendenti fra loro. Dato un sistema di N particelle soggetto a k vincoli olonomi fra loro indipendenti,

$$\begin{cases} f_1(r_1, \dots, r_N) = 0 \\ \vdots \\ f_k(r_1, \dots, r_N) = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

esso è rappresentabile con sole $3N - k$ coordinate indipendenti, ovvero ha $3N - k$ gradi di libertà; matematicamente², dire che k vincoli sono fra loro indipendenti equivale a dire che lo jacobiano

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix}$$

di dimensioni $k \times 3N$ ha rango massimo.

Ad esempio, se sono dati i due vincoli

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

essi chiaramente non sono indipendenti fra loro, e infatti lo jacobiano ha rango unitario:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Come detto, se l'indipendenza dei vincoli è garantita, come noi supporremo, allora è possibile esprimere k variabili in funzione delle rimanenti $3N - k$ variabili indipendenti. Generalmente è conveniente introdurre nuove $3N - k$ variabili indipendenti $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ che sono dette **coordinate generalizzate**, in funzione delle quali le vecchie coordinate r_1, \dots, r_N sono espresse da relazioni del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, \dots, q_{3N-k}, t). \end{cases} \quad (5.4)$$

cui valga l'uguaglianza si parla di *vincolo bilaterale*, altrimenti di *vincolo unilaterale*, che rappresenta il caso dell'appoggio ad una superficie; il primo coincide con la definizione da noi data nella (5.2).

² Si tratta del teorema del Dini.

5.2 Il principio dei lavori virtuali

Supponiamo che il nostro insieme di N particelle sia in equilibrio. Ciò significa che la forza totale che agisce su ogni singola particella deve essere nulla:

$$\mathbf{F}_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N .$$

Preso un vettore $\delta \mathbf{r}_i$, è chiaro che deve valere anche:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 , \quad (5.5)$$

qualsiasi sia la scelta del vettore $\delta \mathbf{r}_i$ trattandosi della somma di elementi tutti nulli.

Ricordando che la forza che agisce su ciascuna particella può essere decomposta in un'azione dovuta alle forze attive $\mathbf{F}^{(a)}$ ed una dovuta alle forze vincolari \mathbf{f} , la (5.5) può essere riscritta come segue:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (5.6)$$

Supponendo che i vincoli siano privi di attrito è possibile semplificare notevolmente la (5.6) se per i vettori $\delta \mathbf{r}_i$ si prendono gli **spostamenti virtuali**, definiti come gli spostamenti corrispondenti ad una arbitraria variazione infinitesima $\delta \mathbf{r}_i$ delle coordinate, compatibile con le forze e i vincoli imposti al sistema all'istante dato t .

In questo caso gli spostamenti virtuali sono tangenti alla superficie³, mentre le forze vincolari sono ortogonali ad essa, e il secondo termine a primo membro della (5.6) si annulla.

ESEMPIO

Mostriamo che per un elemento vincolato ad una superficie che varia con legge

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (5.7)$$

in generale le velocità possibili non risultano tangenti alla superficie, a differenza delle velocità virtuali. Infatti, derivando la (5.7) rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 ,$$

³Questo perchè nella (5.2) si fa riferimento a un vincolo che impone alla particella di essere sempre in contatto con la superficie (è cioè un vincolo *bilaterale*, vedi nota 1).

da cui

$$C\hat{n} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad (5.8)$$

dove C è una costante e \hat{n} è il versore normale alla superficie. Vediamo dalla (5.8) che le velocità possibili non sono tangenti alla superficie nei punti in cui $\partial\varphi/\partial t \neq 0$.

Al contrario, per vincoli non dipendenti dal tempo la (5.7) si riduce a

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

e la (5.8) a

$$\hat{n} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

dunque le velocità possibili sono tutte tangenti alla superficie. Poichè nel definire le velocità virtuali si fa riferimento a un istante fissato, segue che le velocità virtuali sono sempre tangenti alla superficie.

Siamo in grado ora di esprimere il **principio dei lavori virtuali**: in un sistema particellare all'equilibrio il lavoro virtuale delle forze attive è nullo,

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (5.9)$$

La (5.9) è valida solo nel caso statico, ma può essere facilmente generalizzata al caso dinamico, notando che quest'ultimo può essere ricondotto al caso statico scrivendo al posto della (5.5) la

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Infine, considerando ancora solo il caso in cui il lavoro delle forze vincolari è nullo,

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (5.10)$$

relazione che è nota con il nome di **principio di D'Alembert**.

L'utilità della (5.10) sta nel consentire di risolvere il moto del sistema eliminando le incognite costituite dalle reazioni vincolari. Lo svantaggio è che le reazioni vincolari non possono essere valutate in questa maniera.

In realtà, la (5.10) è ancora in una forma che non può essere utilizzata per ricavare le equazioni del moto del sistema, dal momento che gli spostamenti virtuali $\delta \mathbf{r}_i$ non sono fra loro indipendenti, a meno che non ci siano vincoli nel qual caso la (5.10) si riduce ad imporre

$$\mathbf{F}_i^{(a)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

che è proprio il sistema delle equazioni di Newton (5.1), poichè in questo caso la forza attiva coincide con la forza totale che agisce sulla particella i -esima.

5.3 Equazioni di Lagrange

Trasformiamo la (5.10) in una espressione che faccia apparire gli spostamenti virtuali delle coordinate generalizzate. Essendo queste coordinate indipendenti l'una dall'altra (per vincoli olonomi) i coefficienti dei termini δq_j dovranno essere separatamente uguali a zero.

Se il numero delle coordinate indipendenti è pari ad n , scriveremo

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1(t), \dots, q_n(t), t), \quad (5.11)$$

che ci permette di scrivere l'espressione delle velocità possibili come derivata di una funzione composta del tempo t :

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (5.12)$$

mentre lo spostamento virtuale arbitrario $\delta \mathbf{r}_i$ è dato da

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

dove manca il termine in δt trattandosi di uno spostamento virtuale.

In funzione delle coordinate generalizzate, il lavoro virtuale delle $\mathbf{F}_i^{(a)}$ diventa:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

che, ponendo

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

si semplifica nella

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j .$$

Le Q_j sono chiamate componenti della **forza generalizzata** e non hanno necessariamente le dimensioni di una forza. Tuttavia $Q_j \delta q_j$ ha sempre le dimensioni di un lavoro.

Scriviamo ora l'altro termine della (5.10):

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j . \quad (5.13)$$

Ora notiamo che

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} . \quad (5.14)$$

Ancora, ricordando la (5.11) possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} ,$$

che, per la (5.12) è uguale a $\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j$. Inoltre, sempre dalla (5.12) si vede che

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} .$$

Sostituendo queste relazioni nella (5.14), si ha

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\} . \quad (5.15)$$

A questo punto, notiamo che

$$m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

e, analogamente,

$$m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) .$$

Applicando queste due ultime relazioni alla (5.15) e poi sostituendo alla (5.13), il principio di D'Alembert (5.10) diventa

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \quad (5.16)$$

in cui $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ è pari all'energia cinetica totale del sistema.

La (5.16) è l'espressione alla quale volevamo arrivare. Se a questo punto ipotizziamo che i vincoli sono olonomi e le q_j indipendenti, ogni spostamento virtuale δq_j è indipendente da δq_k (per $k \neq j$) e pertanto la (5.16) è vera se e soltanto se è uguale a zero ciascun termine della sommatoria:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.17)$$

Se il sistema è conservativo possiamo scrivere

$$\mathbf{F}_i^{(a)} = -\nabla_i V,$$

dove $V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ è l'energia potenziale del sistema e l'indice i sull'operatore gradiente sta a indicare che le derivate sono fatte rispetto alle componenti di \mathbf{r}_i , da cui:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= - \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial q_j} - \dots - \frac{\partial V}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial y_N} \frac{\partial y_N}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial z_N} \frac{\partial z_N}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

In breve,

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (5.18)$$

Le equazioni (5.17) diventano allora

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

che, notando che il potenziale dipende solo dalle coordinate q_j , può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

Definendo la **Lagrangiana** L come

$$L = T - V$$

le (5.19) diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.20)$$

che sono dette le **equazioni di Lagrange**.

In realtà è possibile arrivare alla (5.20) anche se le forze attive non sono conservative, purchè la forza generalizzata sia esprimibile come

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (5.21)$$

In questo caso la funzione $U = U(q_j, \dot{q}_j)$ è detta **potenziale generalizzato**, e la (5.20) è ottenibile ponendo ancora

$$L = T - U.$$

Aggiungiamo che il vettore \mathbf{P} di componenti definite dalle

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.22)$$

è detto **momento generalizzato** ed ha sempre le dimensioni di una quantità di moto, pur non avendo in generale il significato fisico di una quantità di moto.

Lagrangiana di una particella in un c.e.m.

L'espressione della forza a cui è soggetta una particella in un campo elettromagnetico è data dalla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}\right). \quad (5.23)$$

Ponendoci in un sistema di coordinate cartesiane, scriviamo la componente della (5.23) lungo x :

$$F_x = q \left[-\nabla_x \phi - \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x \right]. \quad (5.24)$$

Analizziamo meglio il termine $(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x$:

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = q \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right].$$

Sommando e sottraendo $v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x &= \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - \\ &\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \left(\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

dove si è utilizzata la relazione

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

A questo punto riscriviamo la (5.24),

$$\begin{aligned} F_x &= \left[-\nabla_x \phi - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] = \\ &= q \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} \right) = q \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Notando che

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \phi) \right],$$

possiamo riscrivere la (5.26) come

$$F_x = q \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_x} (\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Confrontando con la (5.21) osserviamo che, definendo $U = q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, la

$$L = T - U = T - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (5.27)$$

rappresenta la Lagrangiana della particella in un campo elettromagnetico.

ESEMPIO

Vediamo quali sono le equazioni di Lagrange per una particella inizialmente ferma ($v_x = v_y = v_z = 0$ per $t = 0$) soggetta ad un campo elettrico

lungo la direzione x . Il problema si riduce ad essere unidimensionale, per cui l'espressione della Lagrangiana è (cfr. (5.27))

$$L = T - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2}mv_x^2 - q\phi(x) + qv_xA_x. \quad (5.28)$$

Ponendo come unica coordinata lagrangiana la ascissa x , ($j = 1, q_1 = x$) le equazioni di Lagrange (5.20) si riducono all'unica equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (5.29)$$

essendo $\dot{x} = v_x$. Notiamo che la quantità

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + qA_x = p_x + qA_x = P_x \quad (5.30)$$

dove P_x rappresenta la componente lungo x del **momento generalizzato**

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}, \quad (5.31)$$

dato dalla quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ della particella (termine conservativo) più il termine non conservativo $q\mathbf{A}$. Considerando separatamente i due addendi della (5.29)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{dp_x}{dt} + q \frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial P_x}{\partial t} \quad (5.32)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (5.33)$$

la (5.29) diventa

$$\frac{dp_x}{dt} + q \frac{dA_x}{dt} + q \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (5.34)$$

Ricordando che

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

la (5.34) può essere riscritta come

$$\frac{dp_x}{dt} = q \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} \right) = qE_x,$$

che è l'ovvia equazione del moto cercata.

Lagrangiana relativistica di una particella

Riferiamoci dapprima al caso classico considerando per il momento una Lagrangiana il cui potenziale sia del tipo (5.18), cioè indipendente dalla velocità. Prendendo come coordinate lagrangiane le variabili cartesiane x, y, z e derivando la Lagrangiana rispetto alla velocità otteniamo

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial v_x} = p_x = m_0 v_x, \quad (5.35)$$

e analogamente per le altre due componenti v_x e v_y .

Il riferimento ad una trattazione classica è evidente nel fatto che nella (5.35) la massa è una costante m_0 . Volendo generalizzare al caso relativistico, dovrà risultare (e qui supponiamo ancora il potenziale indipendente dalla velocità)

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = p_x = \gamma m_0 v_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}},$$

da cui, integrando, si ottiene per L la forma

$$-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (5.36)$$

alla quale si arriva anche considerando le derivate rispetto v_y e v_z .

Passando a considerare la Lagrangiana relativistica di una particella in un campo elettromagnetico (in cui il potenziale stavolta dipende dalla velocità) scriveremo dunque

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}; \quad (5.37)$$

5.4 La funzione Hamiltoniana

Consideriamo un sistema descritto da una Lagrangiana che non dipende esplicitamente dal tempo

$$L = L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

per la quale si ha

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right). \quad (5.38)$$

Lungo le soluzioni del moto valgono le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

e la (5.38) diventa

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n P_j \dot{q}_j \right), \quad (5.39)$$

avendo usato l'espressione del momento generalizzato (5.22).

La (5.39) ci permette di affermare che lungo le soluzioni del moto si ha

$$\frac{d}{dt} (P_j \dot{q}_j - L) = 0,$$

da cui

$$\sum_{j=1}^n P_j \dot{q}_j - L = \text{cost},$$

cioè la funzione **Hamiltoniana** definita come

$$H = \sum_{j=1}^n P_j \dot{q}_j - L \quad (5.40)$$

è un *integrale primo del moto*, cioè è costante lungo le soluzioni del moto.

In molti casi l'Hamiltoniana ha un interessante significato fisico. Consideriamo a tal proposito un sistema in cui i vincoli siano indipendenti dal tempo, e scriviamo per esso la quantità:

$$\sum_{j=1}^n P_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (5.41)$$

In generale l'espressione dell'energia cinetica è (cfr.(5.12))

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \\ &= a + \sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \end{aligned}$$

dove le quantità a, a_j, a_{jk} sono tali che

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 ,$$

$$a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} ,$$

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} .$$

Quindi in generale l'energia cinetica è la somma di un termine costante rispetto alle velocità generalizzate e di un termine lineare e quadratico in esse:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 .$$

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo allora

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$$

e l'energia cinetica si riduce ad una forma quadratica omogenea delle velocità generalizzate:

$$T \equiv T_2 = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k .$$

Sotto questa ipotesi la (5.41) diventa

$$\sum_{j=1}^n P_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T . \quad (5.42)$$

Finalmente, applicando la (5.42), la (5.40) può essere riscritta come

$$H = 2T - (T - U) = T + U = \mathcal{E} ,$$

dove \mathcal{E} è l'energia meccanica.

Possiamo dunque affermare che l'Hamiltoniana coincide con l'energia ed è un integrale primo del moto quando valgono le seguenti ipotesi:

1. vincoli olonomi privi di attrito;
2. forze attive conservative o tali per cui sia possibile definire un potenziale generalizzato (vedi (5.21));

3. Lagrangiana indipendente dal tempo;
4. vincoli indipendenti dal tempo.

Ricapitolando, le condizioni 1. e 2. ci hanno permesso di arrivare alle equazioni di Lagrange; aggiungendo la condizione 3. si può affermare che esiste un integrale primo del moto, detto Hamiltoniana; infine l'ulteriore condizione 4. porta a concludere che questa funzione coincide con l'energia.

5.4.1 Le equazioni di Hamilton

E' possibile seguire più di un metodo per arrivare alle equazioni di Hamilton. In questi appunti seguiremo un approccio variazionale, definendo anzitutto l'**integrale di azione** come⁴

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt, \quad (5.43)$$

con le condizioni agli estremi $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$.

Il **principio di minima azione** (o *principio di Hamilton*) postula che la traiettoria seguita da una particella nel suo moto sia tale da rendere minimo il funzionale (5.43), per cui occorre imporre la *condizione necessaria*:

$$\delta I = 0. \quad (5.44)$$

Riscriviamo ora la (5.43)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum P_j \dot{q}_j - H \right) dt,$$

cosicchè la (5.44) diventa:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum P_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0. \quad (5.45)$$

Non resta che sviluppare la (5.45):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \delta P_j \dot{q}_j + \sum P_j \delta \dot{q}_j - \delta H \right) dt = 0. \quad (5.46)$$

Integrando per parti notiamo che

$$\int_{t_1}^{t_2} P_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} d(P_j \delta q_j) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{P}_j \delta q_j dt =$$

⁴ In tale definizione supponiamo che la Lagrangiana sia indipendente dal tempo.

$$= p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{P}_j \delta q_j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{P}_j \delta q_j dt , \quad (5.47)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\delta q_j(t_2) = \delta q_j(t_1) = 0 .$$

Applicando la (5.47) ed esprimendo l'Hamiltoniana in termini di coordinate e momenti generalizzati

$$H = H(q_1, \dots, q_n; P_1, \dots, P_n) ,$$

la (5.46) diventa:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left(\delta P_j \dot{q}_j - \dot{P}_j \delta q_j \right) - \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial H}{\partial P_j} \delta P_j \right) \right] dt = 0 ,$$

da cui

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \delta P_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) - \sum_j \delta q_j \left(\dot{P}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right] dt = 0 . \quad (5.48)$$

Affinchè la (5.48) valga per qualsiasi scelta di δP_j , δq_j devono valere le

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} , \quad j = 1, \dots, n \quad (5.49)$$

che sono le **equazioni di Hamilton**.

5.4.2 Hamiltoniana relativistica di una particella

Dalla definizione (5.40) ed applicando la (5.37) risulta

$$\begin{aligned} H &= \frac{m_0 v_x^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 v_y^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 v_z^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + qA_x v_x + qA_y v_y + qA_z v_z - L = \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\phi - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Con facili calcoli, la (5.50) può essere riscritta come

$$H = mc^2 + q\phi, \quad (5.51)$$

ed essendo $m = m_0\gamma$, H può esprimersi anche come:

$$H = m_0\gamma c^2 + q\phi = \mathcal{E} + q\phi, \quad (5.52)$$

dove \mathcal{E} è l'energia della massa m_0 (vedi capitolo 3). Possiamo notare che il contributo all'Hamiltoniana è dato da un termine relativo all'energia meccanica relativistica e un termine dovuto all'energia del campo elettrostatico. Non è presente il termine relativo al campo magnetico perchè, come è noto, le forze del campo magnetico non compiono lavoro. Avendo dalla (5.52)

$$H - q\phi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e dalla (5.31)

$$\mathbf{P} - q\mathbf{A} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

si ottiene

$$\frac{(H - q\phi)^2}{c^2} - |\mathbf{P} - q\mathbf{A}|^2 = m_0^2c^2$$

quindi

$$(H - q\phi)^2 = m_0^2c^4 + c^2|\mathbf{P} - q\mathbf{A}|^2.$$

Abbiamo così trovato un'espressione alternativa per l'Hamiltoniana relativistica:

$$H = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2|\mathbf{P} - q\mathbf{A}|^2} + q\phi. \quad (5.53)$$

Carica in moto in un campo elettrico costante

Consideriamo una carica q , inizialmente ferma ($x_0 = 0, v_0 = 0$), in un campo elettrico costante diretto lungo x , ossia $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}}$ [vedi figura (5.1)].

L'Hamiltoniana relativistica della carica in esame è data dalla (5.53) e tenendo conto che, non essendoci campo magnetico il potenziale vettore \mathbf{A} è nullo, poniamo nelle (5.49)

$$\begin{cases} q \longleftrightarrow x \\ P = p \longleftrightarrow p_x \end{cases} \quad (5.54)$$

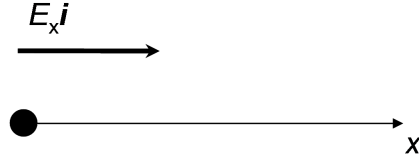


Figura 5.1: Carica q in un campo elettrico costante

giungendo così alle seguenti espressioni:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{2c^2 p_x}{2\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_x^2}} \quad (5.55)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} = qE_x \Rightarrow p_x(t) = qE_x t \quad (5.56)$$

dove $\dot{x} = v(t)$ e p_x rappresentano rispettivamente la velocità e la quantità di moto della carica. Sostituendo la (5.56) nella (5.55), si ottiene

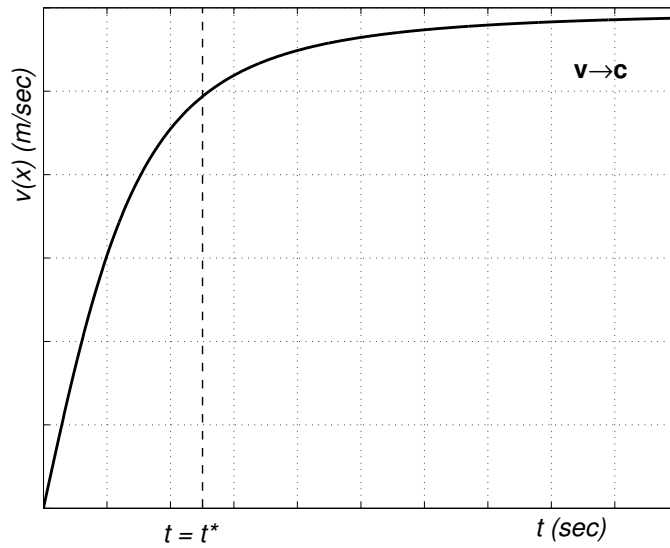


Figura 5.2: Velocità della carica q in campo elettrico costante

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{c^2 q E_x t}{\sqrt{m_0^2 c^4 + (c q E_x t)^2}} = \frac{q E_x t}{m_0 \sqrt{1 + \left(\frac{c q E_x t}{m_0 c^2}\right)^2}} \quad (5.57)$$

In figura (5.2), è mostrato l'andamento della velocità della carica q lungo l'asse x . Fissato un tempo

$$t = t^* = \frac{m_0 c^2}{cqE_x}, \quad (5.58)$$

notiamo dalla figura l'esistenza di tre regimi di velocità:

1. *classico* ($t \ll t^*$): è l'andamento lineare di una carica q “non relativistica” sotto l'azione di un campo elettrico E_x , ossia $v(t) = \frac{qE_x}{m}t$;
2. *relativistico* ($t = t^*$): la carica intorno al tempo t^* si allontana dall'andamento lineare;
3. *ultra relativistico* ($t \gg t^*$): la velocità della carica tende a quella della luce c .

Come possiamo facilmente evincere dalla (5.58), per campi elettrici E_x crescenti la durata del primo regime è sempre più piccola. Integrando la (5.57) rispetto al tempo, otteniamo l'espressione della posizione della carica:

$$x(t) = \frac{1}{qE_x} \sqrt{m_0^2 c^4 + (cqE_x t)^2} + cost = \frac{m_0 c^2}{qE_x} \sqrt{1 + \left(\frac{cqE_x t}{m_0 c^2}\right)^2} + cost \quad (5.59)$$

che tenendo conto della condizione iniziale $x_0 = 0$ diventa

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{qE_x} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{cqE_x t}{m_0 c^2}\right)^2} - 1 \right]. \quad (5.60)$$

Consideriamo ancora come riferimento temporale t^* ; per la (5.60) si ha che

$$\text{se } t \ll t^* \implies x(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{qE_x}{m_0}\right) t^2 \quad (5.61)$$

$$\text{se } t \gg t^* \implies x(t) = ct \quad (5.62)$$

Nella figura (5.3), è mostrato l'andamento (linea continua) della posizione della carica q tenendo conto delle (5.61) e (5.62); tale andamento, per tempi crescenti, tende a quello lineare di una carica che parte già da $t = 0$ con la velocità della luce c (linea tratteggiata).

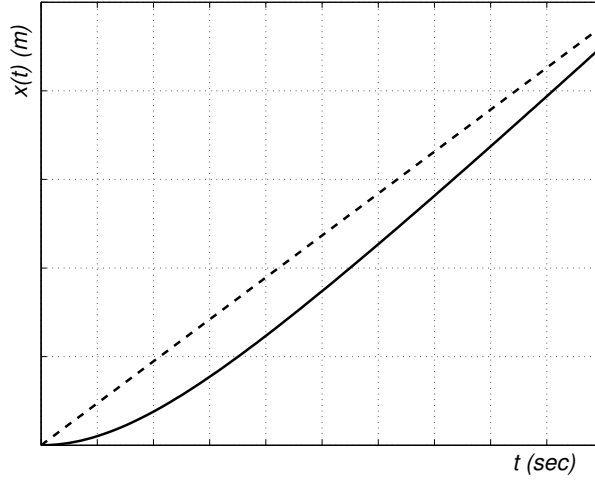


Figura 5.3: Posizione della carica q in campo elettrico costante

Carica in moto in un campo magnetico costante

Consideriamo una carica q , con velocità iniziale $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{j}}$, in un campo magnetico costante $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$ e ortogonale a \mathbf{v} [vedi figura (5.4)]. Esprimiamo \mathbf{B} tramite il potenziale vettore \mathbf{A} per ottenere l'espressione della quantità costante B_0 :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \implies B_0 = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) . \quad (5.63)$$

L'Hamiltoniana relativistica della carica in esame è data dalla (5.53) e ugualmente dalla (5.52) in cui, non essendoci campo elettrico, il potenziale scalare ϕ può essere assunto nullo; poniamo nella seconda delle (5.49)

$$\begin{cases} q_1 \longleftrightarrow x \\ q_2 \longleftrightarrow y \\ P_1 \longleftrightarrow P_x \\ P_2 \longleftrightarrow P_y \end{cases} \quad (5.64)$$

giungendo così alle seguenti espressioni per le derivate delle quantità di moto

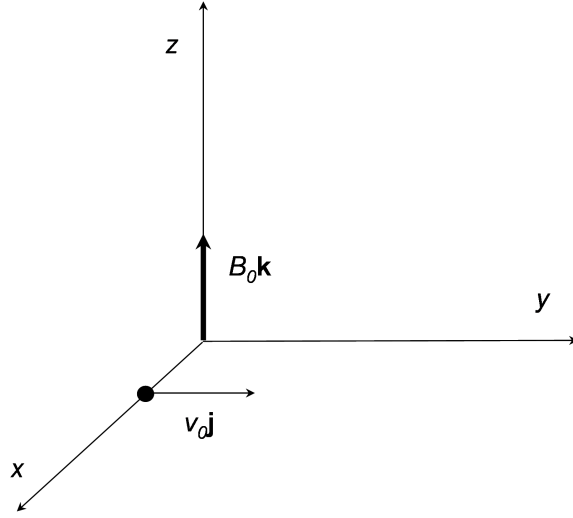


Figura 5.4: Carica q in un campo magnetico costante

rispettivamente lungo x e y :

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\left[(P_x - qA_x)\left(-q\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + (P_y - qA_y)\left(-q\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) \right]}{m_0\gamma} \quad (5.65)$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\left[(P_x - qA_x)\left(-q\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + (P_y - qA_y)\left(-q\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) \right]}{m_0\gamma} \quad (5.66)$$

Sapendo che

$$\begin{cases} P_x - qA_x = p_x = m_0\gamma v_x \\ P_y - qA_y = p_y = m_0\gamma v_y \end{cases} \quad (5.67)$$

sostituiamo le (5.67) nelle (5.65) e (5.66), ottenendo

$$\dot{P}_x = q \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} \right] \quad (5.68)$$

$$\dot{P}_y = q \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} \right] . \quad (5.69)$$

Dalla derivata temporale totale della componente A_x del potenziale \mathbf{A}

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (5.70)$$

in cui nell'ultimo membro è stato omissso il termine ($\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0$) poichè il campo magnetico è stazionario, possiamo giungere, tenendo conto della (5.70) e con semplici passaggi, alla seguente uguaglianza

$$\dot{P}_x - q \frac{dA_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt} = qv_y B_0 \quad (5.71)$$

e allo stesso modo, considerando la $\frac{dA_y}{dt}$, otteniamo:

$$\dot{P}_y - q \frac{dA_y}{dt} = \frac{dp_y}{dt} = -qv_x B_0 . \quad (5.72)$$

Considerando le (5.71) e (5.72), otteniamo il sistema di due equazioni nelle due incognite v_x e v_y

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qv_y B_0 \\ m\dot{v}_y = -qv_x B_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{v}_x = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_x \\ \ddot{v}_y = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_y \end{cases}$$

e risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} v_x(t) = -v_0 \sin(\Omega t) \\ v_y(t) = v_0 \cos(\Omega t) , \end{cases} \quad (5.73)$$

$$\text{dove } \Omega = \frac{qB_0}{m} .$$

Derivando le (5.73), abbiamo l'andamento della posizione della carica q sul piano xy dato dalle seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \cos(\Omega t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) . \end{cases} \quad (5.74)$$

In figura (5.4.2), è riportata la soluzione, al variare di t , del sistema (5.74), ossia l'andamento nel tempo della carica q . Il moto descrive una circonferenza il cui raggio r è dato da

$$r = \frac{v_0}{\Omega} = \frac{mv_0}{qB_0}$$

che dipende dalla velocità iniziale della particella v_0 e dall'intensità del campo magnetico B_0 .

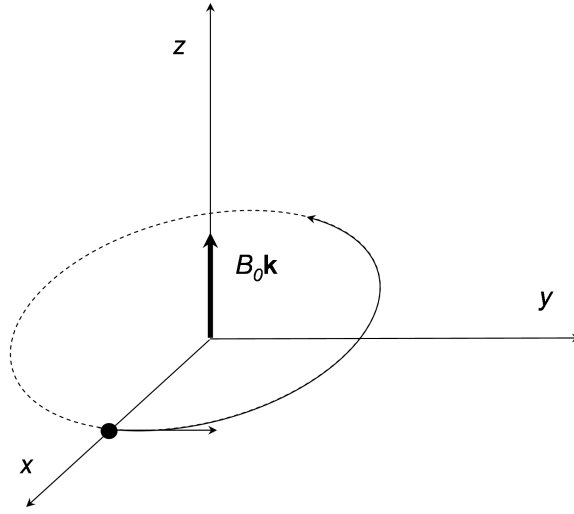


Figura 5.5: Moto della carica q in un campo magnetico costante

5.4.3 Hamiltoniana ed equazioni del moto in coordinate cilindriche

Abbiamo visto che la funzione Lagrangiana relativistica di un sistema in coordinate cartesiane può essere espressa come

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q \phi, \quad (5.75)$$

dove la velocità \mathbf{v} , il potenziale vettore \mathbf{A} e il potenziale scalare ϕ sono espressi come

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{A} &= A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}, \\ \phi &= \phi(x, y, z). \end{aligned}$$

Passando in coordinate cilindriche (r, θ, z) ed esprimendo le suddette quantità come

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\mathbf{z}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{A}(r, \theta, z) &= A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z \hat{\mathbf{z}}, \\ \phi &= \phi(r, \theta, z). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Sostituendo le (5.76) nella (5.75), otteniamo l'espressione della funzione Lagrangiana relativistica in un sistema di riferimento cilindrico:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + q(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + \dot{z}A_z) - q\phi, \quad (5.77)$$

da cui ricaviamo i momenti generalizzati o *canonici*:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_0\gamma\dot{r} + qA_r, \quad (5.78)$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_0\gamma r^2\dot{\theta} + qrA_\theta, \quad (5.79)$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m_0\gamma\dot{z} + qA_z, \quad (5.80)$$

e i momenti meccanici o, semplicemente, quantità di moto:

$$p_r = m_0\gamma\dot{r}, \quad (5.81)$$

$$p_\theta = m_0\gamma r\dot{\theta}, \quad (5.82)$$

$$p_z = m_0\gamma\dot{z}. \quad (5.83)$$

Le equazioni del moto possono essere ottenute dalla Lagrangiana, e vanno sotto il nome di equazioni di **Eulero-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \text{con } i = r, \theta, \phi, \quad (5.84)$$

ossia

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{r}) - m_0\gamma r\dot{\theta}^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta), \quad (5.85)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(m_0\gamma r^2\dot{\theta}) = q(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z), \quad (5.86)$$

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{z}) = q(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r), \quad (5.87)$$

avendo tenuto conto delle relazioni $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Le stesse equazioni in coordinate cartesiane diventano:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{x}) = q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \quad (5.88)$$

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{y}) = q(E_y + \dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \quad (5.89)$$

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{z}) = q(E_z + \dot{x}B_y - \dot{y}B_x). \quad (5.90)$$

La funzione Hamiltoniana relativistica del sistema, definita dalla (5.53), tramite semplici passaggi, si dimostra assumere la seguente espressione in coordinate cilindriche

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (P_r - qA_r)^2 + \left(\frac{P_\theta - qrA_\theta}{r}\right)^2} + (P_z - qA_z)^2 + q\phi. \quad (5.91)$$

Usando la (5.91), possiamo ricavare le equazioni del moto (5.85) e (5.87).

Capitolo 6

Applicazioni della funzione Hamiltoniana: moto di particelle cariche in campi statici

6.1 Foccheggiamento in un solenoide

Una struttura molto frequente negli acceleratori ed usata per il foccheggiamento delle particelle in moto è rappresentata dal solenoide. Il solenoide si può schematizzare ... (vedi figura(6.1)). Per foccheggiamento intendiamo l'operazione di riduzione dello spostamento delle traiettorie delle particelle rispetto a quella nominale.

Per spiegare come questo possa succedere, consideriamo una particella con carica q in moto su una traiettoria prossima a ...

Supponiamo inoltre che la quantità di moto della particella lungo la direzione parallela all'asse di simmetria del solenoide, asse z , sia predominante su quella trasversa ($p_z \gg p_\perp$). Tale situazione è detta di *approssimazione parassiale*.

Poiché il ferro tende a confinare le linee del campo magnetico all'interno del solenoide, la particella passa da una regione con campo magnetico nullo ad una con campo costante, attraverso una regione di campi di bordo, noti come

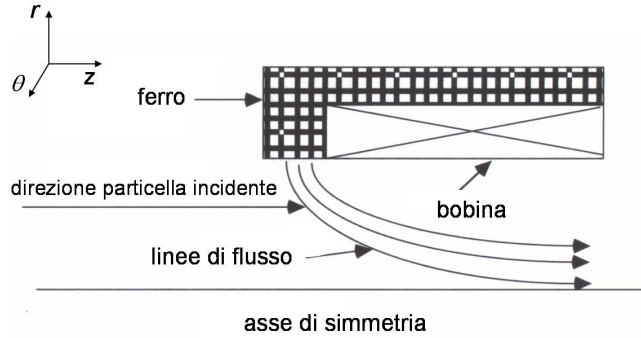


Figura 6.1: Regione di "fringe" del solenoide e traiettoria di una particella fuori asse che incontra la componente radiale del campo magnetico.

"fringing fields". In questa regione di transizione, necessaria per soddisfare la condizione di divergenza nulla dell'induzione magnetica, ossia $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, esprimendola in coordinate cilindriche, si ottiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r = - \frac{\partial B_z}{\partial z} . \quad (6.1)$$

La particella carica è pertanto soggetta anche ad una componente radiale di campo, B_r , non essendo nullo il termine $\partial B_z / \partial z$ nella (6.1).

Sfruttando la simmetria del sistema in considerazione, si dimostra che la componente longitudinale del campo magnetico può essere espressa come sviluppo in serie della coordinata r di soli termini pari, cioè $B_z(r, z) = B(0, z)(1 + \alpha r^2 + \dots)$. Nel caso di approssimazione parassiale abbiamo $|\alpha r^2| \ll 1$, ed anche i termini di ordine superiore possono essere trascurati, pertanto, integrando la (6.1), si giunge a

$$B_r \simeq - \frac{r}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{r=0} \quad (6.2)$$

ovvero

$$B_r \simeq - \frac{r}{2} B' \quad \text{con} \quad B = B_z = B(0, z) . \quad (6.3)$$

Le equazioni del moto in coordinate cilindriche (5.85), (5.79) e (5.87) con l'ipotesi di campo elettrico nullo e campo magnetico a simmetria cilindrica

($B_\theta = 0$) diventano

$$m_0\gamma\ddot{r} - m_0\gamma r\dot{\theta}^2 = qr\dot{\theta}B, \quad (6.4)$$

$$m_0\gamma r^2\dot{\theta} = -qrA_\theta + P_\theta = -\frac{q}{2}Br^2 + P_\theta, \quad (6.5)$$

$$m_0\gamma\ddot{z} = \frac{q}{2}r^2\dot{\theta}B'. \quad (6.6)$$

Il coefficiente relativistico γ è stato supposto costante in quanto non si ha una variazione dell'energia della particella in presenza di solo campo magnetico. Dalla (6.5) otteniamo

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{2m_0\gamma} + \frac{P_\theta}{m_0\gamma r^2} \quad (6.7)$$

e, considerando la coordinata z come variabile indipendente, si giunge a

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{qB}{2m_0\gamma\beta c} + \frac{P_\theta}{m_0\gamma r^2\beta c}. \quad (6.8)$$

Integrando la (6.8) con le condizioni iniziali $\theta = \theta_0$ e $z = z_0$ si ottiene

$$\theta - \theta_0 = \int_{z_0}^z \left(-\frac{qB}{2m_0\gamma\beta c} + \frac{P_\theta}{m_0\gamma r^2\beta c}\right) dz. \quad (6.9)$$

Con le seguenti sostituzioni

$$\dot{r} = r'\dot{z} = r'\beta c, \quad (6.10)$$

$$\ddot{r} = \beta c \frac{d}{dz}(r'\beta c) = r''\beta^2 c^2 + r'\beta'\beta c^2, \quad (6.11)$$

poichè β è costante, l'equazione (6.4) diventa

$$\gamma r''\beta^2 c^2 = \frac{r\dot{\theta}}{m_0}(m_0\gamma\dot{\theta} + qB) \quad (6.12)$$

$$= \frac{r}{m_0} \left(-\frac{qB}{2m_0\gamma} + \frac{P_\theta}{m_0\gamma r^2}\right) \left(\frac{qB}{2} + \frac{P_\theta}{r^2}\right) \quad (6.13)$$

e riarrangiando:

$$r'' + \left(\frac{qB}{2m_0c\gamma\beta}\right)^2 r - \frac{P_\theta^2}{\beta^2 c^2 m_0^2 \gamma r^3} = 0. \quad (6.14)$$

Questa è l'equazione nell'approssimazione parassiale che descrive il moto radiale delle particelle vicino l'asse z dove i termini di forza non lineari

possono essere omissi con buona approssimazione. Nel caso di simmetria cilindrica in cui la funzione Hamiltoniana non dipende da θ , si ha

$$\frac{dP_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (6.15)$$

dalla quale si ricava che il momento generalizzato $P_\theta = m_0\gamma r^2\dot{\theta} + qrA_\theta$ è una quantità che si conserva lungo il moto e pertanto è determinato dalle condizioni iniziali. Questa proprietà che rappresenta la conservazione del momento angolare canonico (o generalizzato), è equivalente al *teorema di Busch*, ricavato in origine dall'equazione (5.86).

La posizione azimutale delle particelle in funzione della distanza z può essere determinata dall'equazione (6.9). Poniamoci nel caso in cui la particella carica provenga da una regione a campo magnetico nullo ($A_\theta = 0$) ed entri nel solenoide con una velocità angolare iniziale nulla ($v_\theta = r\dot{\theta} = 0$). In tale situazione abbiamo che $P_\theta = 0$ e la (6.14) diviene

$$r'' + \frac{\omega_L^2}{\beta^2 c^2} r = 0 \quad (6.16)$$

con $\omega_L = qB/(2m_0\gamma)$ detta frequenza di Larmor.

Molto spesso, anche nella condizione in cui $P_\theta \neq 0$, è più conveniente studiare la traiettoria della particella in un sistema di riferimento che ruota ad una frequenza ω_L , chiamato sistema di riferimento di Larmor. L'angolo θ_r tra tale sistema ruotante e quello fisso con il solenoide è dato da

$$\theta_r = \mp \int_{z_0}^z \frac{\omega_L}{\beta c} dz . \quad (6.17)$$

L'angolo θ_L descritto dalla particella nel sistema di Larmor è quindi dato dalla differenza tra l'angolo θ nel sistema solidale con il solenoide (eq. (6.5)) e θ_r :

$$\theta_L = \theta - \theta_r = \int_{z_0}^z \frac{P_\theta}{m_0\gamma\beta cr^2} dz + \theta_0 . \quad (6.18)$$

Se la particella inizia la sua traiettoria fuori asse in x ($x = x_0$), ma non in y , e con moto trasverso nullo prima della regione di campo magnetico allora θ_r è proprio l'angolo tra la traiettoria della particella e l'asse x , come mostrato in figura (6.2). Nella stessa figura, l'angolo θ_c è l'angolo di ciclotrone del moto (centrato in $x = x_0/2$) ed è uguale a $2\theta_L$.

Usando le coordinate cartesiane (x, y) per descrivere il moto su piani ortogonali all'asse di simmetria cilindrica, i termini del primo ordine per il campo magnetico si ricavano dalle (6.3):

$$B_x = -\frac{1}{2}B'x \quad B_y = -\frac{1}{2}B'y \quad (6.19)$$

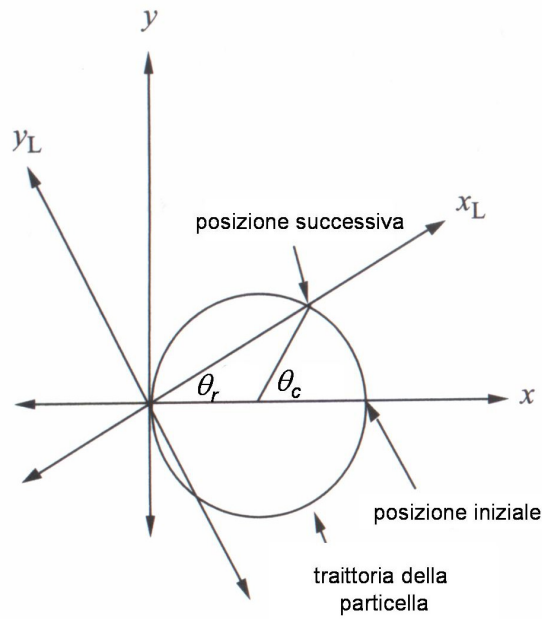


Figura 6.2: *Traiettoria di una particella carica con quantità di moto nulla prima del solenoide.*

Usando la seguente relazione

$$\omega'_L = \frac{q}{2m_0\gamma} B' , \quad (6.20)$$

dalle equazioni (5.88) e (5.89), con sostituzioni analoghe a quelle delle equazioni (6.11) e (6.10) si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$x'' - \frac{2\omega_L}{\beta c} y' - \frac{\omega'_L}{\beta c} y = 0 , \quad (6.21)$$

$$y'' + \frac{2\omega_L}{\beta c} x' + \frac{\omega'_L}{\beta c} x = 0 . \quad (6.22)$$

Tali equazioni differenziali sono lineari in x e y ma accoppiate. Nel sistema di riferimento di Larmor (x_L, y_L) le equazioni si semplificano e il moto trasverso si dimostra facilmente essere armonico lungo entrambe le direzioni, ossia

$$x''_L + \kappa_L^2 x_L = 0 , \quad (6.23)$$

$$y''_L + \kappa_L^2 y_L = 0 , \quad (6.24)$$

dove $\kappa_L = \omega_L/\beta c$.

6.2 Moto in un campo elettrico costante

Consideriamo il caso in cui è presente un campo elettrico, ad esempio costante e diretto lungo l'asse z ($\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$). L'energia di una particella carica al suo interno non rimane più costante, ma aumenta a causa della forza elettrica. Usando la relazione della forza di Lorentz ed essendo $\mathbf{B} = 0$, le equazioni del moto diventano

$$\frac{dp_z}{dt} = qE_0 \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = 0 . \quad (6.25)$$

Come si può notare, il moto trasverso della particella in esame rimane una costante del moto, pertanto ha senso interessarsi solo di quello longitudinale.

Il campo elettrostatico $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ può essere espresso tramite un potenziale scalare ϕ_e , quindi l'energia potenziale acquisita dalla carica q è

$$q\phi = -qE_0z . \quad (6.26)$$

La funzione Hamiltoniana, che in questo caso è proprio l'energia totale, si esprime come

$$H = \gamma m_0 c^2 + q\phi = \gamma m_0 c^2 - qE_0z , \quad (6.27)$$

e, essendo indipendente dal tempo t , è una costante del moto valutata pertanto nel punto iniziale $z = 0$.

Consideriamo l'energia totale della particella (quella a riposo più quella cinetica):

$$\gamma m_0 c^2 = H|_{z=0} + qE_0z . \quad (6.28)$$

o in forma normalizzata:

$$\gamma(z) = \frac{H|_{z=0}}{m_0 c^2} + \gamma' z , \quad (6.29)$$

dove $\gamma' \equiv qE_0/m_0 c^2$ e $H|_{z=0} = \gamma|_{z=0} m_0 c^2$. Notiamo dalla (6.29) che l'energia della particella aumenta in modo lineare con la posizione. Il termine γ' viene usualmente chiamato gradiente di accelerazione, o gradiente di energia spaziale, e viene espresso in $1/m$. Il suo inverso definisce la distanza lungo la direzione dell'accelerazione, lungo la quale la particella guadagna un'unità dell'energia a riposo.

La conoscenza del fattore relativistico γ permette di ricavare facilmente altre importanti quantità:

$$p(z) = \beta\gamma m_0 c = m_0 c \sqrt{\gamma(z)^2 - 1} , \quad (6.30)$$

e

$$v(z) = \beta(z)c = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(z)^2}} . \quad (6.31)$$

In questo modo la velocità viene espressa in funzione della variabile z , anzichè t . Se vogliamo considerare il tempo come variabile indipendente, a partire dalla (6.25) si ha

$$\frac{dp_z}{dt} = m_0 c \frac{d\beta_z \gamma}{dt} = m_0 c (\gamma + \beta_z^2 \gamma^3) \frac{d\beta_z}{dt} \cong \gamma^3 m_0 c \frac{d\beta_z}{dt} = qE_0, \quad (6.32)$$

ovvero

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qE_0}{\gamma^3 m_0}, \quad (6.33)$$

avendo assunto nella (6.32) che $\beta_z \cong \beta$ e $\gamma \gg 1$, ossia che il moto sia principalmente longitudinale. Dalla (6.33), notiamo che la massa efficace di una particella relativistica che subisce un'accelerazione parallela al suo vettore velocità è pari a $\gamma^3 m_0$. A tale massa ci si riferisce anche come "massa longitudinale".

In questo caso di accelerazione costante nel tempo, nel piano delle fasi longitudinale di figura (6.3) sono mostrate le curve ad energia costante ($H = \text{costante}$). Tali curve hanno un andamento parabolico nell'intorno di $p_z = 0$, ossia nella regione di limite non relativistico. Nella regione di regime relativistico, ossia per grandi valori di $p_z/m_0 c$, le curve tendono ad un andamento lineare.

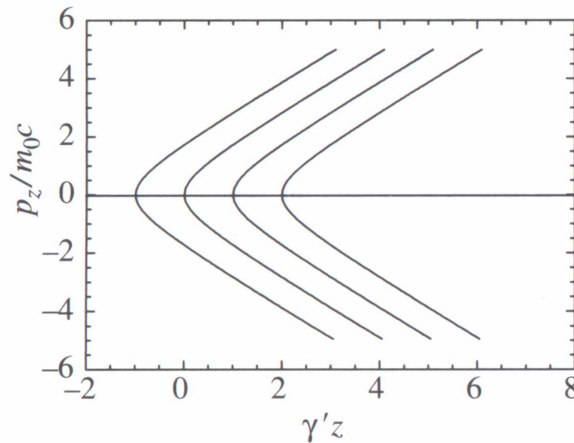


Figura 6.3: *Traiettorie nel piano delle fasi longitudinale per accelerazione costante.*

Nel paragrafo (6.1), riguardante il solenoide, abbiamo visto come gli effetti di bordo del campo magnetico fossero di estrema importanza per spiegare

il moto trasverso della particella che entrava in una regione con campo longitudinale. Allo stesso modo è possibile spiegare cosa accade ad una particella carica proveniente da una regione a campo nullo ed entrante in una con un campo elettrico costante disposto parallelamente alla sua velocità v , ossia lungo z . L'analisi procede considerando le duali delle (6.1)-(6.3), sempre con il campo prossimo all'asse di simmetria:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r = - \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (6.34)$$

dalla cui integrazione abbiamo

$$E_r \simeq - \frac{r}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{r=0} \quad (6.35)$$

ovvero

$$E_r \simeq - \frac{r}{2} E' \quad \text{con} \quad E = E_z = E(0, z). \quad (6.36)$$

Proseguendo sempre allo stesso modo del paragrafo (6.1), possiamo calcolare la variazione della quantità di moto trasversale dovuta alla componente radiale del campo elettrico E_r , subito dalla particella nella zona di "fringe":

$$\begin{aligned} \Delta p_r &= - \frac{rq}{2v} \int_{z_1}^{z_2} E' dz = - \frac{rq}{2v} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dE}{dz} dz \\ &= - \frac{rq}{2v} [E(z_2) - E(z_1)] = - \frac{rq}{2v} E_0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Per un campo accelerante ($qE_0 > 0$), tale effetto è di focheggiamento, poichè la quantità di moto Δp_r acquisita dalla particella tende a spingerla verso l'asse. Quando la carica q , però, lascia la zona con campo elettrico uniforme, le linee di forza nella zona di "fringe" di uscita hanno tendono ad andare in verso opposto a quelle della situazione d'ingresso. Rieffettuando il calcolo di Δp_r nella (6.37), si ottiene evidentemente un'azione defoccheggiante.

6.3 Moto in un quadrupolo

Si consideri in questa sezione un sistema di focheggiamento in cui vengono usati campi trasversi quadrupolari. In assenza di densità di correnti nella regione d'interesse, sia il campo elettrico che quello magnetico possono essere derivati da un potenziale scalare Ψ .

Tale potenziale, considerando una struttura avente dimensione longitudinale (lungo l'asse z) molto più grande rispetto a quelle trasversali, deve soddisfare con buon'approssimazione l'equazione di Laplace bidimensionale:

$$\nabla_t^2 \Psi = 0. \quad (6.38)$$

La soluzione di questa equazione può essere espressa nella forma seguente

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\phi) + b_n r^n \sin(n\phi) . \quad (6.39)$$

Il potenziale può essere pertanto espresso tramite uno sviluppo detto in multipoli, dove n indica l'ordine. Per $n = 1$ si ha

$$\Psi_1 = a_1 r \cos(\phi) + b_1 r \sin(\phi) \quad (6.40)$$

e i campi corrispondenti sono di tipo dipolare. Per quanto riguarda il campo magnetico, essendo $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$, si ha

$$\mathbf{B}_1 = -\nabla\Phi_1 = -a_1 \hat{\mathbf{x}} - b_1 \hat{\mathbf{y}} . \quad (6.41)$$

Tale campo è detto dipolo in quanto il magnete che lo realizza possiede solo due poli.

Per $n = 2$, si ha

$$\Psi_2 = a_2 r^2 \cos(2\phi) + b_2 r^2 \sin(2\phi) = a_2 (x^2 - y^2) + 2b_2 xy \quad (6.42)$$

e il corrispondente campo magnetico vale

$$\mathbf{B}_2 = 2a_2(-x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) - 2b_2(y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}) . \quad (6.43)$$

Se il coefficiente a_2 non è nullo allora una particella carica viaggiante lungo la direzione z subisce un forza lungo x proporzionale ad y , e viceversa. Tale forza è dovuta alla componente detta *skew* del campo magnetico e la sua presenza è generalmente indesiderata. Il coefficiente b_2 indica la presenza di un quadrupolo detto *normal*, dal quale si ottiene una forza diretta lungo x e proporzionale ad x , e una forza diretta lungo y e proporzionale ad y :

$$\mathbf{F}_t = qv_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_2 = -2qv_z b_2 (y\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{x}}) . \quad (6.44)$$

Assumendo qb_2 positivo, questa forza è focheggiante nella direzione y e defocheggiante in x . Se qb_2 è negativo succede l'inverso. Il coefficiente $2b_2$ misura il gradiente g del campo magnetico fuori asse, pertanto, con riferimento all'equazione (6.43), può essere espresso nel seguente modo $g = 2b_2 = -\partial B_x / \partial y$.

Il termine *quadrupolo* può essere spiegato semplicemente guardando la figura (6.4), dove sono mostrati quattro poli (pezzi di ferro), magnetizzati da bobine in cui scorrono correnti con polarità alterne. La superfici dei poli formano dei potenziali magnetici ed hanno andamento iperbolico, come deve essere per avere il campo desiderato osservando la (6.42).

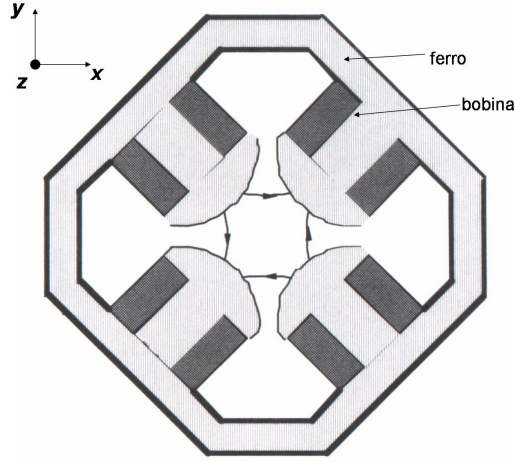


Figura 6.4:

Ricaviamo ora le equazioni del moto per una particella con carica q all'interno di tale struttura. Dalle (5.88) e (5.89) si ha

$$m_0\gamma\ddot{x} = -qv_zB_y = 2qv_zb_2x = qv_zgx , \quad (6.45)$$

$$m_0\gamma\ddot{y} = qv_zB_x = -2qv_zb_2y = -qv_zgy . \quad (6.46)$$

che possono essere scritte nella forma

$$\ddot{x} - \frac{qv_zg}{m_0\gamma}x = 0 , \quad (6.47)$$

$$\ddot{y} + \frac{qv_zg}{m_0\gamma}y = 0 . \quad (6.48)$$

Da notare che il fattore γ è una costante in quanto la particella non acquista energia in un campo magnetico. Tali equazioni hanno entrambe la stessa forma $\ddot{\xi} \pm \omega_0^2\xi = 0$, con soluzioni $\xi = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ o $\xi = A \cosh(\omega_0 t) + B \sinh(\omega_0 t)$, a seconda del segno. Si ottiene, pertanto, azione focheggiante in un piano di simmetria e defocheggiante nell'altro.

Si voglia ora esprimere tali equazioni usando z come variabile indipendente al posto del tempo t ; nell'approssimazione parassiale, usando le seguenti sostituzioni $v_z \simeq v \simeq \text{costante}$, $z = v_z t$, $d^2/dt^2 = v^2(d^2/dz^2)$, si ottiene

$$x'' - \kappa_0^2 x = 0 , \quad (6.49)$$

$$y'' + \kappa_0^2 y = 0 . \quad (6.50)$$

Il coefficiente $\kappa_0^2 = qg/p_z$ è il termine focheggiante.

Supponendo $\kappa_0^2 < 0$, si hanno oscillazioni armoniche nella direzione x :

$$x = x_0 \cos[\kappa_0(z - z_0)] + \frac{x'_0}{\kappa_0} \sin[\kappa_0(z - z_0)] , \quad (6.51)$$

e moto iperbolico nella direzione y :

$$y = y_0 \cosh[\kappa_0(z - z_0)] + \frac{y'_0}{\kappa_0} \sinh[\kappa_0(z - z_0)] . \quad (6.52)$$

Se $\kappa_0^2 > 0$, il moto è oscillatorio in y e iperbolico in x .

Il focheggiamento tramite quadrupoli usati singolarmente non può essere raggiunto su entrambe le direzioni trasversali allo stesso tempo, pertanto, si utilizzano due quadrupoli alternati: uno focheggiante in una direzione, l'altro focheggiante nell'altra. L'effetto complessivo è di focheggiamento. Tale effetto è di gran lunga maggiore rispetto a quello ottenuto, ad esempio, con un solenoide e si parla di forte focheggiamento (*strong focusing*).

Per quanto riguarda i quadrupoli elettrici, affinché possa ottenere l'effetto duale al caso magnetico, gli elettrodi con superficie iperbolica devono essere disposti ruotati di 45° rispetto a quelli mostrati in figura (6.4). Se si usa per il potenziale scalare Ψ_e la stessa forma della (6.39) allora a_2 è il coefficiente del quadrupolo elettrico normale e b_2 quello del quadrupolo *skew*.

Le equazioni, nell'approssimazione parassiale, sono identiche alle (6.49) e (6.50), con $\kappa_0^2 = qE'/p_z v_z$, e di conseguenza il moto delle particelle nelle due direzioni trasverse è uguale al caso magnetico.

6.4 Moto in campo elettrico e magnetico uniformi e paralleli

Si consideri un campo elettrico uniforme, $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$, e un campo magnetico uniforme e parallelo, $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$: il campo elettrico produce un'accelerazione uniforme mentre il campo magnetico un focheggiamento. Tale distribuzione di campo danno come conseguenza l'effetto di uno smorzamento adiabatico (*adiabatic damping*) delle oscillazioni trasverse.

Per dimostrare ciò, consideriamo le equazioni del moto per tale configurazione di campo:

$$\frac{dp_z}{dt} = qE_0 \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = q(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) = \frac{qB_0}{\gamma m_0} (\mathbf{p}_\perp \times \hat{\mathbf{z}}) . \quad (6.53)$$

La quantità p_{\perp} è invariante perchè il campo magnetico non compie lavoro, e pertanto l'energia guadagnata da una particella può esprimersi in funzione di z , in base alla terza delle equazioni (3.39), come

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z) &= \gamma(z)m_0c^2 = \mathcal{E}(0) + qE_0z = \\ &= \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} + qE_0z = \sqrt{(p_{\perp}^2 + p_z^2|_{z=0})c^2 + (m_0c^2)^2} + qE_0z, \quad (6.54)\end{aligned}$$

che in approssimazione parassiale, trascurando il contributo della quantità di moto trasverso, diventa

$$\mathcal{E}(z) = \sqrt{p_z^2|_{z=0}c^2 + (m_0c^2)^2} + qE_0z. \quad (6.55)$$

Tale equazione e la (6.30) permettono di determinare l'energia e la quantità di moto longitudinale in funzione di z . Per ricavare le equazioni del moto trasverso si può partire dalle (5.88) e (5.89) considerando ora anche la componente longitudinale del campo elettrico e l'accelerazione. Le equazioni, corrispondenti alle (6.21) e (6.22) e ricavabili con un procedimento analogo, ma espresse in forma più generalizzata, si scrivono come

$$x'' + \frac{\gamma'}{\beta^2\gamma}x' + \frac{\gamma''}{2\beta^2\gamma}x - \frac{2\omega_L}{\beta c}y' - \frac{\omega'_L}{\beta c}y - \frac{\gamma'\omega_L}{\beta\gamma c}y = 0, \quad (6.56)$$

$$y'' + \frac{\gamma'}{\beta^2\gamma}y' + \frac{\gamma''}{2\beta^2\gamma}y + \frac{2\omega_L}{\beta c}x' + \frac{\omega'_L}{\beta c}x + \frac{\gamma'\omega_L}{\beta\gamma c}x = 0, \quad (6.57)$$

dove in questo caso si è posto

$$\omega'_L = \frac{qB'}{2m_0\gamma} - \frac{\gamma'}{\gamma}\omega_L \quad (6.58)$$

Analogamente al caso del solenoide, tali equazioni risultano più semplici nel sistema di riferimento di Larmor. Introducendo la variabile complessa $z = x + iy = re^{i\theta} = z_L e^{i\theta_L}$ dove $z_L = r_L e^{i\theta_L}$, l'equazione nel sistema di riferimento di Larmor diventa

$$z_L'' + \frac{\gamma'}{\beta^2\gamma}z_L' + \left(\frac{\gamma''}{2\beta^2\gamma} + \frac{\omega_L^2}{\beta^2c^2} \right) z_L = 0 \quad (6.59)$$

che, nel caso di energia costante, produce il semplice moto armonico come nel caso del solenoide. Considerando per esempio il moto su x , poichè $\gamma'' = 0$, si ottiene

$$x_L'' + \frac{\gamma'}{\beta^2\gamma}x_L' + \left(\frac{\omega_L}{\beta c} \right)^2 x_L = 0. \quad (6.60)$$

Volendo studiare il moto solo ad una velocità prossima a c , ossia $\beta \cong 1$, e ricordando che l'energia non è costante, otteniamo

$$x_L'' + \frac{\gamma'}{\gamma(z)} x_L' + \left(\frac{k}{\gamma(z)} \right)^2 x_L = 0, \quad (6.61)$$

con $k = qB/2m_0c$ e la cui soluzione può essere espressa come

$$x_L(z) = x_{L_0} \cos \left[\frac{k}{\gamma'} \ln \left(\frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \right) \right] + \frac{\gamma_0}{k} x'_{L_0} \sin \left[\frac{k}{\gamma'} \ln \left(\frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \right) \right], \quad (6.62)$$

dove x_{L_0} , x'_{L_0} e γ_0 rappresentano rispettivamente l'offset, l'angolo e il fattore di Lorentz iniziali.

Tale soluzione si presenta come quella di un oscillatore armonico con argomento che cresce logicamente nelle funzioni trigonometriche. Effettuando la derivata rispetto alla posizione z nella (6.62), otteniamo

$$x'_L(z) = -x_{L_0} \frac{k}{\gamma} \sin \left[\frac{k}{\gamma'} \ln \left(\frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \right) \right] + \frac{\gamma_0}{\gamma} x'_{L_0} \cos \left[\frac{k}{\gamma'} \ln \left(\frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \right) \right], \quad (6.63)$$

che evidenzia come la divergenza x'_L nel sistema di Larmor diminuisca all'aumentare del fattore γ , ossia al crescere della velocità.

6.5 Moto in campo elettrico magnetico uniforni e ortogonali tra loro

Prendiamo in considerazione la situazione in cui campo elettrico e magnetico sono tra loro ortogonali e con modulo costante, ad esempio $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Supponiamo che in tale situazione sia nulla la forza di Lorentz, pertanto

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (6.64)$$

La velocità che è consistente con la (6.64) è detta velocità di spostamento di *drift* v_d e si ottiene effettuando a destra di ambo i membri il prodotto vettoriale con \mathbf{B} :

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{E_0}{B_0} \hat{\mathbf{x}}. \quad (6.65)$$

La velocità di *drift* risulta essere perpendicolare ad entrambi i campi. Il moto generico in tale distribuzione di campo è facilmente deducibile passando

al sistema di riferimento di Lorentz che viaggia a velocità v_d rispetto a quello solidale con la terna (x, y, z) . La nuova configurazione di campo è data da

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma_d(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}_{\perp}) = 0, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma_d(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_d \times \mathbf{E}_{\perp}) = \gamma_d B_0 \left(1 - \frac{v_d^2}{c^2}\right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{B_0}{\gamma_d} \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.67)$$

Il campo è costante e puramente magnetico nel nuovo sistema. Ciò significa che il moto è di tipo elicoidale, come nel caso del ciclotrone. Osservando tale modo dalla direzione di \mathbf{B} , ossia l'asse z , esso è "cicloidale" ossia la sovrapposizione di un moto rotatorio più uno traslatorio come mostrato in figura (6.5).

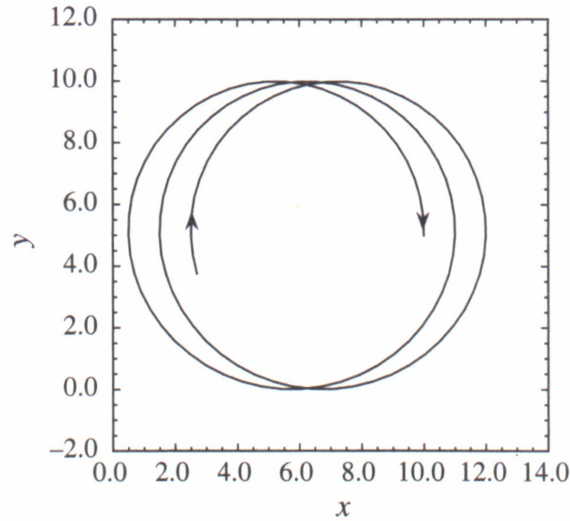


Figura 6.5: *Moto cicloidale in campo elettrico e magnetico uniformi e ortogonali*

Bibliografia

- [1] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica I: Meccanica - Termodinamica*, Liguori, 1996;
- [2] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica II: Elettromagnetismo - Ottica*, Liguori, 1998;
- [3] G. Gerosa, P. Lampariello, *Lezioni di Campi Elettromagnetici*, Ingegneria 2000, 1995;
- [4] Robert Resnick, *Introduzione alla Relatività Ristretta*, casa editrice Ambrosiana, Milano;
- [5] C.W. Kilmister, *Selected Readings in Physics - Special Theory of Relativity*, The Commonwealth and International Library of Science Technology Engineering and Liberal Studies;
- [6] Max Born, *Einstein's Theory of Relativity* (1962), Dover;
- [7] ..., *Basic Relativity ...*
- [8] J. H. Smith, *Introduction to Special Relativity*, W. A. Benjamin Inc., 1965;
- [9] Landau, *Teoria dei Campi*, ...
- [10] James B. Rosenzweig, *Fundamentals of Beam Physics*, Oxford University Press, 2003;
- [11] M. Reiser, *Theory and Design of Charged Particle Beams*, John Wiley and Sons, 1994.